Определение ДУ II-го порядка

Опр. Функциональное **уравнение** вида

(1) $y'' = f(x, y, y')$ или (2) $F(x, y, y', y'') = 0$,

которое связывает между собой **независимую переменную** x, **искомую функцию** y и **ее первую и вторую производные** y', y'' называется дифференциальным уравнением второго порядка (ДУ II порядка).

Определение ДУ II-го порядка. Примеры

Пример. $y'' + \omega^2 y = 0$ – ДУ II порядка.

гармонические колебания

Пример. $y'' + \omega^2 \sin y = 0$ – ДУ II порядка.

колебания математического маятника

Замечание. При небольших отклонениях y $\sin y \approx y$, и математический маятник совершает гармонические колебания.

Определение частного решения ДУ II-го порядка

Опр. Решением (частным) уравнения (1) или (2) называется любая функция $y = y(x)$,

$x \in (a, b)$, которая обращает уравнение в тождество (верное равенство для всех

$x \in (a, b)$), т.е.

1) $y''(x) = f(x, y(x), y'(x))$ или

2) $F(x, y(x), y'(x), y''(x)) = 0$.

Определение частного решения ДУ II-го порядка. Примеры

Пример. Функция $y = q_0 \cos \omega\, x$, $x \in (-\infty; +\infty)$, является решением уравнения $y'' + \omega^2 y = 0$.

Пример. Функция $y = 0$, $x \in (-\infty; +\infty)$, является решением уравнения $y'' + \omega^2 \sin y = 0$.

Определение общего решения ДУ II-го порядка

Опр. Общим решением ДУ (1) $y'' = f(x, y, y')$ или (2) $F(x, y, y', y'') = 0$ называется множество всех частных решений, записанных в виде функции $y = y(x, C_1, C_2)$, в частности,

для любых допустимых $\boldsymbol{C_1, C_2}$ функция $\boldsymbol{y = y(x, C_1, C_2)}$ **является решением** ДУ.

Определение общего решения ДУ I-го порядка. Пример

Пример. Функция $y = C_1 \cos \omega\, x + C_2 \sin \omega\, x$, $x \in (-\infty; +\infty)$, является общим решением уравнения $y'' + \omega^2 y = 0$ для любых C_1, C_2:

$$y' = \left(C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x\right)' =$$

$$= -\omega C_1 \sin \omega x + \omega C_2 \cos \omega x$$

Определение общего решения ДУ I-го порядка. Пример

$$y'' = \left(-\omega C_1 \sin \omega x + \omega C_2 \cos \omega x\right)' =$$

$$y'' = -\omega^2 C_1 \cos \omega x - \omega^2 C_2 \sin \omega x$$

$$y'' + \omega^2 y = \left(-\omega^2 C_1 \cos \omega x - \omega^2 C_2 \sin \omega x\right) +$$

$$+\omega^2 (C_1 \cos \omega x + C_2 \sin \omega x) = 0$$

$y'' + \omega^2 y = 0$ - верное тождество

Задача Коши для ДУ II-го порядка

Пусть

1) $y'' = f(x, y, y')$ – ДУ II-го порядка

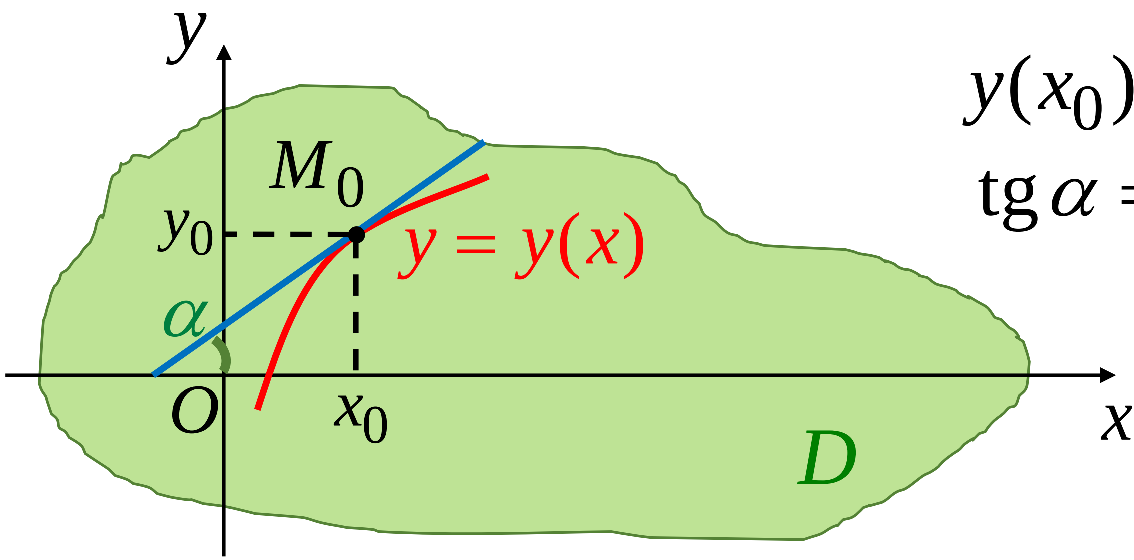
2) $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$ – НУ

Найти

решение ДУ, удовлетворяющее НУ.

Геометрический смысл задачи Коши

Геометрический смысл: найти интегральную кривую, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$, тангенс угла наклона касательной к которой к оси Ox в точке $M_0(x_0, y_0)$ равен y_0'.



$$y(x_0) = y_0,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = y_0'$$

Теорема Коши ДУ II-го порядка

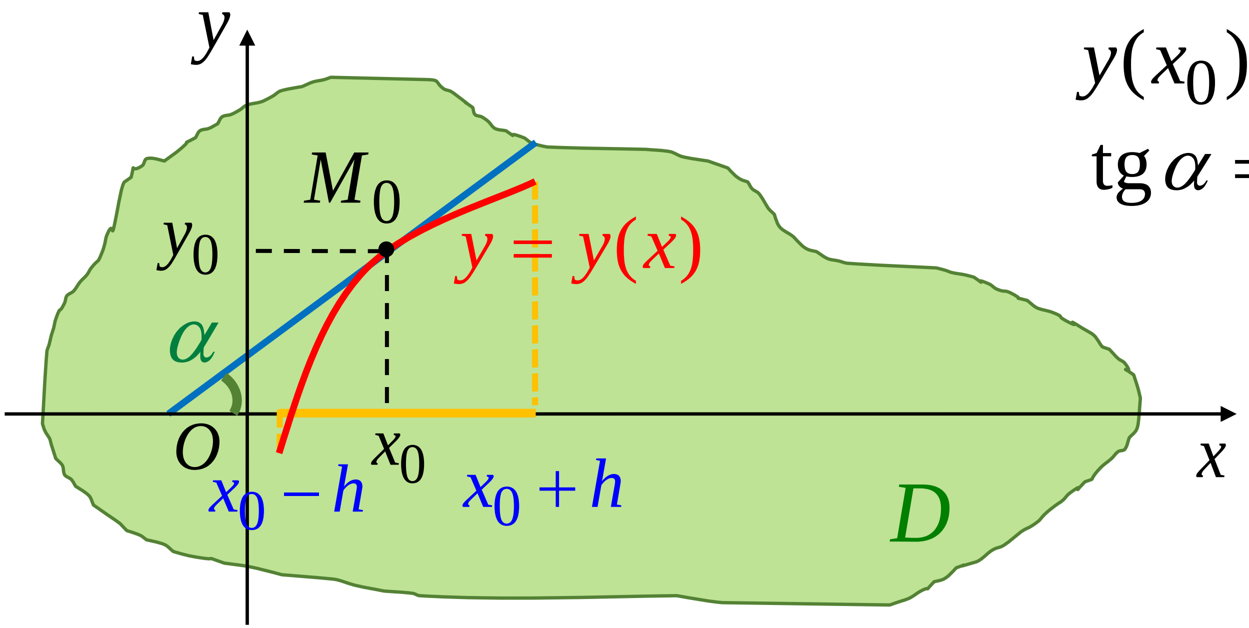
Теорема 1 (теорема Коши существования и единственности).

Если для ДУ $y'' = f(x, y, y')$ функция $f(x, y, y')$ непрерывна вместе со своими частными производными $f'_y(x, y, y')$, $f'_{y'}(x, y, y')$ в области D,

то для любой точки $N_0(x_0, y_0, y'_0) \in D$ на некотором интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ *существует единственное решение* $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее НУ $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$.

Геометрический смысл теоремы Коши

Через каждую точку $M_0(x_0, y_0)$ такую, что $N_0(x_0, y_0, y_0') \in D$, под данным наклоном y_0' проходит единственная интегральная кривая данного ДУ.



$$y(x_0) = y_0,$$
$$\operatorname{tg}\alpha = y_0'$$

I. ДУ II порядка, не содержащие y

Рассмотрим ДУ II порядка, **не содержащие *y***, т.е. ДУ вида

$$\boxed{y'' = f_1(x, y')}$$

В этом ДУ можно понизить порядок при помощи <u>замены</u>

$$\boxed{z(x) = y'(x)} \Rightarrow \boxed{y'' = z'} \Rightarrow \boxed{z' = f_1(x, z)}$$

ДУ I порядка относительно $\boldsymbol{z(x)}$

I. ДУ II порядка, не содержащие y
Задача 1

Задача 1. Найти частное решение ДУ (решить задачу Коши) $y'' = 1, y(0) = 0, y'(0) = 0.$

Решение. Это ДУ II порядка, допускающее понижение порядка, **не содержащее $\boldsymbol{y}$**.

Сделаем замену

$\boxed{z = y'} \Rightarrow \boxed{y'' = z'} \Rightarrow \boxed{z' = 1}$

ДУ I порядка относительно $\boldsymbol{z(x)}$

I. ДУ II порядка, не содержащие y
Задача 1

$$\frac{dz}{dx} = 1 \; (\cdot dx)$$

$$dz = dx$$

$$\int dz = \int dx$$

$$z = x + C_1$$

$$\boxed{y' = x + C_1}$$

I интеграл

$$\frac{dy}{dx} = x + C_1 \; (\cdot dx)$$

$$dy = (x + C_1)\,dx$$

$$\int dy = \int (x + C_1)\,dx$$

$$\boxed{y = \frac{x^2}{2} + C_1 x + C_2}$$

общее решение

I. ДУ II порядка, не содерж. y. Задача 1

$y(0) = 0$

Подставим в общее решение:

$$0 = \frac{0}{2} + C_1 \cdot 0 + C_2 \Rightarrow C_2 = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{2} + C_1 x$$

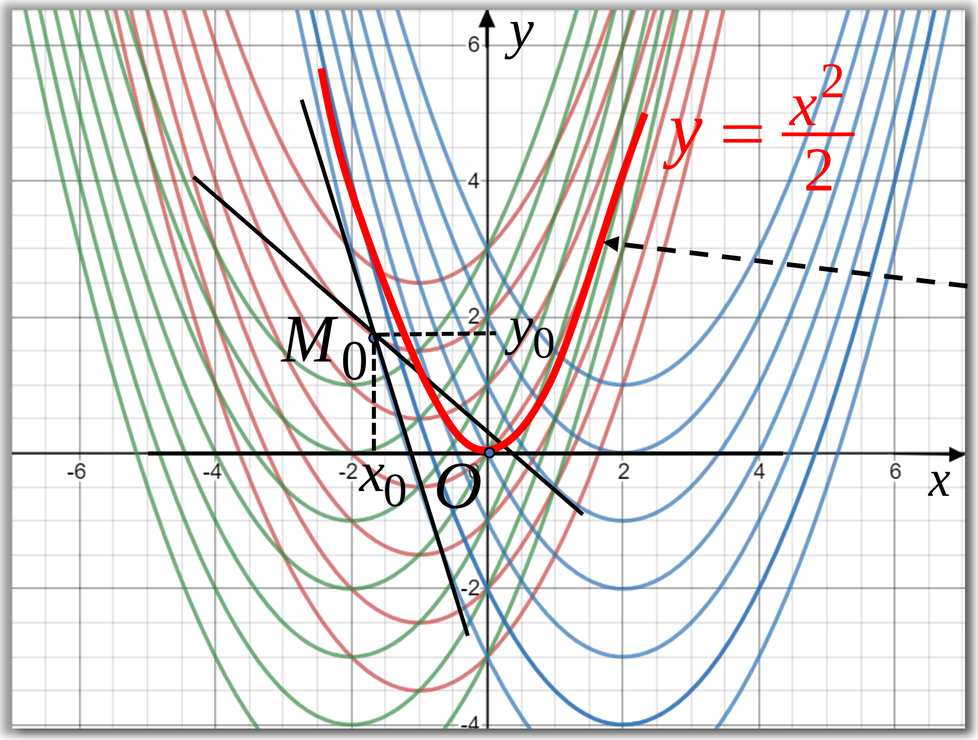
$y'(0) = 0$

Подставим в первый интеграл:

$$0 = 0 + C_1 \Rightarrow C_1 = 0 \Rightarrow$$

$\boxed{y = \frac{x^2}{2}}$ **- частное решение**

I. ДУ II порядка, не содержащее y



интегральная кривая – график частного решения

семейство интегральных кривых

II. ДУ II порядка, не содержащие *x*

Теперь рассмотрим ДУ II порядка, **не содержащие *x***, т.е. ДУ вида

$$\boxed{y'' = f_2(y, y')}$$

Считаем, что найдется такая функция $p(y)$, что $y' = p(y)$.

Действительно, $y = y(x) \Leftrightarrow x = x(y)$

Тогда $y'(x) = p(y(x)) \Leftrightarrow y'(x(y)) = p(y)$

II. ДУ II порядка, не содержащие x

Сделаем замену $\boxed{y' = p(y)}$

$$\Rightarrow y'' = p'(y)y' \Rightarrow \; y'' = p'(y)p(y) \Rightarrow$$

$$\boxed{y'' = p'p}$$

Подставляя y, y' в исходное ДУ, получаем

$\boxed{p'p = f_2(y, p)}$ **ДУ I-го порядка относительно $\boldsymbol{p(y)}$**

I. ДУ II порядка, не содержащие x
Задача 2

Задача 2. Решить задачу Коши
$y'' = y, y(0) = 1, y'(0) = 1.$

Решение. Это ДУ II порядка, допускающее понижение порядка, **не содержащее x**.

Сделаем замену

$$\boxed{y' = p(y)} \Rightarrow \boxed{y'' = p'p}$$

Подставляем y, y' в исходное ДУ:

I. ДУ II порядка, не содержащие x
Задача 2

$\boxed{p'p = y}$ **ДУ I порядка относительно $\boldsymbol{p(y)}$**

На время забываем, что x – независимая переменная.

И независимой делаем переменную y.

$$p' = \frac{dp}{dy}$$

$$\frac{dp}{dy} p = y \ (\cdot dy)$$

$$pdp = ydy$$

$$\int pdp = \int ydy$$

I. ДУ II порядка, не содержащие *x*
Задача 2

$$\frac{p^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C_1$$

$$\boxed{\frac{y'^2}{2} = \frac{y^2}{2} + C_1}$$ **I интеграл**

Подставляем НУ:

$$\begin{matrix} y(0) = 1 \\ y'(0) = 1 \end{matrix} \Rightarrow \frac{1^2}{2} = \frac{1^2}{2} + C_1 \Rightarrow C_1 = 0$$

I. ДУ II порядка, не содержащие *x*
Задача 2

$$\frac{y'^2}{2} = \frac{y^2}{2} \; (\cdot 2)$$

$$y'^2 = y^2$$

$$y' = \pm y$$

Учитывая НУ ($y(0) > 0, y'(0) > 0$), имеем:

$$y' = y$$

I. ДУ II порядка, не содержащие *x*
Задача 2

Вспоминаем, что x – независимая переменная.

$$y' = y$$

$$\frac{dy}{dx} = y \quad (\cdot dx)$$

$$dy = ydx \ (: y)$$

$$\frac{dy}{y} = dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

$$\ln|y| = x + \ln C_2$$

I. ДУ II порядка, не содержащие *x*
Задача 2

$$\ln|y| = \ln e^x + \ln C_2$$

$$\ln|y| = \ln\left(e^x \cdot C_2\right)$$

$$|y| = C_2 e^x$$

$$y = \underbrace{\pm C_2}_{C_2} e^x \Rightarrow y = C_2 e^x$$

I. ДУ II порядка, не содержащие *x*
Задача 2

Учитывая НУ $y(0) = 1$, имеем:

$$1 = C_2 e^0 \Rightarrow C_2 = 1 \Rightarrow$$

$\boxed{y = e^x}$ **частное решение**