I. ДУ с разделяющимися переменными

Опр. Дифференциальное уравнение вида

$$\boxed{y' = f_1(x) \cdot f_2(y)}$$

называется ДУ с разделяющимися переменными.

I. ДУ с разделяющимися переменными
Задача 1

Задача 1. Найти решение дифференциального уравнения $y' = 3y^{\frac{2}{3}}$ и изобразить семейство его интегральных кривых.

Решение. Это ДУ с разделяющимися перем.

$$y' = 3y^{\frac{2}{3}}$$

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3} \quad (\cdot dx)$$

$$dy = 3y^{2/3}dx \left(: y^{2/3}\right)$$

$$\frac{dy}{y^{2/3}} = 3dx$$

$$\int \frac{dy}{y^{2/3}} = \int 3dx$$

I. ДУ с разделяющимися переменными

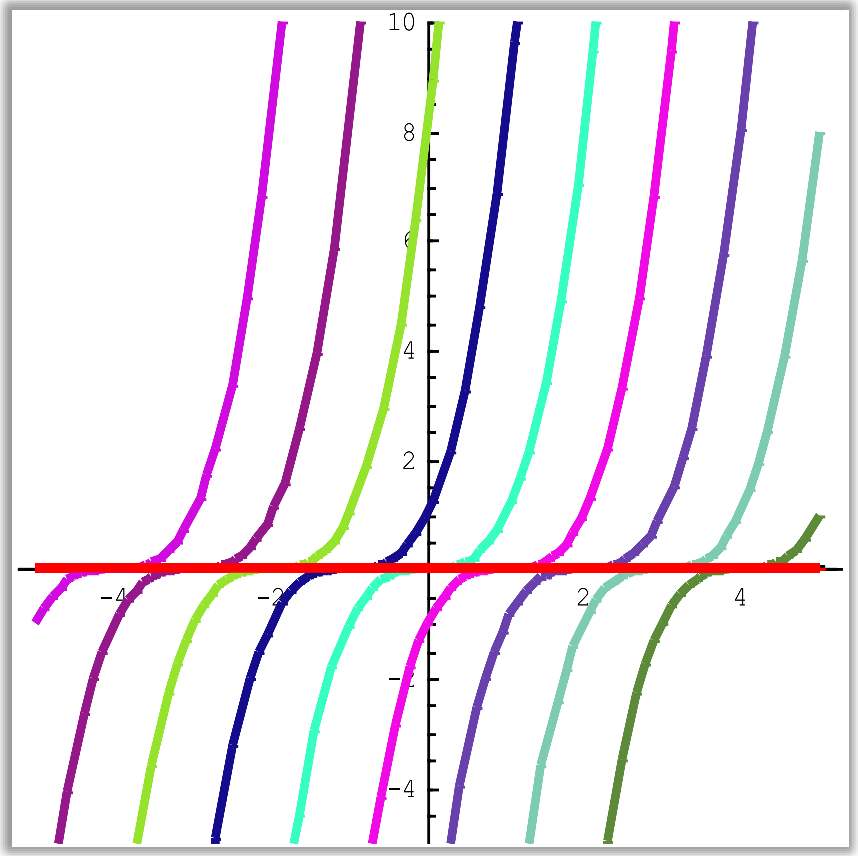
Задача 1

$$\frac{y^{1/3}}{1/3} = 3x + 3C \Rightarrow$$

$$\cancel{3}y^{1/3} = \cancel{3}x + \cancel{3}C$$

$$\boxed{y = (x + C)^3}$$

общее решение



семейство интегральных кривых

I. ДУ с разделяющимися переменными

Задача 1

$$\left.\begin{array}{l} y' = f(x,y) \\ y' = 3y^{\frac{2}{3}} \end{array}\right| \Rightarrow f(x,y) = 3y^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'_y(x,y) = 2\frac{1}{y^{\frac{1}{3}}}$$

т.е в точках, где $y = 0$ не выполняются условия теоремы Коши и поэтому нарушается единственность решения.

Это слайд можно конспектировать по желанию

I. ДУ с разделяющимися переменными
Задача 2

<u>Задача 2.</u> Найти решение дифференциального уравнения $y' = \frac{y}{x}$ и изобразить семейство его интегральных кривых.

<u>Решение.</u> Это ДУ с разделяющимися перем.

$$y' = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}$$

общий интеграл

$$\ln|y| = \ln|x| + C$$

$$\ln|y| = \ln|x| + \ln|C_1|$$

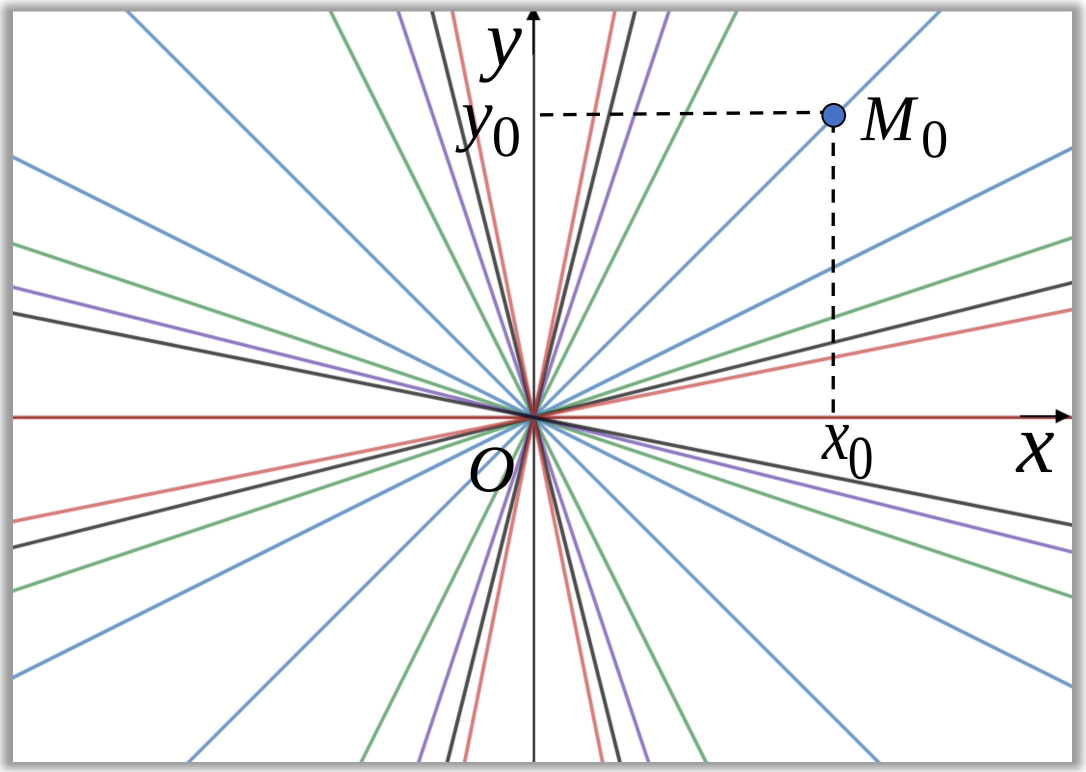
I. ДУ с разделяющимися переменными
Задача 2

$$y = \pm C_1 x$$

C

$$\boxed{y = Cx}$$

общее решение



I. ДУ с разделяющимися переменными
Задача 2

Упр. Объяснить, почему для точки $O(0,0)$ не выполняется условие единственности решения (через нее проходит бесконечно много интегральных кривых).

т.е не выполняются условия теоремы Коши.

Это слайд можно конспектировать по желанию

II. Однородные ДУ.

Опр. Дифференциальное уравнение вида

$$\boxed{y' = f\left(\frac{y}{x}\right)}$$

называется однородным ДУ.

Однородное ДУ сводится к ДУ с разделяющимися переменными заменой

$$u(x) = \frac{y(x)}{x} \Rightarrow \boxed{y = u \cdot x} \Rightarrow \boxed{y' = u'x + u}$$

II. Однородные ДУ. Задача 3

Задача 4. Найти решение задачи Коши

$$y' = \frac{y}{x}\left(\ln\frac{y}{x}+1\right),\ y(1)=1$$

Решение. Это однородное ДУ: правая часть ДУ зависит только от выражения $\frac{y}{x}$.

Найдем общее решение

$$\boxed{y = u\cdot x} \Rightarrow \boxed{y' = u'x+u}$$

$$u'\cdot x+u = u\left(\ln u+1\right) \qquad u'\cdot x+u = u\ln u+u$$

II. Однородные ДУ. Задача 3

$$u' = \frac{u \ln u}{x}$$

$$\frac{du}{u \ln u} = \frac{dx}{x}$$

$$\int \frac{du}{u \ln u} = \int \frac{dx}{x}$$

интеграл в левой части найти самост-но (упр.)

$$\ln\left|\ln u\right| = \ln\left|x\right| + \ln C$$

II. Однородные ДУ. Задача 3

$$\left|\ln u\right| = C\left|x\right|$$

$$\ln u = \pm Cx$$

$$\ln u = Cx$$

$$u = e^{Cx} \qquad y = u \cdot x \;\Rightarrow$$

$$\boxed{y = xe^{Cx}}$$ **общее решение**

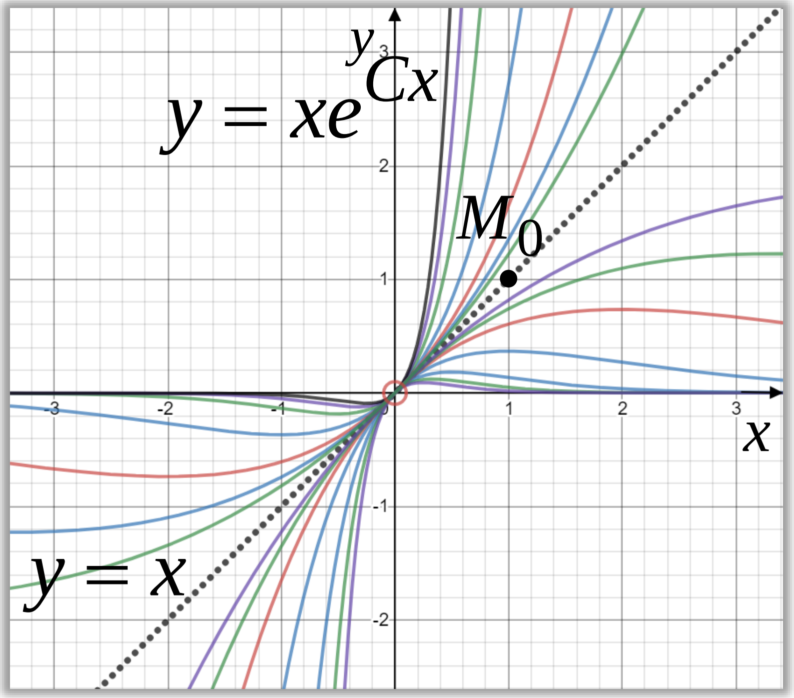
II. Однородные ДУ. Задача 3

Найдем частное решение, удовлетворяющее данным НУ.

$$y(1) = 1 \cdot e^{C \cdot 1} \Rightarrow$$
$$y(1) = 1$$

$$e^{C} = 1 \Rightarrow C = 0 \Rightarrow$$

$$\boxed{y = x}$$ **частное решение**



III. Линейные ДУ

Опр. Дифференциальное уравнение вида

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)}$$

называется линейным ДУ.

Замена: $\boxed{y(x) = u(x)v(x)} \Rightarrow \boxed{y' = u' \cdot v + u \cdot v'}$

функция $u(x)$ *выбирается* так, чтобы упростить ДУ,
функция $v(x)$ *находится* из полученного ДУ

III. Линейные ДУ. Задача 4

<u>Задача 4.</u> Найти общее решение ДУ

$$xy' + y - \sin x = 0$$

<u>Решение.</u>

$$xy' + y - \sin x = 0 \ \ (: x)$$

$$y' + \frac{1}{x} y = \frac{\sin x}{x}$$ - линейное уравнение

$$p(x) - ? \ \ q(x) - ?$$

III. Линейные ДУ. Задача 4

$$\boxed{y = uv} \Rightarrow \boxed{y' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{\sin x}{x}$$

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \frac{\sin x}{x}$$

выносим *v* из тех слагаемых

в ЛЕВОЙ части, где оно есть

III. Линейные ДУ. Задача 4

$$v\underbrace{\left(u'+\frac{1}{x}u\right)}_{0}+uv'=\frac{\sin x}{x}\ (*)$$

$$u'+\frac{1}{x}u=0 \qquad \frac{du}{dx}=-\frac{1}{x}u\,(\cdot dx) \qquad \frac{du}{u}=-\frac{dx}{x}$$

$$u'=-\frac{1}{x}u \qquad du=-\frac{1}{x}udx(:u) \qquad \int\frac{du}{u}=-\int\frac{dx}{x}$$

III. Линейные ДУ. Задача 4

$$\ln u = -\ln x$$

С в первый раз
не прибавляется!

$$\ln u = \ln \frac{1}{x}$$

$$\boxed{u = \frac{1}{x}}$$ подставляем u
в уравнение (*)

$$uv' = \frac{\sin x}{x} \quad (*)$$

$$\frac{1}{x}v' = \frac{\sin x}{x} \quad (\cdot x)$$

$$v' = \sin x$$

$$v = \int \sin x dx$$

III. Линейные ДУ. Задача 4

$$\boxed{v = -\cos x + C}$$

С во второй раз прибавляется!

$$\boxed{y = \frac{1}{x}\left(C - \cos x\right)}$$ **общее решение**

IV. Уравнение Бернулли

Опр. Дифференциальное уравнение вида

$$\boxed{y' + p(x)y = q(x)y^{\alpha},} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

называется **уравнением Бернулли.**

Замена: $\boxed{y(x) = u(x)v(x)} \Rightarrow \boxed{y' = u' \cdot v + u \cdot v'}$

функция $u(x)$ *выбирается* так, чтобы упростить ДУ,
функция $v(x)$ *находится* из полученного ДУ

IV. Уравнение Бернулли. Задача 5

Задача 6. Найти общее решение ДУ

$$xy' + y - x\sqrt{y} = 0$$

Решение.

$$xy' + y = x\sqrt{y} \quad (:x)$$

$$y' + \frac{1}{x}y = \sqrt{y}$$ - уравнение Бернулли

$$p(x) - ? \quad q(x) - ? \quad \alpha - ?$$

IV. Уравнение Бернулли. Задача 5

$$\boxed{y = uv} \Rightarrow \boxed{y' = u' \cdot v + u \cdot v'}$$

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \sqrt{uv} \ (^{**})$$

$$u'v + uv' + \frac{1}{x}uv = \sqrt{uv}$$

выносим v из тех слагаемых

в ЛЕВОЙ части, где оно есть

IV. Уравнение Бернулли. Задача 5

$$\underbrace{v\left(u' + \frac{1}{x}u\right)}_{0} + uv' = \sqrt{uv} \quad (**)$$

$$u' + \frac{1}{x}u = 0$$ Это уравнение решено в задаче 5

$$\boxed{u = \frac{1}{x}}$$ подставляем u в уравнение (**)

IV. Уравнение Бернулли. Задача 5

$$\frac{1}{x}v' = \sqrt{\frac{v}{x}} \quad (^{**}) \quad (\cdot x)$$

$$v' = \sqrt{xv}$$

$$\frac{dv}{dx} = \sqrt{xv} \quad (\cdot dx)$$

$$dv = \sqrt{xv}dx \quad (:\sqrt{v})$$

$$\frac{dv}{\sqrt{v}} = \sqrt{x}dx$$

$$\int \frac{dv}{\sqrt{v}} = \int \sqrt{x}dx$$

$$2\sqrt{v} = \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2C$$

$$\sqrt{v} = \frac{1}{3}\sqrt{x^3} + C$$

$$\boxed{v = \left(\frac{1}{3}\sqrt{x^3} + C\right)^2}$$

$$\boxed{y = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}\sqrt{x^3} + C\right)^2}$$

V. ДУ в полных дифференциалах

Опр. Дифференциальное уравнение вида

$$\boxed{a_x dx + a_y dy = 0,} \quad \boxed{\text{где } \frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y},}$$

называется **уравнением в полных дифференциалах.**

V. ДУ в полных дифференциалах

Поле $\vec{a} = (a_x, a_y)$

является потенциальным $\Bigg| \Rightarrow$

существует потенциал $u(x, y)$:

$du = a_x dx + a_y dy$ $\Bigg| \Rightarrow \boxed{du = 0} \Rightarrow$

$\boxed{u(x, y) = C}$ - общий интеграл

V. ДУ в полных дифференциалах. Задача 6

Задача 6. Найти общее решение ДУ

$$\underbrace{2xy}_{a_x}dx+\Big(\underbrace{x^2+\sin y}_{a_y}\Big)dy=0$$

Решение.

$$\frac{\partial a_y}{\partial x}=\left(x^2+\sin y\right)'_x=2x$$

$$\frac{\partial a_x}{\partial y}=(2xy)'_y=2x$$

$\Rightarrow$ поле $\vec{a}=(a_x,a_y)$ потенциально

V. ДУ в полных дифференциалах. Задача 6

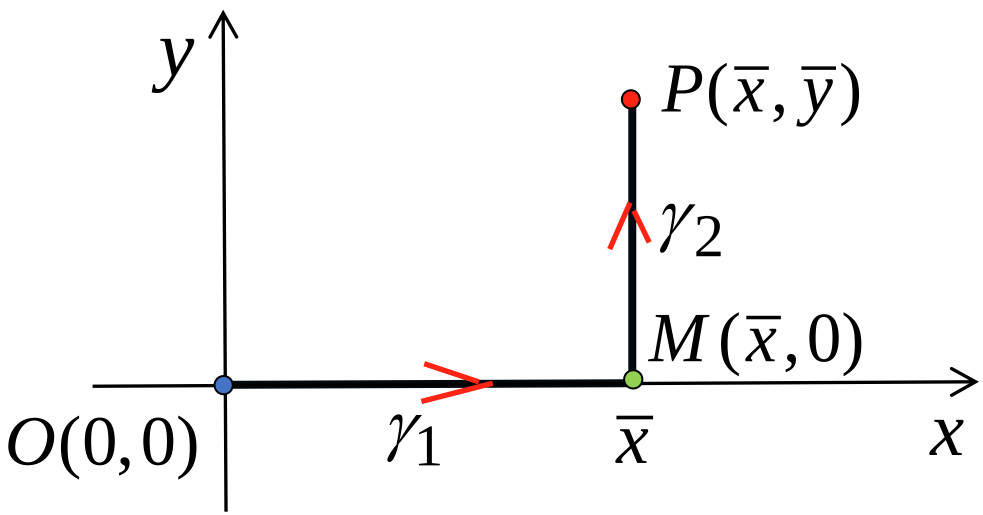
т.е. существует потенциал
$u = u(x, y)$:

$$du = a_x dx + a_y dy = 2xydx + (x^2 + \sin y)dy$$

Найдем потенциал $u = u(x, y)$.

Зафиксируем точку $P(\bar{x}, \bar{y})$. «Проложим» наиболее простой путь от точки $O(0,0)$ до точки $P(\bar{x}, \bar{y})$.

V. ДУ в полных дифференциалах. Задача 6



$$OM:\begin{cases} x=t \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx=dt \\ dy=0 \end{cases} \qquad MP:\begin{cases} x=\bar{x} \\ y=t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx=0 \\ dy=dt \end{cases}$$

$$0\to t\to \bar{x} \qquad\qquad 0\to t\to \bar{y}$$

V. ДУ в полных дифференциалах. Задача 6

$$u(\bar{x},\bar{y}) = \int\limits_{\overset{\cup}{OP}} 2xydx + (x^2+\sin y)dy =$$

$$= \int\limits_{\overset{\cup}{OM}} 2xydx + (x^2+\sin y)dy +$$

$$+ \int\limits_{\overset{\cup}{MP}} 2xydx + (x^2+\sin y)dy$$

V. ДУ в полных дифференциалах. Задача 6

$$=\int_0^{\overline{x}}(2\cdot t\cdot 0dt+t^2\cdot\sin 0\cdot 0)+$$

$$+\int_0^{\overline{y}}\left(2\overline{x}t\cdot 0+\left(\overline{x}^2+\sin t\right)dt\right)=$$

$$=0+\int_0^{\overline{y}}\left(\overline{x}^2+\sin t\right)dt=\int_0^{\overline{y}}\overline{x}^2dt+\int_0^{\overline{y}}\sin tdt=$$

$$=\overline{x}^2\int_0^{\overline{y}}dt+\int_0^{\overline{y}}\sin tdt=\overline{x}^2t\Big|_0^{\overline{y}}+(-\cos t)\Big|_0^{\overline{y}}=$$

V. ДУ в полных дифференциалах. Задача 6

$$= \bar{x}^2\bar{y} + \left(-\cos\bar{y} - (-1)\right) = \bar{x}^2\bar{y} - \cos\bar{y} + 1$$

$$u(\bar{x},\bar{y}) = \bar{x}^2\bar{y} - \cos\bar{y} + 1 \Rightarrow$$

$$u(x,y) = x^2y - \cos y + 1$$

Проверка:

$$du(x,y) = 2xydx + \left(x^2 + \sin y\right)dy -$$ правая часть ДУ

V. ДУ в полных дифференциалах. Задача 6

$$u(x,y) = x^2 y - \cos y + 1 \Rightarrow$$

$\boxed{x^2 y - \cos y + 1 = C}$ - общий интеграл

Или, что тоже самое: $\boxed{x^2 y - \cos y = C}$