# Определение ДУ I-го порядка

Опр. Функциональное **уравнение** вида

(1) $y' = f(x, y)$ или (2) $F(x, y, y') = 0$, которое связывает между собой **независимую переменную** $x$, **искомую функцию** $y$ и **ее производную** $y'$ первого порядка называется дифференциальным уравнением первого порядка (ДУ I-го порядка).

Пример 1. $y' = -k\,y,\ (y')^2 - k^2 y^2 = 0 -$

ДУ I порядка.

# Определение частного решения ДУ I-го порядка

Опр. Решением (частным) уравнения (1) или (2) называется любая функция $y = y(x)$,

$x \in (a, b)$, которая обращает уравнение в тождество (верное равенство для всех

$x \in (a, b)$), т.е.

1) $y'(x) = f(x, y(x))$ или

2) $F(x, y(x), y'(x)) = 0$.

# Определение интегральной кривой

Пример 2.

Функция $y = e^{-kx}$, $x \in (-\infty; +\infty)$

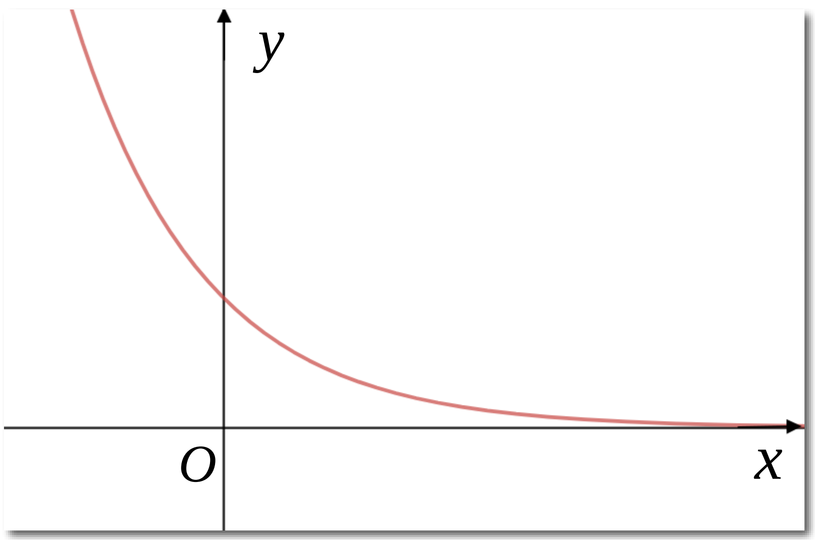
является решением уравнения $y' = -k\,y$:

$$y' = \left(-e^{kx}\right)' = -ke^{kx} = -k\,y.$$

Опр. Интегральной кривой ДУ называется график решения этого ДУ.

# Определение интегральной кривой

<u>Пример 3</u>.




*Интегральная кривая –*

график решения

$$y = e^{-kx}$$

ДУ $y' = -k\,y$

# Определение частного интеграла

Опр. Частное решение $y = y(x)$ в неявном виде $\Phi(x, y) = 0$ называется частным интегралом ДУ.

Пример 4. Уравнение $\ln y = -kx$ является частным интегралом ДУ $y' = -kx$, т.е. решением ДУ $y = e^{-kx}$ в неявном виде.

# **Определение общего решения ДУ I-го порядка**

<u>Опр</u>. Общим решением ДУ (1) $y' = f(x, y)$ или (2) $F(x, y, y') = 0$ называется множество всех частных решений, записанных в виде функции $y = y(x, C)$, в частности,

**для любого** допустимого $\boldsymbol{C}$ функция $\boldsymbol{y = y(x, C)}$ **является решением** ДУ.

# Определение общего решения ДУ I-го порядка

Пример 4. Функция $y = Ce^{-kx}$ является общим решением уравнения $y' = -ky$ для любого $C$:

$$y' = \left(Ce^{-kx}\right)' = C(-k)e^{-kx} = -kCe^{-kx}$$

$$-k\,y = -kCe^{-kx} \Rightarrow$$

$y' = -ky$ - верное тождество

# Определение общего интеграла ДУ I-го порядка

Опр. Общим интегралом ДУ I-го порядка называется общее решение в неявном виде: $\Phi(x, y, C) = 0$.

Пример 5

Уравнение $\ln|y| = -kx + \ln C$

является общим интегралом ДУ $y' = -ky$,

т.е. общим решением ДУ

$y = \pm e^{-kx + \ln C} \Leftrightarrow y = \underbrace{\pm C}_{C} e^{-kx}$ в неявном виде.

# ДУ I-го порядка. Основные понятия

Пример 5. $y' = x$ – ДУ I-го порядка.

Решим его.

$$y' = x$$

$$\frac{dy}{dx} = x \; (\cdot dx)$$

$$dy = xdx$$

$$\int dy = \int xdx$$

$$\boxed{y = \frac{x^2}{2} + C}$$

**общее решение**

# ДУ I-го порядка. Основные понятия

Пример 5. $y' = x$ – ДУ I-го порядка. Решим его.

$$y' = x$$

$$\frac{dy}{dx} = x \ (\cdot dx)$$

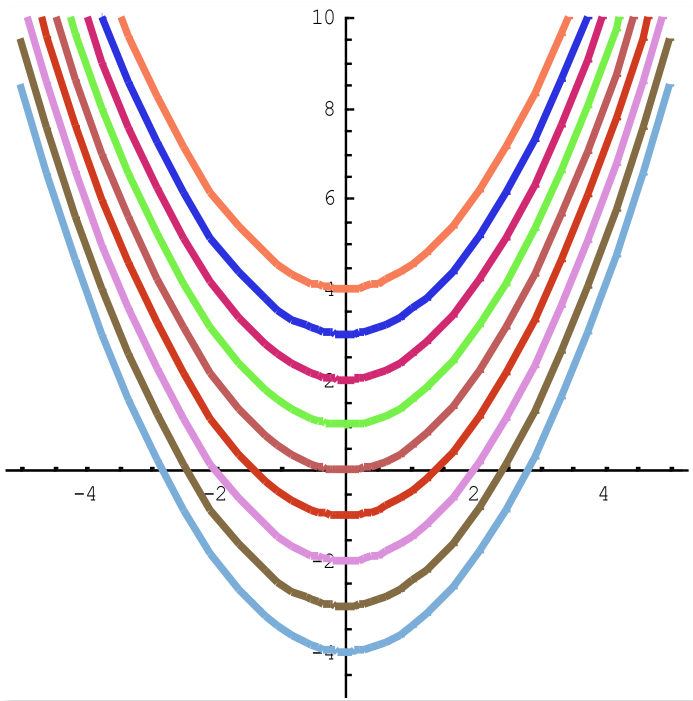
$$dy = xdx$$

$$\int dy = \int xdx$$

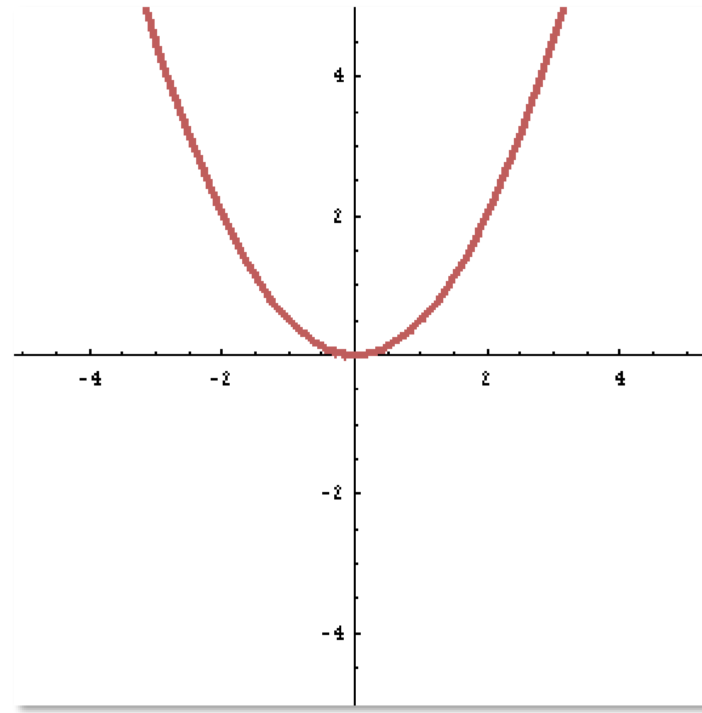
$$\boxed{y = \frac{x^2}{2} + C}$$ **общее решение**

$$\boxed{y = \frac{x^2}{2}}$$ **частное решение при *C*=0**

# ДУ I-го  порядка. Основные понятия




семейство интегральных кривых




интегральная кривая

# Задача Коши ДУ I-го порядка

**Пусть**

1) $y' = f(x, y)$ – ДУ I-го порядка

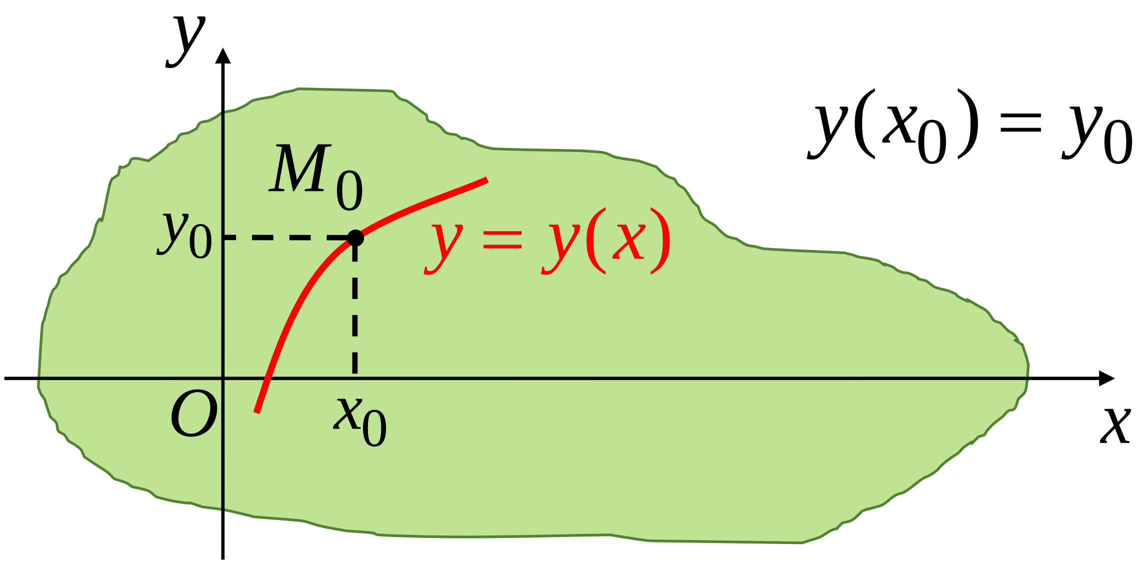
2) $y(x_0) = y_0$ – начальное условие (НУ)

**Найти**

решение ДУ, удовлетворяющее начальному условию (НУ).

# Задача Коши ДУ I-го порядка

**Геометрический смысл:** найти интегральную кривую $y = y(x)$, проходящую через заданную точку $M_0(x_0, y_0)$.




$y(x_0) = y_0$

# Теорема Коши для ДУ I-го порядка

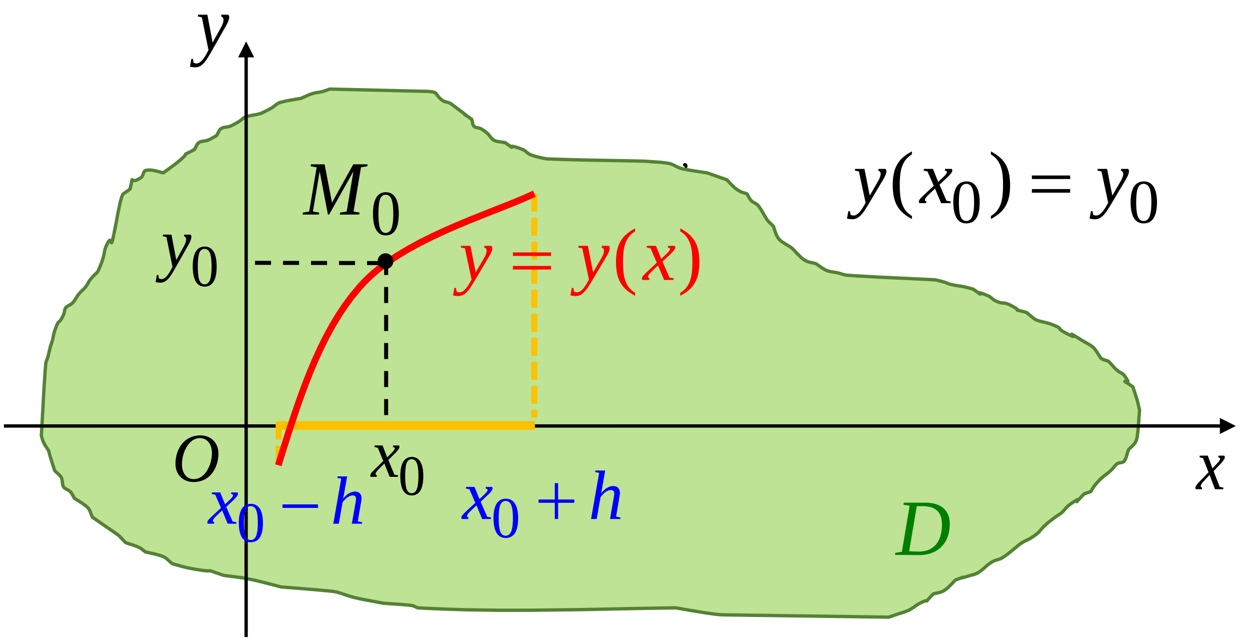
Теорема 1 (теорема Коши существования и единственности решения ДУ I-го порядка).

**Если** для ДУ I–го порядка $y' = f(x, y)$ функция $f(x, y)$ непрерывна вместе со своей частной производной $f'_y(x, y)$ в области $D$,

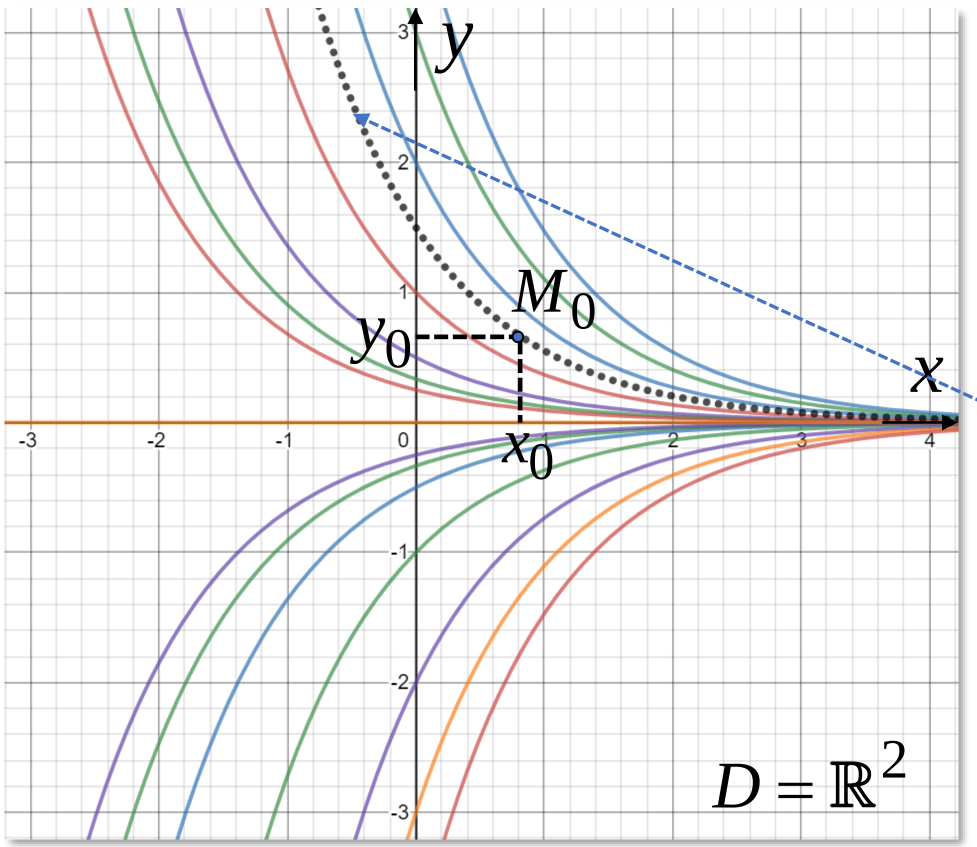
**то** для любой точки $M_0(x_0, y_0) \in D$ на некотором интервале $(x_0 - h, x_0 + h)$ *существует единственное решение* $y = y(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее НУ $y(x_0) = y_0$.

# Геометрический смысл теоремы Коши

Через каждую точку $M_0(x_0, y_0) \in D$ проходит **единственная** интегральная кривая $y = y(x)$, $x \in (x_0 - h, x_0 + h)$.

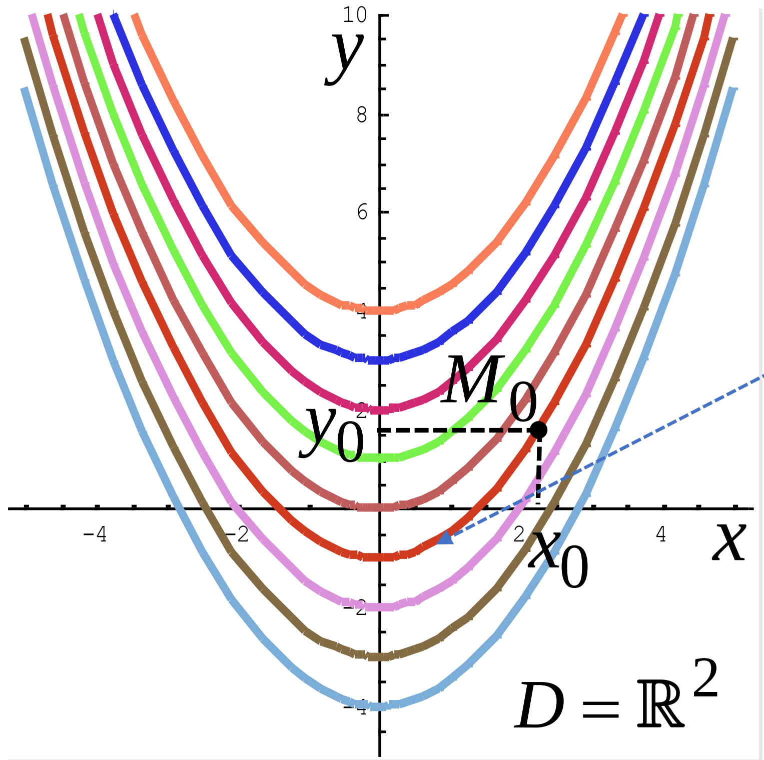


# Геометрический смысл теоремы Коши




интегральная кривая для ДУ $y' = -kx$, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$

# Геометрический смысл теоремы Коши




интегральная кривая для ДУ $y' = x$, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$