Тема: Локальное строение гиперповерхности. Нормальная кривизна

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Дифференциальная геометрия и топология (практика)
для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
III семестр

Задачи в аудитории

С.В.Сизый с.295,№ 1в и № 2, № 4, с.296 № 6а), с. 302 № 2а), с. 303 № 4д), 6, с. 315, №1, 2, с.316 №8 д)

Рекомендуемое домашнее задание

с. 295 № 3, с.296 № 6б), с. 302 № 2б), с. 303 № 4ж), с.316 №8 а)

Матрица основного оператора, полная и средняя кривизна, главные нормальные кривизны и главные направления прямого геликоида

Найти матрицу основного оператора, полную и среднюю кривизну, главные нормальные кривизны и главные направления гиперповерхности $f(u,v) = {}^t(u\cos v, u\sin v, av)$. Убедиться, что главные направления делят пополам углы между ее координатными линиями.

Запишем матрицы первой и второй фундаментальных форм в точке

$$p(u,v)\colon\ [\mathrm{I}_p] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+a^2 \end{pmatrix} \text{ и } [\mathrm{II}_p] = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу основного оператора в точке $p(u,v)$:

$$[\mathrm{L}_p] = [\mathrm{I}_p]^{-1}\cdot[\mathrm{II}_p] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{u^2+a^2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ -\dfrac{a}{(u^2+a^2)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Полная кривизна в точке $p(u,v)$: $K = \det[\mathrm{L}_p] = -\dfrac{a^2}{(u^2+a^2)^2}$. Средняя кривизна в точке $p(u,v)$: $H = \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}[\mathrm{L}_p] = 0$. Характеристическое уравнение для главных нормальных кривизн: $\begin{vmatrix} -k & -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ -\dfrac{a}{(u^2+a^2)^{3/2}} & -k \end{vmatrix} = 0$

или $k^2 - \dfrac{a^2}{(u^2+a^2)^2} = 0$. Главные нормальные нормальные кривизны:
$k_1 = -\dfrac{a}{u^2+a^2}$, $k_2 = \dfrac{a}{u^2+a^2}$.
Уравнения для главных направлений: $([\mathrm{II}_p] - k_{1,2}[\mathrm{I}_p]) \cdot X = O$ или

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} & 0 \end{pmatrix} \pm \frac{a}{u^2+a^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+a^2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} \pm\dfrac{a}{u^2+a^2} & -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} & \pm a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Каждая система из двух уравнений равносильна одному:
$\frac{x_1}{\sqrt{u^2+a^2}} + x_2 = 0$ для k_1 и $\frac{x_1}{\sqrt{u^2+a^2}} - x_2 = 0$ для k_2. Таким образом, для главной нормальной кривизны k_1 получаем главное направление $X_1 = {}^t(\sqrt{u^2+a^2}, -1)$, а для k_2 – главное направление $X_2 = {}^t(\sqrt{u^2+a^2}, 1)$.
Найдем $\langle X_1, X_1 \rangle = (\sqrt{u^2+a^2}, -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{u^2+a^2} \\ -1 \end{pmatrix} =$
$(\sqrt{u^2+a^2}, -u^2-a^2) \cdot {}^t(\sqrt{u^2+a^2}, -1) = 2(u^2+a^2)$. Следовательно, $|X_1| = \sqrt{2(u^2+a^2)}$ и аналогично $|X_2| = \sqrt{2(u^2+a^2)}$.
Пусть $A_1 = {}^t(1,0)$ и $A_2 = {}^t(0,1)$ – касательные векторы к координатным линиям. Вычислим $\langle A_1, A_1 \rangle = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$ и
$\langle A_2, A_2 \rangle = (0,1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u^2+a^2$. Имеем $|A_1| = 1$, $|A_2| = \sqrt{u^2+a^2}$. Вычислим
$\langle A_1, X_1 \rangle = (1,0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{u^2+a^2} \\ -1 \end{pmatrix} = \sqrt{u^2+a^2}$. Тогда
$\cos(\widehat{A_1, X_1}) = \frac{\langle A_1, X_1 \rangle}{|A_1| \cdot |X_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Таким образом, $(\widehat{A_1, X_1}) = \frac{\pi}{4}$. Так как $A_1 \perp A_2$, X_1 делит угол между координатными линиями пополам. Для X_2 доказательство проводится аналогично.

Найти главные направления и главные нормальные кривизны в вершинах эллипсоида $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1.$

Параметризация:
$f(u,v)={}^t(a\cos u\cos v, b\cos u\sin v, c\sin u)$ $(-\pi/2<u<\pi/2,\ -\pi<v<\pi)$.
Вершина $(a,0,0)$ имеет поверхностные координаты $u=0,\ v=0$.
$f_u={}^t(-a\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, c\cos u),\ f_u(0,0)={}^t(0,0,c)$,
$f_v={}^t(-a\cos u\sin v, b\cos u\cos v, 0),\ f_v(0,0)={}^t(0,b,0)$,

$$[\mathrm{I}_o]=\begin{pmatrix} c^2 & 0\\ 0 & b^2\end{pmatrix};\ f_u\times f_v=\begin{vmatrix} 0 & 0 & e_1\\ 0 & b & e_2\\ c & 0 & e_3\end{vmatrix}={}^t(-bc,0,0);$$

$\vec{N}(0,0)=(-1,0,0)$;
$f_{uu}={}^t(-a\cos u\cos v, -b\cos u\sin v, -c\sin u),\ f_{uu}(0,0)={}^t(-a,0,0)$;
$f_{uv}={}^t(a\sin u\sin v, -b\sin u\cos v, 0),\ f_{uv}(0,0)={}^t(0,0,0)$;
$f_{vv}={}^t(-a\cos u\cos v, -b\cos u\sin v, 0),\ f_{vv}(0,0)={}^t(-a,0,0)$;
$h_{11}=\langle f_{uu}(0,0),\vec{N}(0,0)\rangle=a,\ h_{12}=\langle f_{uv}(0,0),\vec{N}(0,0)\rangle=0,$

$$h_{22}=\langle f_{vv}(0,0),\vec{N}(0,0)\rangle=a;\ [\mathrm{II}_o]=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix};$$

$$[\mathsf{L}_o] = [\mathrm{I}_o]^{-1} \cdot [\mathrm{II}_o] = \begin{pmatrix} \frac{a}{c^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{b^2} \end{pmatrix};\ k_1 = \frac{a}{c^2},\ k_2 = \frac{a}{b^2}$$ – главные нормальные кривизны;

${}^t(1, 0)$, ${}^t(0, 1)$ – соответствующие главные направления.

В остальных вершинах главные нормальные кривизны и главные направления находятся аналогично с помощью перепараметризации.

Найти линии кривизны следующих гиперповерхностей:
а) $f(u,v) = {}^t(u\cos v, u\sin v, av)$.

$f_u = {}^t(\cos v, \sin v, 0)$, $f_v = {}^t(-u\sin v, u\cos v, a)$, Матрица первой фундаментальной формы в точке $p(u,v)$: $[\mathrm{I}_p] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+a^2 \end{pmatrix}$.

$f_{uu} = \vec{0}$; $f_{uv} = {}^t(-\sin v, \cos v, 0)$; $f_{vv} = {}^t(-u\cos v, -u\sin v, 0)$;

$$f_u \times f_v = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v & e_1 \\ \sin v & u\cos v & e_2 \\ 0 & a & e_3 \end{vmatrix} = {}^t(a\sin v, -a\cos v, u).$$

$$h_{11} = \frac{\langle f_u \times f_v, f_{uu}\rangle}{\sqrt{g}} = 0;\ h_{12} = h_{21} = \frac{\langle f_u \times f_v, f_{uv}\rangle}{\sqrt{g}} = -\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}};$$

$$h_{22} = \frac{\langle f_u \times f_v, f_{vv}\rangle}{\sqrt{g}} = 0;$$

Запишем матрицу второй фундаментальной формы в точке $p(u,v)$:

$$[\mathrm{II}_p] = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем дифференциальное уравнение для нахождения линий кривизны:
$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0$. В этом случае

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 1 & 0 & u^2+a^2 \\ 0 & -\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0; \ \frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \begin{vmatrix} dv^2 & du^2 \\ 1 & u^2+a^2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(u^2+a^2)dv^2 - du^2 = 0; \ dv = \pm\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}};$$

$v = \pm\int\frac{du}{\sqrt{u^2+a^2}} = \pm\ln(u+\sqrt{u^2+a^2}) + C$ – линии кривизны.

Определить тип точек на поверхности, полученной вращением синусоиды $y = \sin x$ а) вокруг оси Ox.

$\alpha(u) = {}^t(u, \sin u, 0);\ 0 < u < \pi,\ 0 < v < 2\pi;$

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} = {}^t(u, \sin u \cos v, \sin u \sin v);$$

$f_u = {}^t(1, \cos u \cos v, \cos u \sin v),\ f_v = {}^t(0, -\sin u \sin v, \sin u \cos v);$

$g_{11} = 1 + \cos^2 u,\ g_{12} = 0,\ g_{22} = \sin^2 u,\ [\mathrm{I}_p] = \begin{pmatrix} 1+\cos^2 u & 0 \\ 0 & \sin^2 u \end{pmatrix};$

$g = (1+\cos^2 u)\sin^2 u;$

$f_{uu} = {}^t(0, -\sin u \cos v, -\sin u \sin v),\ f_{uv} = {}^t(0, -\cos u \sin v, \cos u \cos v),$

$f_{vv} = {}^t(0, -\sin u \cos v, -\sin u \sin v);$

$$h_{11} = h_{22} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 u}\,\sin u} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos u \cos v & -\sin u \sin v & -\sin u \cos v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v & -\sin u \sin v \end{vmatrix} =$$

$$\frac{\sin u}{\sqrt{1+\cos^2 u}};$$

$$h_{12} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2 u}\sin u}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos u \cos v & -\sin u \sin v & -\cos u \sin v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v & \cos u \cos v \end{vmatrix} = 0;$$

$$[\mathrm{II}_p] = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin u}{\sqrt{1+\cos^2 u}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\sin u}{\sqrt{1+\cos^2 u}} \end{pmatrix};$$

$$[\mathrm{L}_p] = [\mathrm{I}_p]^{-1} \cdot [\mathrm{II}_p] = \begin{pmatrix} \dfrac{\sin u}{(1+\cos^2 u)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{\sin u\sqrt{1+\cos^2 u}} \end{pmatrix};$$

$$k_1 = \frac{\sin u}{(1+\cos^2 u)^{3/2}},\ k_2 = \frac{1}{\sin u\sqrt{1+\cos^2 u}},\ K = \frac{1}{(1+\cos^2 u)^2} > 0.$$

Все точки поверхности эллиптические.

Классифицировать точки на следующей гиперповерхности (второго порядка): д) гиперболический параболоид (седло).

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \ (p, q > 0); \ f(u, v) = {}^t(u, v, \frac{u^2}{2p} - \frac{v^2}{2q});$$

$$f_u = {}^t(1, 0, \frac{u}{p}), \ f_v = {}^t(0, 1, -\frac{v}{q}), \ g_{11} = 1 + \frac{u^2}{p^2}, \ g_{12} = -\frac{uv}{pq}, \ g_{22} = 1 + \frac{v^2}{q^2},$$

$$[\mathrm{I}_p] = \begin{pmatrix} 1 + \dfrac{u^2}{p^2} & -\dfrac{uv}{pq} \\ -\dfrac{uv}{pq} & 1 + \dfrac{v^2}{q^2} \end{pmatrix};$$

$$g = (1 + \frac{u^2}{p^2})(1 + \frac{v^2}{q^2}) - (\frac{uv}{pq})^2 = 1 + \frac{u^2}{p^2} + \frac{v^2}{q^2}; \ \sqrt{g} = \sqrt{1 + \frac{u^2}{p^2} + \frac{v^2}{q^2}};$$

$$f_{uu} = {}^t(0, 0, \frac{1}{p}), \ f_{uv} = {}^t(0, 0, 0) \ f_{vv} = {}^t(0, 0, -\frac{1}{q}),$$

$$h_{11} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \dfrac{u}{p} & \dfrac{v}{q} & \dfrac{1}{p} \end{vmatrix} = \frac{1}{p\sqrt{g}}; \ h_{12} = 0; \ h_{22} = -\frac{1}{q\sqrt{g}};$$

$h = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = -\dfrac{1}{pqg}$, $K = \dfrac{h}{g} < 0$. Все точки гиперболического типа.

Доказать неравенство $H^2 \geq K$ для произвольной гиперповерхности $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ и убедиться, что это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда каждая точка поверхности омбилическая.

Пусть k_1, k_2 – главные нормальные кривизны гиперповерхности f. Тогда $K = k_1 \cdot k_2$, $H = \dfrac{k_1 + k_2}{2}$ и

$$H^2 - K = \frac{k_1^2 + 2k_1k_2 + k_2^2}{4} - k_1k_2 = \frac{k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2}{4} = (\frac{k_1 - k_2}{2})^2 \geq 0,$$

поэтому $H^2 \geq K$.

Если $H^2 = K$, то $(\dfrac{k_1 - k_2}{2})^2 = 0$, откуда $k_1 = k_2$. Это означает, что точка омбилическая.

Вычислить нормальную кривизну гиперповерхности $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^4$ $f(u,v,w) = {}^t(u+v, u-v, v+w, uvw)$ в направлении вектора скорости кривой $\alpha(t) = f(\beta(t))$ в точке $t_0 = 1$, где $\beta(t) = {}^t(2t, -3t, t^2)$ – кривая в области $U \subseteq \mathbb{R}^3$.

$\dot{\beta}(t) = {}^t(2,-3,2t)$, $X = \dot{\beta}(t_0) = {}^t(2,-3,2)$; $p_0 = \beta(t_0) = {}^t(2,-3,1)$;
$K_N(X) = \dfrac{\mathrm{II}_{p_0}(X,X)}{\mathrm{I}_{p_0}(X,X)}$; $f_u = {}^t(1,1,0,vw)$, $f_v = {}^t(1,-1,1,uw)$,
$f_w = {}^t(0,0,-1,uv)$; $f_u(p_0) = {}^t(1,1,0,-3)$, $f_v(p_0) = {}^t(1,-1,1,2)$,
$f_w(p_0) = {}^t(0,0,-1,-6)$; $g_{11}(p_0) = 11$, $g_{12}(p_0) = -6$, $g_{13}(p_0) = 18$,
$g_{22}(p_0) = 7$, $g_{23}(p_0) = -13$, $g_{33}(p_0) = 37$; $[\mathrm{I}_{p_0}] = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 18 \\ -6 & 7 & -13 \\ 18 & -13 & 37 \end{pmatrix}$;

$$\mathrm{I}_{p_0}(X,X) = (2,-3,2) \cdot \begin{pmatrix} 11 & -6 & 18 \\ -6 & 7 & -13 \\ 18 & -13 & 37 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$(76,-53,149) \cdot {}^t(2,-3,2) = 609$;

$$g = \begin{vmatrix} 11 & -6 & 18 \\ -6 & 7 & -13 \\ 18 & -13 & 37 \end{vmatrix} = 198; \ \sqrt{g} = 3\sqrt{22};$$

$$f_{uu} = f_{vv} = f_{ww} = {}^t(0,0,0,0),\ f_{uv} = {}^t(0,0,0,w),\ f_{uw} = {}^t(0,0,0,v),$$
$$f_{vw} = {}^t(0,0,0,u);$$
$$f_{uv}(p_0) = {}^t(0,0,0,1),\ f_{uw}(p_0) = {}^t(0,0,0,-3),\ f_{vw}(p_0) = {}^t(0,0,0,2);$$

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = 0,\ h_{12} = \frac{1}{3\sqrt{22}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3\sqrt{22}};$$

$$h_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -6 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{6}{3\sqrt{22}};$$

$$h_{23} = \frac{1}{3\sqrt{22}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -6 & 2 \end{vmatrix} = \frac{4}{3\sqrt{22}};\ [\mathrm{II}_{p_0}] = \frac{2}{3\sqrt{22}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{II}_{p_0}(X,X) = \frac{2}{3\sqrt{22}}(2,-3,2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$
$$\frac{2}{3\sqrt{22}}(-9,6,-12) \cdot {}^t(2,-3,2) = -\frac{120}{3\sqrt{22}} = -\frac{40}{\sqrt{22}};\ K_N(X) = -\frac{40}{609\sqrt{22}}.$$

Найти кривизну нормального сечения цилиндра $y = x^2/2$ (расположенного в $\mathbb{R}^3$) в точке $A(2,2,4)$ в направлении касательной к линии $y = x^2/2$, $z = x^2$.

Поверхность: $f(u,v) = {}^t(u, u^2/2, v)$;
кривая: $\alpha(t) = {}^t(t, t^2/2, t^2) = f(t, t^2) = f(\beta(t))$, $\beta(t) = {}^t(t, t^2)$; $A = \alpha(2)$,
$\dot\beta(t) = {}^t(1, 2t)$, $\dot\beta(2) = {}^t(1,4)$; $X = {}^t(1,4)$;

$$p_0 = {}^t(2,4);\ f_u = {}^t(1,u,0),\ f_v = {}^t(0,0,1),\ f_u(p_0) = {}^t(1,2,0);\ [\mathrm{I}_{p_0}] = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{I}_{p_0}(X,X) = (1,4)\cdot\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = (5,4)\cdot{}^t(1,4) = 21;$$

$$g = 5,\ \sqrt{g} = \sqrt{5};$$

$$f_{uu} = {}^t(0,1,0),\ f_{uv} = f_{vv} = {}^t(0,0,0);\ h_{11} = \frac{1}{\sqrt5}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt5};$$

$$h_{12} = h_{22} = 0;\ [\mathrm{II}_{p_0}] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{II}_{p_0}(X,X) = (1,4)\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt5} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = (-\tfrac{1}{\sqrt5}, 0)\cdot{}^t(1,4) = -\frac{1}{\sqrt5};$$

$$K_N(X) = \frac{\mathrm{II}_{p_0}(X,X)}{\mathrm{I}_{p_0}(X,X)} = -\frac{1}{21\sqrt5}.$$

Найти асимптотические линии поверхности $z = xy^2$.

$$f(u,v) = {}^t(u, v, uv^2);\ f_u = {}^t(1, 0, v^2),\ f_v = {}^t(0, 1, 2uv);$$

$$f_u \times f_v = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e_1 \\ 0 & 1 & e_2 \\ v^2 & 2uv & e_3 \end{vmatrix} = {}^t(-v^2, -2uv, 1),\ |f_u \times f_v| = \sqrt{v^4 + 4u^2v^2 + 1},$$

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{v^4 + 4u^2v^2 + 1}}\,{}^t(-v^2, -2uv, 1);$$

$$f_{uu} = {}^t(0, 0, 0),\ f_{uv} = {}^t(0, 0, 2v),\ f_{vv} = {}^t(0, 0, 2u);$$

$$h_{11} = \langle f_{uu}, \vec{N} \rangle = 0,\ h_{12} = \langle f_{uv}, \vec{N} \rangle = \frac{2v}{\sqrt{v^4 + 4u^2v^2 + 1}},$$

$$h_{22} = \langle f_{vv}, \vec{N} \rangle = \frac{2u}{\sqrt{v^4 + 4u^2v^2 + 1}};$$

$$h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2 = 0,\ \frac{4vdudv}{\sqrt{v^4 + 4u^2v^2 + 1}} + \frac{2udv^2}{\sqrt{v^4 + 4u^2v^2 + 1}} = 0,$$

$$dv(2vdu + udv) = 0;$$

$dv = 0,\ v = c,\ \alpha(u) = {}^t(u, c, uc^2)$ – прямая;

$$2vdu + udv = 0,\ \frac{dv}{v} = -2\frac{du}{u},\ \ln v = -2\ln u + C,\ v = \frac{c}{u^2},$$

$$\beta(u) = {}^t(u, \frac{c}{u^2}, \frac{c^2}{u^3}).$$