Тема: Объем поверхности. Нормальное гауссово поле. Вторая фундаментальная форма

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Дифференциальная геометрия и топология (практика)
для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
III семестр

Задачи в аудитории

С.В.Сизый с.252 №1, с. 253 № 3, с.273 № 1 б), с.283 № 1 а), б), е), с.295 № 1 а), г), ж)

Рекомендуемое домашнее задание

с. 253 № 2, 273 № 2, с.283 № 1 г), и), 2, с.295 № 1 е), з)

Найти объем области $U : -\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, $-\pi < v < \pi$, $0 < w < 5$ на цилиндре

$$f(u,v,w) = {}^t(R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u, w).$$

$$V = \int_U \sqrt{g(u,v,w)}dudvdw.$$

$f_u = {}^t(-R\sin u\cos v, -R\sin u\sin v, R\cos u, 0)$,
$f_v = {}^t(-R\cos u\sin v, R\cos u\cos v, 0, 0)$; $f_w = {}^t(0,0,0,1)$;
$g_{11} = R^2$, $g_{12} = 0$, $g_{13} = 0$, $g_{22} = R^2\cos^2 u$, $g_{23} = 0$, $g_{33} = 1$;

$$[\mathrm{I}_p] = \begin{pmatrix} R^2 & 0 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2 u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$g(p) = \det([\mathrm{I}_p]) = R^4\cos^2 u$,

$$V = \int_U \sqrt{g(u,v,w)}dudvdw = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^2\cos u du \int_{-\pi}^{\pi} dv \int_0^5 dw =$$

$$R^2 \sin u\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cdot 2\pi \cdot 5 = 20\pi R^2.$$

Найти объем поверхности трехмерной сферы в пространстве $\mathbb{R}^4$:

$$f(u,v,w) = {}^t(R\cos u\cos v\cos w, R\cos u\sin v\cos w, R\sin u\cos w, R\sin w).$$

$U: -\dfrac{\pi}{2} < u, w < \dfrac{\pi}{2}, \ -\pi < v < \pi.$

$f_u = {}^t(-R\sin u\cos v\cos w, -R\sin u\sin v\cos w, R\cos u\cos w, 0),$

$f_v = {}^t(-R\cos u\sin v\cos w, R\cos u\cos v\cos w, 0, 0),$

$f_w = {}^t(-R\cos u\cos v\sin w, -R\cos u\sin v\sin w, -R\sin u\sin w, R\cos w);$

$p(u,v,w),$

$g_{11}(p) = \langle f_u, f_u\rangle =$

$R^2\sin^2 u\cos^2 v\cos^2 w + R^2\sin^2 u\sin^2 v\cos^2 w + R^2\cos^2 u\cos^2 w = R^2\cos^2 w,$

$g_{12}(p) = g_{21}(p) = \langle f_u, f_v\rangle =$

$R^2\sin u\cos v\cos u\sin v\cos^2 w - R^2\sin u\sin v\cos u\cos v\cos^2 w = 0,$

$g_{22}(p) = \langle f_v, f_v\rangle = R^2\cos^2 u\sin^2 v\cos^2 w + R^2\cos^2 u\cos^2 v\cos^2 w =$

$R^2\cos^2 u\cos^2 w,$

$g_{13}(p) = g_{31}(p) = \langle f_u, f_w\rangle = R^2\sin u\cos^2 v\cos w\cos u\sin w +$

$R^2\sin u\sin^2 v\cos w\cos u\sin w - R^2\cos u\cos w\sin u\sin w = 0,$

$g_{23}(p) = g_{32}(p) = \langle f_v, f_w\rangle =$

$R^2\cos^2 u\sin v\cos w\cos v\sin w - R^2\cos^2 u\cos v\cos w\sin v\sin w = 0,$

$g_{33}(p) = \langle f_w, f_w\rangle = R^2\cos^2 u\cos^2 v\sin^2 w + R^2\cos^2 u\sin^2 v\sin^2 w +$

$R^2\sin^2 u\sin^2 w + R^2\cos^2 w = R^2;$

$$[\mathrm{I}_p] = \begin{pmatrix} R^2\cos^2 w & 0 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2 u\cos^2 w & 0 \\ 0 & 0 & R^2 \end{pmatrix};$$

$$g = R^6\cos^2 u\cos^4 w;\ \sqrt{g} = R^3\cos u\cos^2 w;$$

$$V = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} du \int_{-\pi}^{\pi} dv \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^3\cos u\cos^2 w dw =$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R^3\cos u du \int_{-\pi}^{\pi} dv \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 w dw = R^3\cdot 2\cdot 2\pi \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2w}{2} dw =$$

$$2\pi R^3\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} dw + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 2w dw\right) = 2\pi^2 R^3.$$

Найти нормальное гауссово поле вдоль заданной гиперповерхности, после чего найти матрицу дифференциала нормального отображения:

$$f(u,v,w) = {}^t(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u, w).$$

$f_u = {}^t(-\sin u\cos v, -\sin u\sin v, \cos u, 0)$, $f_v = {}^t(-\cos u\sin v, \cos u\cos v, 0, 0)$;
$f_w = {}^t(0,0,0,1)$

$$f_u \times f_v \times f_w = \begin{vmatrix} -\sin u\cos v & -\cos u\sin v & 0 & e_1 \\ -\sin u\sin v & \cos u\cos v & 0 & e_2 \\ \cos u & 0 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 & e_4 \end{vmatrix} =$$

$$-\begin{vmatrix} -\sin u\cos v & -\cos u\sin v & e_1 \\ -\sin u\sin v & \cos u\cos v & e_2 \\ \cos u & 0 & e_3 \end{vmatrix} =$$

${}^t(\cos^2 u\cos v, \cos^2 u\sin v, \sin u\cos u, 0)$;

$|f_u \times f_v \times f_w| = \cos u\sqrt{\cos^2 u\cos^2 v + \cos^2 u\sin^2 v + \sin^2 u} = \cos u$;

$\vec{N}(u,v,w) = {}^t(\cos u\cos v, \cos u\sin v, \sin u, 0)$;

$$[d\vec{N}_p] = \begin{pmatrix} -\sin u\cos v & -\cos u\sin v & 0 \\ -\sin u\sin v & \cos u\cos v & 0 \\ \cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти вторую фундаментальную форму следующих гиперповерхностей:
а) $f(u,v) = {}^t(R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)$.

$$f_u = {}^t(-R\sin u\cos v, -R\sin u\sin v, R\cos u),$$
$$f_v = {}^t(-R\cos u\sin v, R\cos u\cos v, 0);$$
$$f_{uu} = {}^t(-R\cos u\cos v, -R\cos u\sin v, -R\sin u),$$
$$f_{uv} = {}^t(R\sin u\sin v, -R\sin u\cos v, 0),$$
$$f_{vv} = {}^t(-R\cos u\cos v, -R\cos u\sin v, 0);$$
$$f_u \times f_v = \begin{vmatrix} -R\sin u\cos v & -R\cos u\sin v & e_1 \\ -R\sin u\sin v & R\cos u\cos v & e_2 \\ R\cos u & 0 & e_3 \end{vmatrix} =$$
$$R^2\,{}^t(-\cos^2 u\cos v, -\cos^2 u\sin v, -\sin u\cos u),$$
$$|f_u \times f_v| = R^2\cos u,\ \vec{N}(u,v) = {}^t(-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, -\sin u);$$
$$h_{11} = \langle f_{uu}, \vec{N}\rangle = R\cos^2 u\cos^2 v + R\cos^2 u\sin^2 v + R\sin^2 u = R;$$
$$h_{12} = \langle f_{uv}, \vec{N}\rangle = -R\sin u\sin v\cos u\cos v + R\sin u\cos v\cos u\sin v = 0;$$
$$h_{22} = \langle f_{vv}, \vec{N}\rangle = R\cos^2 u\cos^2 v + R\cos^2 u\sin^2 v = R\cos^2 u;$$
$$[\mathrm{II}_p] = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R\cos^2 u \end{pmatrix}.$$

Найти вторую фундаментальную форму гиперповерхности $f(u,v) = {}^t(u\cos v, u\sin v, av)$.

Вспомним, что $f_u = {}^t(\cos v, \sin v, 0)$; $f_v = {}^t(-u\sin v, u\cos v, a)$;

$$f_u \times f_v = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v & e_1 \\ \sin v & u\cos v & e_2 \\ 0 & a & e_3 \end{vmatrix} = {}^t(a\sin v, -a\cos v, u);$$

$|f_u \times f_v| = \sqrt{g} = \sqrt{a^2 + u^2}$.

Вычислим $f_{uu} = \vec{0}$; $f_{uv} = {}^t(-\sin v, \cos v, 0)$; $f_{vv} = {}^t(-u\cos v, -u\sin v, 0)$.

Найдем $h_{11} = \dfrac{\langle f_u \times f_v, f_{uu}\rangle}{\sqrt{g}} = 0$; $h_{12} = h_{21} = \dfrac{\langle f_u \times f_v, f_{uv}\rangle}{\sqrt{g}} = -\dfrac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}}$;

$h_{22} = \dfrac{\langle f_u \times f_v, f_{vv}\rangle}{\sqrt{g}} = 0$.

Запишем матрицу второй фундаментальной формы в точке $p(u,v)$:

$$[\mathrm{II}_p] = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти вторую фундаментальную форму следующих гиперповерхностей:
e) $z = \varphi(x, y)$.

$f(x,y) = {}^t(x, y, \varphi(x,y))$, $f_x(x,y) = {}^t(1, 0, \dot{\varphi}_x(x,y))$, $f_y(x,y) = {}^t(0, 1, \dot{\varphi}_y(x,y))$,
$f_{xx}(x,y) = {}^t(0, 0, \ddot{\varphi}_{xx}(x,y))$, $f_{xy}(x,y) = {}^t(0, 0, \ddot{\varphi}_{xy}(x,y))$,
$f_{yy}(x,y) = {}^t(0, 0, \ddot{\varphi}_{yy}(x,y))$,

$$f_x \times f_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e_1 \\ 0 & 1 & e_2 \\ \dot{\varphi}_x & \dot{\varphi}_y & e_3 \end{vmatrix} = {}^t(-\dot{\varphi}_x, -\dot{\varphi}_y, 1); \ |f_x \times f_y| = \sqrt{\dot{\varphi}_x^2 + \dot{\varphi}_y^2 + 1};$$

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{\dot{\varphi}_x^2 + \dot{\varphi}_y^2 + 1}} {}^t(-\dot{\varphi}_x, -\dot{\varphi}_y, 1);$$

$$h_{11} = \langle f_{xx}, \vec{N} \rangle = \frac{\ddot{\varphi}_{xx}}{\sqrt{\dot{\varphi}_x^2 + \dot{\varphi}_y^2 + 1}}; \ h_{12} = \langle f_{xy}, \vec{N} \rangle = \frac{\ddot{\varphi}_{xy}}{\sqrt{\dot{\varphi}_x^2 + \dot{\varphi}_y^2 + 1}};$$

$$h_{22} = \langle f_{yy}, \vec{N} \rangle = \frac{\ddot{\varphi}_{yy}}{\sqrt{\dot{\varphi}_x^2 + \dot{\varphi}_y^2 + 1}};$$

$$[\mathrm{II}_p] = \frac{1}{\sqrt{\dot{\varphi}_x^2 + \dot{\varphi}_y^2 + 1}} \begin{pmatrix} \ddot{\varphi}_{xx} & \ddot{\varphi}_{xy} \\ \ddot{\varphi}_{xy} & \ddot{\varphi}_{yy} \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу основного оператора, полную и среднюю кривизны в произвольной точке следующих гиперповерхностей:
а) $f(u,v) = {}^t(R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)$.

$[\mathrm{L}_p] = [\mathrm{I}_p]^{-1}[\mathrm{II}_p]$;

$[\mathrm{I}_p] = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2 u \end{pmatrix}$; $[\mathrm{II}_p] = \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R\cos^2 u \end{pmatrix}$;

$[\mathrm{L}_p] = \begin{pmatrix} R^{-2} & 0 \\ 0 & R^{-2}\cos^{-2} u \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R & 0 \\ 0 & R\cos^2 u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R^{-1} & 0 \\ 0 & R^{-1} \end{pmatrix}$;

Все направления – главные; $K = R^{-2}$, $H = R^{-1}$.

Найти матрицу основного оператора, полную и среднюю кривизны в произвольной точке следующих гиперповерхностей:
г) $f(u,v) = {}^t(u\cos v, u\sin v, u^2)$.

$f_u = {}^t(\cos v, \sin v, 2u)$, $f_v = {}^t(-u\sin v, u\cos v, 0)$,
$g_{11} = 1+4u^2$, $g_{12} = 0$, $g_{22} = u^2$,
$[\mathrm{I}_p] = \begin{pmatrix} 1+4u^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}$; $[\mathrm{II}_p] = \dfrac{2}{\sqrt{4u^2+1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}$;
$[\mathrm{L}_p] = \begin{pmatrix} 1+4u^2 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \dfrac{2}{\sqrt{4u^2+1}} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix} =$
$\begin{pmatrix} \dfrac{2}{(4u^2+1)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{2}{\sqrt{4u^2+1}} \end{pmatrix}$;
$K = \dfrac{4}{(4u^2+1)^2}$;
$H = \dfrac{1}{(4u^2+1)^{3/2}} + \dfrac{1}{\sqrt{4u^2+1}}$.

Найти матрицу основного оператора, полную и среднюю кривизны в произвольной точке следующих гиперповерхностей:
ж) $z=\varphi(x,y)$.

$f(x,y)={}^t(x,y,\varphi(x,y))$, $f_x(x,y)={}^t(1,0,\dot\varphi_x(x,y))$, $f_y(x,y)={}^t(0,1,\dot\varphi_y(x,y))$,
$g_{11}=1+\dot\varphi_x^2$, $g_{12}=\dot\varphi_x\dot\varphi_y$, $g_{22}=1+\dot\varphi_y^2$,

$$[\mathrm{I}_p]=\begin{pmatrix}1+\dot\varphi_x^2 & \dot\varphi_x\dot\varphi_y\\ \dot\varphi_x\dot\varphi_y & 1+\dot\varphi_y^2\end{pmatrix};\ [\mathrm{II}_p]=\frac{1}{\sqrt{\dot\varphi_x^2+\dot\varphi_y^2+1}}\begin{pmatrix}\ddot\varphi_{xx} & \ddot\varphi_{xy}\\ \ddot\varphi_{xy} & \ddot\varphi_{yy}\end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix}1+\dot\varphi_x^2 & \dot\varphi_x\dot\varphi_y\\ \dot\varphi_x\dot\varphi_y & 1+\dot\varphi_y^2\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{1+\dot\varphi_x^2+\dot\varphi_y^2}\begin{pmatrix}1+\dot\varphi_y^2 & -\dot\varphi_x\dot\varphi_y\\ -\dot\varphi_x\dot\varphi_y & 1+\dot\varphi_x^2\end{pmatrix};$$

$$[\mathrm{L}_p]=\frac{1}{1+\dot\varphi_x^2+\dot\varphi_y^2}\begin{pmatrix}1+\dot\varphi_y^2 & -\dot\varphi_x\dot\varphi_y\\ -\dot\varphi_x\dot\varphi_y & 1+\dot\varphi_x^2\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt{\dot\varphi_x^2+\dot\varphi_y^2+1}}\begin{pmatrix}\ddot\varphi_{xx} & \ddot\varphi_{xy}\\ \ddot\varphi_{xy} & \ddot\varphi_{yy}\end{pmatrix}=$$

$$\frac{1}{(1+\dot\varphi_x^2+\dot\varphi_y^2)^{\frac{3}{2}}}\begin{pmatrix}(1+\dot\varphi_y^2)\ddot\varphi_{xx}-\dot\varphi_x\dot\varphi_y\ddot\varphi_{xy} & (1+\dot\varphi_y^2)\ddot\varphi_{xy}-\dot\varphi_x\dot\varphi_y\ddot\varphi_{yy}\\ -\dot\varphi_x\dot\varphi_y\ddot\varphi_{xx}+(1+\dot\varphi_x^2)\ddot\varphi_{xy} & -\dot\varphi_x\dot\varphi_y\ddot\varphi_{xy}+(1+\dot\varphi_x^2)\ddot\varphi_{yy}\end{pmatrix};$$

$$K=\frac{\det(h_{ij})}{\det(g_{ij})}=\frac{\ddot\varphi_{xx}\ddot\varphi_{yy}-\ddot\varphi_{xy}^2}{(1+\dot\varphi_x^2+\dot\varphi_y^2)^2};$$

$$H=\frac{1}{2(1+\dot\varphi_x^2+\dot\varphi_y^2)^{\frac{3}{2}}}((1+\dot\varphi_y^2)\ddot\varphi_{xx}-2\dot\varphi_x\dot\varphi_y\ddot\varphi_{xy}+(1+\dot\varphi_x^2)\ddot\varphi_{yy}).$$