

# Тема: Вторая фундаментальная форма гиперповерхности. Локальное строение гиперповерхности. Нормальная кривизна

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет  
Институт естественных наук и математики  
Департамент математики, механики и компьютерных наук  
Дифференциальная геометрия и топология (практика)  
для направлений  
Механика и математическое моделирование и  
Прикладная математика  
III семестр

11.12.2023

### Задачи в аудитории

С.В.Сизый с.273 №16, с.283 16, с.295 № 1в и № 2, № 4, с.296 № 6а), с. 302 № 2а), с. 303 № 4д), 6, с. 315, №1, 2, с.316 №8 д)

### Рекомендуемое домашнее задание

К 18 декабря подготовить оставшиеся части ДКР и ДЗ.

Найти нормальное гауссово поле вдоль заданной гиперповерхности, после чего найти матрицу дифференциала нормального отображения:

$$f(u, v, w) = {}^t(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u, w).$$

$$f_u = {}^t(-\sin u \cos v, -\sin u \sin v, \cos u, 0), \quad f_v = {}^t(-\cos u \sin v, \cos u \cos v, 0, 0);$$

$$f_w = {}^t(0, 0, 0, 1)$$

$$f_u \times f_v \times f_w = \begin{vmatrix} -\sin u \cos v & -\cos u \sin v & 0 & e_1 \\ -\sin u \sin v & \cos u \cos v & 0 & e_2 \\ \cos u & 0 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 & e_4 \end{vmatrix} = -$$

$$\begin{vmatrix} -\sin u \cos v & -\cos u \sin v & e_1 \\ -\sin u \sin v & \cos u \cos v & e_2 \\ \cos u & 0 & e_3 \end{vmatrix} = {}^t(\cos^2 u \cos v, \cos^2 u \sin v, \sin u \cos u, 0);$$

$$|f_u \times f_v \times f_w| = \cos u \sqrt{\cos^2 u \cos^2 v + \cos^2 u \sin^2 v + \sin^2 u} = \cos u;$$

$$\vec{N}(u, v, w) = {}^t(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u, 0);$$

$$[d\vec{N}_p] = \begin{pmatrix} -\sin u \cos v & -\cos u \sin v & 0 \\ -\sin u \sin v & \cos u \cos v & 0 \\ \cos u & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти вторую фундаментальную форму гиперповерхности

$$f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, av).$$

$f_u = {}^t(\cos v, \sin v, 0)$ ;  $f_v = {}^t(-u \sin v, u \cos v, a)$ ; Матрица 1-й

фундаментальной формы в точке  $p(u, v)$ :  $[I_p] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{pmatrix}$

$$f_u \times f_v = \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v & e_1 \\ \sin v & u \cos v & e_2 \\ 0 & a & e_3 \end{vmatrix} = {}^t(a \sin v, -a \cos v, u);$$

$$|f_u \times f_v| = \sqrt{g} = \sqrt{a^2 + u^2}.$$

Вычислим  $f_{uu} = \vec{0}$ ;  $f_{uv} = {}^t(-\sin v, \cos v, 0)$ ;  $f_{vv} = {}^t(-u \cos v, -u \sin v, 0)$ .

Найдем  $h_{11} = \frac{\langle f_u \times f_v, f_{uu} \rangle}{\sqrt{g}} = 0$ ;  $h_{12} = h_{21} = \frac{\langle f_u \times f_v, f_{uv} \rangle}{\sqrt{g}} = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}}$ ;

$$h_{22} = \frac{\langle f_u \times f_v, f_{vv} \rangle}{\sqrt{g}} = 0.$$

Запишем матрицу второй фундаментальной формы в точке  $p(u, v)$ :

$$[II_p] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Найти матрицу основного оператора, полную и среднюю кривизну, главные нормальные кривизны и главные направления гиперповерхности  $f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, av)$ . Убедиться, что главные направления делят пополам углы между ее координатными линиями.

Запишем матрицы первой и второй фундаментальных форм в точке

$$p(u, v): [I_p] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{pmatrix} \text{ и } [II_p] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислим матрицу основного оператора в точке  $p(u, v)$ :

$$[L_p] = [I_p]^{-1} \cdot [II_p] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{u^2 + a^2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \\ -\frac{a}{(u^2 + a^2)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Полная кривизна в точке  $p(u, v)$ :  $K = \det[L_p] = -\frac{a^2}{(u^2 + a^2)^2}$ . Средняя кривизна в точке  $p(u, v)$ :  $H = \frac{1}{2} \operatorname{tr}[L_p] = 0$ . Характеристическое уравнение

для главных нормальных кривизн: 
$$\begin{vmatrix} -k & -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \\ -\frac{a}{(u^2 + a^2)^{3/2}} & -k \end{vmatrix} = 0$$

или  $k^2 - \frac{a^2}{(u^2 + a^2)^2} = 0$ . Главные нормальные кривизны:

$$k_1 = -\frac{a}{u^2 + a^2}, \quad k_2 = \frac{a}{u^2 + a^2}.$$

Уравнения для главных направлений:  $([II_p] - k_{1,2}[I_p]) \cdot X = 0$  или

$$\left( \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & 0 \end{pmatrix} \pm \frac{a}{u^2 + a^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{pmatrix} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} \pm \frac{a}{u^2 + a^2} & -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & \pm a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Каждая система из двух уравнений равносильна одному:

$\frac{x_1}{\sqrt{u^2 + a^2}} + x_2 = 0$  для  $k_1$  и  $\frac{x_1}{\sqrt{u^2 + a^2}} - x_2 = 0$  для  $k_2$ . Таким образом, для главной нормальной кривизны  $k_1$  получаем главное направление  $X_1 = {}^t(\sqrt{u^2 + a^2}, -1)$ , а для  $k_2$  – главное направление  $X_2 = {}^t(\sqrt{u^2 + a^2}, 1)$ .

Найдем  $\langle X_1, X_1 \rangle = (\sqrt{u^2 + a^2}, -1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{u^2 + a^2} \\ -1 \end{pmatrix} = (\sqrt{u^2 + a^2}, -u^2 - a^2) \cdot {}^t(\sqrt{u^2 + a^2}, -1) = 2(u^2 + a^2)$ . Следовательно,  $|X_1| = \sqrt{2(u^2 + a^2)}$  и аналогично  $|X_2| = \sqrt{2(u^2 + a^2)}$ .

Пусть  $A_1 = {}^t(1, 0)$  и  $A_2 = {}^t(0, 1)$  – касательные векторы к координатным линиям. Вычислим  $\langle A_1, A_1 \rangle = (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$  и

$\langle A_2, A_2 \rangle = (0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = u^2 + a^2$ . Имеем  $|A_1| = 1$ ,  $|A_2| = \sqrt{u^2 + a^2}$ . Вычислим

$\langle A_1, X_1 \rangle = (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sqrt{u^2 + a^2} \\ -1 \end{pmatrix} = \sqrt{u^2 + a^2}$ . Тогда

$\cos(\widehat{A_1, X_1}) = \frac{\langle A_1, X_1 \rangle}{|A_1| \cdot |X_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ . Таким образом,  $(\widehat{A_1, X_1}) = \frac{\pi}{4}$ . Так как

$A_1 \perp A_2$ ,  $X_1$  делит угол между координатными линиями пополам. Для  $X_2$  доказательство проводится аналогично.

Найти главные направления и главные нормальные кривизны в вершинах эллипсоида  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ .

Параметризация:

$$f(u, v) = {}^t(a \cos u \cos v, b \cos u \sin v, c \sin u) \quad (-\pi/2 < u < \pi/2, -\pi < v < \pi).$$

Вершина  $(a, 0, 0)$  имеет поверхностные координаты  $u = 0, v = 0$ .

$$f_u = {}^t(-a \sin u \cos v, -b \sin u \sin v, c \cos u), \quad f_u(0, 0) = {}^t(0, 0, c),$$

$$f_v = {}^t(-a \cos u \sin v, b \cos u \cos v, 0), \quad f_v(0, 0) = {}^t(0, b, 0),$$

$$[I_o] = \begin{pmatrix} c^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}; \quad f_u \times f_v = \begin{vmatrix} 0 & 0 & e_1 \\ 0 & b & e_2 \\ c & 0 & e_3 \end{vmatrix} = {}^t(-bc, 0, 0);$$

$$\vec{N}(0, 0) = (-1, 0, 0);$$

$$f_{uu} = {}^t(-a \cos u \cos v, -b \cos u \sin v, -c \sin u), \quad f_{uu}(0, 0) = {}^t(-a, 0, 0);$$

$$f_{uv} = {}^t(a \sin u \sin v, -b \sin u \cos v, 0), \quad f_{uv}(0, 0) = {}^t(0, 0, 0);$$

$$f_{vv} = {}^t(-a \cos u \cos v, -b \cos u \sin v, 0), \quad f_{vv}(0, 0) = {}^t(-a, 0, 0);$$

$$h_{11} = \langle f_{uu}(0, 0), \vec{N}(0, 0) \rangle = a, \quad h_{12} = \langle f_{uv}(0, 0), \vec{N}(0, 0) \rangle = 0,$$

$$h_{22} = \langle f_{vv}(0, 0), \vec{N}(0, 0) \rangle = a; \quad [II_o] = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix};$$

$$[L_o] = [I_o]^{-1} \cdot [II_o] = \begin{pmatrix} \frac{a}{c^2} & 0 \\ 0 & \frac{a}{b^2} \end{pmatrix}; k_1 = \frac{a}{c^2}, k_2 = \frac{a}{b^2} - \text{главные}$$

нормальные кривизны;

${}^t(1, 0)$ ,  ${}^t(0, 1)$  – соответствующие главные направления.

В остальных вершинах главные нормальные кривизны и главные направления находятся аналогично с помощью перепараметризации.

Найти линии кривизны следующих гиперповерхностей:

$$a) f(u, v) = {}^t(u \cos v, u \sin v, av).$$

$f_u = {}^t(\cos v, \sin v, 0)$ ,  $f_v = {}^t(-u \sin v, u \cos v, a)$ , Матрица первой фундаментальной формы в точке  $p(u, v)$ :  $[I_p] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{pmatrix}$ .

$$f_{uu} = \vec{0}; f_{uv} = {}^t(-\sin v, \cos v, 0); f_{vv} = {}^t(-u \cos v, -u \sin v, 0);$$

$$f_u \times f_v = \begin{vmatrix} \cos v & -u \sin v & e_1 \\ \sin v & u \cos v & e_2 \\ 0 & a & e_3 \end{vmatrix} = {}^t(a \sin v, -a \cos v, u).$$

$$h_{11} = \frac{\langle f_u \times f_v, f_{uu} \rangle}{\sqrt{g}} = 0; h_{12} = h_{21} = \frac{\langle f_u \times f_v, f_{uv} \rangle}{\sqrt{g}} = -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}};$$

$$h_{22} = \frac{\langle f_u \times f_v, f_{vv} \rangle}{\sqrt{g}} = 0;$$

Запишем матрицу второй фундаментальной формы в точке  $p(u, v)$ :

$$[II_p] = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \\ -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишем дифференциальное уравнение для нахождения линий кривизны:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0. \text{ В этом случае}$$

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 1 & 0 & u^2 + a^2 \\ 0 & -\frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} & 0 \end{vmatrix} = 0; \quad \frac{a}{\sqrt{u^2 + a^2}} \begin{vmatrix} dv^2 & du^2 \\ 1 & u^2 + a^2 \end{vmatrix} = 0;$$

$$(u^2 + a^2)dv^2 - du^2 = 0; \quad dv = \pm \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}};$$

$$v = \pm \int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \pm \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2}) + C - \text{линии кривизны.}$$

Определить тип точек на поверхности, полученной вращением синусоиды  $y = \sin x$  а) вокруг оси  $Ox$ .

$$\alpha(u) = {}^t(u, \sin u, 0); \quad 0 < u < \pi, \quad 0 < v < 2\pi;$$

$$f(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos v & -\sin v \\ 0 & \sin v & \cos v \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix} = {}^t(u, \sin u \cos v, \sin u \sin v);$$

$$f_u = {}^t(1, \cos u \cos v, \cos u \sin v), \quad f_v = {}^t(0, -\sin u \sin v, \sin u \cos v);$$

$$g_{11} = 1 + \cos^2 u, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = \sin^2 u, \quad [I_p] = \begin{pmatrix} 1 + \cos^2 u & 0 \\ 0 & \sin^2 u \end{pmatrix};$$

$$g = (1 + \cos^2 u) \sin^2 u;$$

$$f_{uu} = {}^t(0, -\sin u \cos v, -\sin u \sin v), \quad f_{uv} = {}^t(0, -\cos u \sin v, \cos u \cos v),$$

$$f_{vv} = {}^t(0, -\sin u \cos v, -\sin u \sin v);$$

$$h_{11} = h_{22} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 u} \sin u} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos u \cos v & -\sin u \sin v & -\sin u \cos v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v & -\sin u \sin v \end{vmatrix} =$$

$$\frac{\sin u}{\sqrt{1 + \cos^2 u}};$$

$$h_{12} = \frac{1}{\sqrt{1 + \cos^2 u} \sin u} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \cos u \cos v & -\sin u \sin v & -\cos u \sin v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v & \cos u \cos v \end{vmatrix} = 0;$$

$$[II_\rho] = \begin{pmatrix} \frac{\sin u}{\sqrt{1 + \cos^2 u}} & 0 \\ 0 & \frac{\sin u}{\sqrt{1 + \cos^2 u}} \end{pmatrix};$$

$$[L_\rho] = [I_\rho]^{-1} \cdot [II_\rho] = \begin{pmatrix} \frac{\sin u}{(1 + \cos^2 u)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sin u \sqrt{1 + \cos^2 u}} \end{pmatrix};$$

$$k_1 = \frac{\sin u}{(1 + \cos^2 u)^{3/2}}, k_2 = \frac{1}{\sin u \sqrt{1 + \cos^2 u}}, K = \frac{1}{(1 + \cos^2 u)^2} > 0.$$

Все точки поверхности эллиптические.

Классифицировать точки на следующей гиперповерхности (второго порядка): д) гиперболический параболоид (седло).

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z \quad (p, q > 0); \quad f(u, v) = {}^t(u, v, \frac{u^2}{2p} - \frac{v^2}{2q});$$

$$f_u = {}^t(1, 0, \frac{u}{p}), \quad f_v = {}^t(0, 1, -\frac{v}{q}), \quad g_{11} = 1 + \frac{u^2}{p^2}, \quad g_{12} = -\frac{uv}{pq}, \quad g_{22} = 1 + \frac{v^2}{q^2},$$

$$[I_p] = \begin{pmatrix} 1 + \frac{u^2}{p^2} & -\frac{uv}{pq} \\ -\frac{uv}{pq} & 1 + \frac{v^2}{q^2} \end{pmatrix};$$

$$g = (1 + \frac{u^2}{p^2})(1 + \frac{v^2}{q^2}) - (\frac{uv}{pq})^2 = 1 + \frac{u^2}{p^2} + \frac{v^2}{q^2}; \quad \sqrt{g} = \sqrt{1 + \frac{u^2}{p^2} + \frac{v^2}{q^2}};$$

$$f_{uu} = {}^t(0, 0, \frac{1}{p}), \quad f_{uv} = {}^t(0, 0, 0), \quad f_{vv} = {}^t(0, 0, -\frac{1}{q}),$$

$$h_{11} = \frac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{u}{p} & \frac{v}{q} & \frac{1}{p} \end{vmatrix} = \frac{1}{p\sqrt{g}}; \quad h_{12} = 0; \quad h_{22} = -\frac{1}{q\sqrt{g}};$$

$$h = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = -\frac{1}{pqg}, \quad K = \frac{h}{g} < 0. \quad \text{Все точки гиперболического типа.}$$

Доказать неравенство  $H^2 \geq K$  для произвольной гиперповерхности  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$  и убедиться, что это неравенство обращается в равенство тогда и только тогда, когда каждая точка поверхности омбилическая.

Пусть  $k_1, k_2$  – главные нормальные кривизны гиперповерхности  $f$ . Тогда

$$K = k_1 \cdot k_2, \quad H = \frac{k_1 + k_2}{2} \text{ и}$$

$$H^2 - K = \frac{k_1^2 + 2k_1k_2 + k_2^2}{4} - k_1k_2 = \frac{k_1^2 - 2k_1k_2 + k_2^2}{4} = \left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 \geq 0,$$

поэтому  $H^2 \geq K$ .

Если  $H^2 = K$ , то  $\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)^2 = 0$ , откуда  $k_1 = k_2$ . Это означает, что точка омбилическая.

Вычислить нормальную кривизну гиперповерхности  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^4$   
 $f(u, v, w) = {}^t(u + v, u - v, v + w, uvw)$  в направлении вектора скорости  
 кривой  $\alpha(t) = f(\beta(t))$  в точке  $t_0 = 1$ , где  $\beta(t) = {}^t(2t, -3t, t^2)$  – кривая в  
 области  $U \subseteq \mathbb{R}^3$ .

$$\dot{\beta}(t) = {}^t(2, -3, 2t), X = \dot{\beta}(t_0) = {}^t(2, -3, 2); p_0 = \beta(t_0) = {}^t(2, -3, 1);$$

$$K_N(X) = \frac{\Pi_{p_0}(X, X)}{I_{p_0}(X, X)}; f_u = {}^t(1, 1, 0, vw), f_v = {}^t(1, -1, 1, uw),$$

$$f_w = {}^t(0, 0, -1, uv); f_u(p_0) = {}^t(1, 1, 0, -3), f_v(p_0) = {}^t(1, -1, 1, 2),$$

$$f_w(p_0) = {}^t(0, 0, -1, -6); g_{11}(p_0) = 11, g_{12}(p_0) = -6, g_{13}(p_0) = 18,$$

$$g_{22}(p_0) = 7, g_{23}(p_0) = -13, g_{33}(p_0) = 37; [I_{p_0}] = \begin{pmatrix} 11 & -6 & 18 \\ -6 & 7 & -13 \\ 18 & -13 & 37 \end{pmatrix};$$

$$I_{p_0}(X, X) = (2, -3, 2) \cdot \begin{pmatrix} 11 & -6 & 18 \\ -6 & 7 & -13 \\ 18 & -13 & 37 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$(76, -53, 149) \cdot {}^t(2, -3, 2) = 609;$$

$$g = \begin{vmatrix} 11 & -6 & 18 \\ -6 & 7 & -13 \\ 18 & -13 & 37 \end{vmatrix} = 198; \sqrt{g} = 3\sqrt{22};$$

$$f(u, v, w) = {}^t(u + v, u - v, v + w, uvw), f_{uu} = f_{vv} = f_{ww} = {}^t(0, 0, 0, 0),$$

$$f_{uv} = {}^t(0, 0, 0, w), f_{uw} = {}^t(0, 0, 0, v), f_{vw} = {}^t(0, 0, 0, u);$$

$$f_{uv}(p_0) = {}^t(0, 0, 0, 1), f_{uw}(p_0) = {}^t(0, 0, 0, -3), f_{vw}(p_0) = {}^t(0, 0, 0, 2);$$

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = 0, h_{12} = \frac{1}{3\sqrt{22}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -6 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2}{3\sqrt{22}};$$

$$h_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -6 & -3 \end{vmatrix} = -\frac{6}{3\sqrt{22}};$$

$$h_{23} = \frac{1}{3\sqrt{22}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & 2 & -6 & 2 \end{vmatrix} = \frac{4}{3\sqrt{22}}; [II_{p_0}] = \frac{2}{3\sqrt{22}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix};$$

$$II_{p_0}(X, X) = \frac{2}{3\sqrt{22}}(2, -3, 2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} =$$

$$\frac{2}{3\sqrt{22}}(-9, 6, -12) \cdot {}^t(2, -3, 2) = -\frac{120}{3\sqrt{22}} = -\frac{40}{\sqrt{22}}; K_N(X) = -\frac{40}{609\sqrt{22}}.$$

Найти кривизну нормального сечения цилиндра  $y = x^2/2$  (расположенного в  $\mathbb{R}^3$ ) в точке  $A(2, 2, 4)$  в направлении касательной к линии  $y = x^2/2$ ,  $z = x^2$ .

Поверхность:  $f(u, v) = {}^t(u, u^2/2, v)$ ;

кривая:  $\alpha(t) = {}^t(t, t^2/2, t^2) = f(t, t^2) = f(\beta(t))$ ,  $\beta(t) = {}^t(t, t^2)$ ;  $A = \alpha(2)$ ,  
 $\dot{\beta}(t) = {}^t(1, 2t)$ ,  $\dot{\beta}(2) = {}^t(1, 4)$ ;  $X = {}^t(1, 4)$ ;

$p_0 = {}^t(2, 4)$ ;  $f_u = {}^t(1, u, 0)$ ,  $f_v = {}^t(0, 0, 1)$ ,  $f_u(p_0) = {}^t(1, 2, 0)$ ;  $[I_{p_0}] = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ;

$I_{p_0}(X, X) = (1, 4) \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = (5, 4) \cdot {}^t(1, 4) = 21$ ;

$g = 5$ ,  $\sqrt{g} = \sqrt{5}$ ;

$f_{uu} = {}^t(0, 1, 0)$ ,  $f_{uv} = f_{vv} = {}^t(0, 0, 0)$ ;  $h_{11} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ;

$h_{12} = h_{22} = 0$ ;  $[II_{p_0}] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ;

$II_{p_0}(X, X) = (1, 4) \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = (-\frac{1}{\sqrt{5}}, 0) \cdot {}^t(1, 4) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ;

$K_N(X) = \frac{II_{p_0}(X, X)}{I_{p_0}(X, X)} = -\frac{1}{21\sqrt{5}}$ .

Найти асимптотические линии поверхности  $z = xy^2$ .

$$f(u, v) = {}^t(u, v, uv^2); f_u = {}^t(1, 0, v^2), f_v = {}^t(0, 1, 2uv);$$

$$f_u \times f_v = \begin{vmatrix} 1 & 0 & e_1 \\ 0 & 1 & e_2 \\ v^2 & 2uv & e_3 \end{vmatrix} = {}^t(-v^2, -2uv, 1), |f_u \times f_v| = \sqrt{v^4 + 4u^2v^2 + 1},$$

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{v^4 + 4u^2v^2 + 1}} {}^t(-v^2, -2uv, 1);$$

$$f_{uu} = {}^t(0, 0, 0), f_{uv} = {}^t(0, 0, 2v), f_{vv} = {}^t(0, 0, 2u);$$

$$h_{11} = \langle f_{uu}, \vec{N} \rangle = 0, h_{12} = \langle f_{uv}, \vec{N} \rangle = \frac{2v}{\sqrt{v^4 + 4u^2v^2 + 1}},$$

$$h_{22} = \langle f_{vv}, \vec{N} \rangle = \frac{2u}{\sqrt{v^4 + 4u^2v^2 + 1}};$$

$$h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2 = 0, \frac{4vdudv}{\sqrt{v^4 + 4u^2v^2 + 1}} + \frac{2udv^2}{\sqrt{v^4 + 4u^2v^2 + 1}} = 0,$$

$$dv(2vdu + u dv) = 0;$$

$$dv = 0, v = c, \alpha(u) = {}^t(u, c, uc^2) - \text{прямая};$$

$$2vdu + u dv = 0, \frac{dv}{v} = -2\frac{du}{u}, \ln v = -2 \ln u + C, v = \frac{c}{u^2},$$

$$\beta(u) = {}^t(u, \frac{c}{u^2}, \frac{c^2}{u^3}).$$