Тема: Внутренняя геометрия поверхности. Первая фундаментальная форма, длины кривых и углы между кривыми вдоль поверхности

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Алгебра и геометрия для механиков (1 семестр)

Задачи в аудитории

С.В.Сизый с.235 №1 в), д), ж), 4, с. 241 № 1, 3, с.246 №1, 3 (сфера), 6

Рекомендуемое домашнее задание

с. 235 № 2 а), з), 3, с.241 5 б), с.246 3 (тор), 7

Найти первую фундаментальную форму поверхности $f(u, v) = {}^t(R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)$, если скалярное произведение в ее окружающем пространстве задано единичной матрицей Грама.

$f_u = {}^t(-R\sin u\cos v, -R\sin u\sin v, R\cos u)$,
$f_v = {}^t(-R\cos u\sin v, R\cos u\cos v, 0)$;
$p(u, v)$,
$g_{11}(p) = \langle f_u, f_u\rangle = R^2\sin^2 u\cos^2 v + R^2\sin^2 u\sin^2 v + R^2\cos^2 u = R^2$,
$g_{12}(p) = g_{21}(p) = \langle f_u, f_v\rangle =$
$R^2\sin u\cos v\cos u\sin v - R^2\sin u\sin v\cos u\cos v = 0$,
$g_{22}(p) = \langle f_v, f_v\rangle = R^2\cos^2 u\sin^2 v + R^2\cos^2 u\cos^2 v = R^2\cos^2 u$;

$$[\mathrm{I}_p] = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2 u \end{pmatrix}.$$

Найти первую фундаментальную форму поверхности
$f(u,v) = {}^t((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u)$, если скалярное произведение в ее окружающем пространстве задано единичной матрицей Грама.

$f_u = {}^t(-b\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, b\cos u)$,
$f_v = {}^t(-(a+b\cos u)\sin v, (a+b\cos u)\cos v, 0)$;
$p(u,v)$,
$g_{11}(p) = \langle f_u, f_u\rangle = b^2\sin^2 u\cos^2 v + b^2\sin^2 u\sin^2 v + b^2\cos^2 u = b^2$,
$g_{12}(p) = g_{21}(p) = \langle f_u, f_v\rangle =$
$b(a+b\cos u)\sin u\cos v\sin v - b(a+b\cos u)\sin u\sin v\cos v = 0$,
$g_{22}(p) = \langle f_v, f_v\rangle = (a+b\cos u)^2\sin^2 v + (a+b\cos u)^2\cos^2 v = (a+b\cos u)^2$;
$[\mathrm{I}_p] = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & (a+b\cos u)^2 \end{pmatrix}$.

Найти первую фундаментальную форму поверхности $f(u,v) = {}^t(a\cos u, a\sin u, b\cos v, b\sin v)$, если скалярное произведение в ее окружающем пространстве задано единичной матрицей Грама.

$f_u = {}^t(-a\sin u, a\cos u, 0, 0)$, $f_v = {}^t(0, 0, -b\sin v, b\cos v)$;
$p(u,v)$,
$g_{11}(p) = \langle f_u, f_u\rangle = a^2\sin^2 u + a^2\cos^2 u = a^2$,
$g_{12}(p) = g_{21}(p) = \langle f_u, f_v\rangle = 0$,
$g_{22}(p) = \langle f_v, f_v\rangle = b^2\sin^2 v + b^2\cos^2 v = b^2$;

$$[\mathrm{I}_p] = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}.$$

Найти первую фундаментальную форму поверхности $f(u,v) = {}^t(u+v, u-v, u^2+v^2, u^2-v^2)$, если скалярное произведение в ее окружающем пространстве задано следующей матрицей Грама:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$f_u = {}^t(1,1,2u,2u)$, $f_v = {}^t(1,-1,2v,-2v)$,
$p(u,v)$;
$$g_{11}(p) = \langle f_u, f_u \rangle = (1,1,2u,2u) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2u \\ 2u \end{pmatrix} =$$
$(1,1,2u,2u){}^t(2,3,8u,10u) = 5 + 36u^2$;
$$g_{12}(p) = g_{21}(p) = \langle f_u, f_v \rangle = (1,1,2u,2u) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2v \\ -2v \end{pmatrix} =$$
$(1,1,2u,2u){}^t(0,-1,4v,-6v) = -1 - 4uv$,

Окончание №4

$$g_{22}(p) = \langle f_v, f_v \rangle = (1, -1, 2v, -2v) \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2v \\ -2v \end{pmatrix} =$$

$$(1, -1, 2v, -2v)^t(0, -1, 4v, -6v) = 1 + 20v^2;$$

$$[\mathrm{I}_p] = \begin{pmatrix} 5 + 36u^2 & -1 - 4uv \\ -1 - 4uv & 1 + 20v^2 \end{pmatrix}.$$

Найти длину кривой $v = \ln(u + \sqrt{u^2 + a^2})$ между двумя произвольными точками вдоль прямого геликоида $f(u, v) = {}^t(u\cos v, u\sin v, av)$.

$f_u = {}^t(\cos v, \sin v, 0)$, $f_v = {}^t(-u\sin v, u\cos v, a)$,
$p(u, v)$,
$g_{11}(p) = \langle f_u, f_u\rangle = \sin^2 u + \cos^2 u = 1$,
$g_{12}(p) = g_{21}(p) = \langle f_u, f_v\rangle = 0$,
$g_{22}(p) = \langle f_v, f_v\rangle = u^2\sin^2 v + u^2\cos^2 v + a^2 = u^2 + a^2$;
$[\mathrm{I}_p] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{pmatrix}$;
$u(t) = {}^t(t, \ln(t + \sqrt{t^2 + a^2}))$, $\alpha(t) = f(u(t))$;
$\dot{u}(t) = {}^t\left(1, \dfrac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}}\right)$;

$$\langle\dot\alpha(t), \dot\alpha(t)\rangle = \left(1, \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}}\right)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 + a^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}} \end{pmatrix} =$$

$$\left(1, \frac{t^2 + a^2}{\sqrt{t^2 + a^2}}\right){}^t(1, \frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}}) = 2;$$

$$\ell[\alpha]_a^b = \int_a^b \sqrt{\langle\dot\alpha(t), \dot\alpha(t)\rangle}dt = \int_a^b \sqrt{2}dt = \sqrt{2}(b - a).$$

Найти длину дуги кривой $u = v$ между двумя произвольными точками вдоль поверхности, первая фундаментальная форма которой имеет матрицу $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sh}^2 u \end{pmatrix}$.

$u(t) = {}^t(t, t)$; $\alpha(t) = f(u(t))$, $\dot{u}(t) = {}^t(1, 1)$;

$\langle \dot\alpha(t), \dot\alpha(t) \rangle = (1, 1) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \operatorname{sh}^2 t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 + \operatorname{sh}^2 t = \operatorname{ch}^2 t$;

$\ell[\alpha]_a^b = \int_a^b \sqrt{\langle \dot\alpha(t), \dot\alpha(t) \rangle} dt = \int_a^b \sqrt{\operatorname{ch}^2 t} dt = \int_a^b \operatorname{ch} t dt = \operatorname{sh} b - \operatorname{sh} a$.

Под каким углом пересекаются образы кривых $u_1(t) = {}^t(t, 2t, -t)$ и $u_2(\theta) = {}^t(3\theta, -\theta, \theta^2)$ вдоль поверхности $f(u, v, w) = {}^t(3u, u + v, uvw, v^2 + w^2)$?

$\alpha_1(t) = f(u_1(t)),\ \alpha_2(\theta) = f(u_2(\theta));$
$f_u = {}^t(3, 1, vw, 0),\ f_v = {}^t(0, 1, uw, 2v),\ f_w = {}^t(0, 0, uv, 2w);$
$g_{11}(p) = \langle f_u, f_u\rangle = 10 + v^2w^2,\ g_{22}(p) = \langle f_v, f_v\rangle = 1 + u^2w^2 + 4v^2,$
$g_{33}(p) = \langle f_w, f_w\rangle = u^2v^2 + 4w^2,\ g_{12} = g_{21} = \langle f_u, f_v\rangle = 1 + uvw^2,$
$g_{13} = g_{31} = \langle f_u, f_w\rangle = uv^2w,\ g_{23} = g_{32} = \langle f_v, f_w\rangle = u^2vw + 4vw;$

$$[\mathrm{I}_p] = \begin{pmatrix} 10 + v^2w^2 & 1 + uvw^2 & uv^2w \\ 1 + uvw^2 & 1 + u^2w^2 + 4v^2 & u^2vw + 4vw \\ uv^2w & u^2vw + 4vw & u^2v^2 + 4w^2 \end{pmatrix};$$

Точка пересечения кривых: $u_1(t) = u_2(\theta)$, $\begin{cases} t = 3\theta, \\ 2t = -\theta, \\ -t = \theta^2; \end{cases}$ $p_0 = {}^t(0, 0, 0);$

$$[\mathrm{I}_{p_0}] = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\ \dot{u}_1(0) = {}^t(1, 2, -1);\ \dot{u}_2(0) = {}^t(3, -1, 0);$$

$$\cos\varphi = \frac{\mathrm{I}_{p_0}(\dot\alpha_1(0), \dot\alpha_2(0))}{\sqrt{\mathrm{I}_{p_0}(\dot\alpha_1(0), \dot\alpha_1(0))}\sqrt{\mathrm{I}_{p_0}(\dot\alpha_2(0), \dot\alpha_2(0))}};$$

$$\mathrm{I}_{p_0}(\dot\alpha_1(0), \dot\alpha_2(0)) = (1, 2, -1)\begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$(1, 2, -1)^t(29, 2, 0) = 33;$$

$$\mathrm{I}_{p_0}(\dot\alpha_1(0), \dot\alpha_1(0)) = (1, 2, -1)\begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} =$$

$$(1, 2, -1)^t(12, 3, 0) = 18;$$

$$\mathrm{I}_{p_0}(\dot\alpha_2(0), \dot\alpha_2(0)) = (3, -1, 0)\begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$(3, -1, 0)^t(29, 2, 0) = 85;$$

$$\cos\varphi = \frac{33}{\sqrt{18 \cdot 85}} = \frac{11}{\sqrt{170}}.$$

Под каким углом пересекаются линии $u+v=0$ и $u-v=0$ на сфере $f(u,v)={}^t(R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)$?

$[\mathrm{I}_p]=\begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2 u \end{pmatrix}$; $u_1(t)={}^t(t,-t)$, $u_2(\theta)={}^t(\theta,\theta)$; точка пересечения $p_0={}^t(0,0)$, $\alpha_1(t)=f(u_1(t))$, $\alpha_2(\theta)=f(u_2(\theta))$;

$[\mathrm{I}_{p_0}]=\begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}$; $\dot u_1(0)={}^t(1,-1)$, $\dot u_2(0)={}^t(1,1)$,

$\mathrm{I}_{p_0}(\dot\alpha_1(0),\dot\alpha_1(0))=(1,-1)\begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}=(1,-1){}^t(R^2,-R^2)=2R^2$;

$\mathrm{I}_{p_0}(\dot\alpha_2(0),\dot\alpha_2(0))=(1,1)\begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=(1,1){}^t(R^2,R^2)=2R^2$;

$\mathrm{I}_{p_0}(\dot\alpha_1(0),\dot\alpha_2(0))=(1,-1)\begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=(1,-1){}^t(R^2,R^2)=R^2-R^2=0$;

$$\cos\varphi=\frac{\mathrm{I}_{p_0}(\dot\alpha_1(0),\dot\alpha_2(0))}{\sqrt{\mathrm{I}_{p_0}(\dot\alpha_1(0),\dot\alpha_1(0))}\sqrt{\mathrm{I}_{p_0}(\dot\alpha_2(0),\dot\alpha_2(0))}}=0,\ \varphi=\frac{\pi}{2}.$$

Найти уравнения локсодром на поверхности
$f(u,v) = {}^t(u\cos v, u\sin v, a\ln(u+\sqrt{u^2-a^2}))$.

$f_u = {}^t(\cos v, \sin v, \dfrac{a}{\sqrt{u^2-a^2}})$; $f_v = {}^t(-u\sin v, u\cos v, 0)$;

$g_{11} = 1 + \dfrac{a^2}{u^2-a^2} = \dfrac{u^2}{u^2-a^2}$, $g_{12} = g_{21} = 0$, $g_{22} = u^2$;

$[\mathrm{I}_p] = \begin{pmatrix} \dfrac{u^2}{u^2-a^2} & 0 \\ 0 & u^2 \end{pmatrix}$; $\alpha_1(t)$ – меридиан поверхности, $v =$ const – его прообраз в области $U = (a, +\infty) \times (-\pi, \pi) \subseteq \mathbb{R}^2$. В касательном пространстве $\mathrm{T}_p f$ касательный вектор $\dot\alpha_1(t) = f_u$ имеет координаты $(du, 0) = (1, 0)dt$.

Пусть кривая $\alpha_2(t)$ – локсодрома на поверхности и пусть $u_2(\theta) = {}^t(u(\theta), v(\theta))$ – параметрическое задание ее прообраза в области $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Тогда в касательном пространстве $\mathrm{T}_p f$ касательный вектор $\dot\alpha_2(\theta)$ имеет координаты $(\delta u, \delta v) = (\dot u, \dot v)\delta\theta$.

Угол между всеми меридианами и локсодромой постоянен и равен φ, следовательно, $\cos\varphi =$ const $= \dfrac{\mathrm{I}_p(\dot\alpha_1, \dot\alpha_2)}{\sqrt{\mathrm{I}_p(\dot\alpha_1, \dot\alpha_1)}\sqrt{\mathrm{I}_p(\dot\alpha_2, \dot\alpha_2)}}$.

$$\mathrm{I}_p(\dot\alpha_1,\dot\alpha_2)=(1,0)dt\begin{pmatrix}\dfrac{u^2}{u^2-a^2} & 0\\ 0 & u^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot u\\ \dot v\end{pmatrix}\delta\theta=\frac{u^2dt\dot u\delta\theta}{u^2-a^2};$$

$$\mathrm{I}_p(\dot\alpha_1,\dot\alpha_1)=(dt,0)\begin{pmatrix}\dfrac{u^2}{u^2-a^2} & 0\\ 0 & u^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dt\\ 0\end{pmatrix}=\frac{u^2dt^2}{u^2-a^2};$$

$$\mathrm{I}_p(\dot\alpha_2,\dot\alpha_2)=(\dot u,\dot v)\delta\theta\begin{pmatrix}\dfrac{u^2}{u^2-a^2} & 0\\ 0 & u^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\dot u\\ \dot v\end{pmatrix}\delta\theta=\frac{u^2\dot u^2\delta\theta^2}{u^2-a^2}+u^2\dot v^2\delta\theta^2;$$

$$\sqrt{\mathrm{I}_p(\dot\alpha_1,\dot\alpha_1)}=\frac{udt}{\sqrt{u^2-a^2}};$$

$$\sqrt{\mathrm{I}_p(\dot\alpha_2,\dot\alpha_2)}=\frac{u\sqrt{\dot u^2\delta\theta^2+(u^2-a^2)\dot v^2\delta\theta^2}}{\sqrt{u^2-a^2}}=\frac{u\sqrt{\delta u^2+(u^2-a^2)\delta v^2}}{\sqrt{u^2-a^2}};$$

$$\cos\varphi=\frac{\mathrm{I}_p(\dot\alpha_1,\dot\alpha_2)}{\sqrt{\mathrm{I}_p(\dot\alpha_1,\dot\alpha_1)}\sqrt{\mathrm{I}_p(\dot\alpha_2,\dot\alpha_2)}}=$$

$$\frac{u^2dt\dot u\delta\theta}{u^2-a^2}\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{udt}\frac{\sqrt{u^2-a^2}}{u\sqrt{\delta u^2+(u^2-a^2)\delta v^2}}=\frac{\delta u}{\sqrt{\delta u^2+(u^2-a^2)\delta v^2}};$$

$\cos^2\varphi(\delta u^2+(u^2-a^2)\delta v^2)=\delta u^2$; $\delta u^2\sin^2\varphi=(u^2-a^2)\delta v^2\cos^2\varphi$;

$\delta v=\frac{\delta u\ ctg\varphi}{\sqrt{u^2-a^2}}$. Получаем семейство интегральных кривых

$v=a\ ctg\varphi\ln(u+\sqrt{u^2-a^2})+v_0$. Каждая такая кривая является прообразом некоторой локсодромы.