Тема : Понятие поверхности. Касательные пространства

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Дифференциальная геометрия и топология (практика)
для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
III семестр

Задачи в аудитории

С.В.Сизый с. 209 № 1, 2 б), в), 5, 6, с.224 №1, 6, 10, 11

Рекомендуемое домашнее задание

с. 209 № 2 а), г), с.224 4, 7

В каких точках плоскости $\mathbb{R}^2$ отображение $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, имеющее параметризацию $f(u^1, u^2) = {}^t(3\cos u^1 \cos u^2, 4\cos u^1 \sin u^2, 2\sin u^1)$ удовлетворяет условию максимальности ранга?

$f_{u^1} = {}^t(-3\sin u^1 \cos u^2, -4\sin u^1 \sin u^2, 2\cos u^1)$;
$f_{u^2} = {}^t(-3\cos u^1 \sin u^2, 4\cos u^1 \cos u^2, 0)$.

Вычислим определители $\Delta_1 = \begin{vmatrix} -3\sin u^1 \cos u^2 & -3\cos u^1 \sin u^2 \\ -4\sin u^1 \sin u^2 & 4\cos u^1 \cos u^2 \end{vmatrix} =$
$-12\sin u^1 \cos u^1 \cos^2 u^2 - 12\sin u^1 \cos u^1 \sin^2 u^2 = -12\sin u^1 \cos u^1$;

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -3\sin u^1 \cos u^2 & -3\cos u^1 \sin u^2 \\ 2\cos u^1 & 0 \end{vmatrix} = 6\cos^2 u^1 \sin u^2$;

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} -4\sin u^1 \sin u^2 & 4\cos u^1 \cos u^2 \\ 2\cos u^1 & 0 \end{vmatrix} = -8\cos^2 u^1 \cos u^2$.

Условие максимальности ранга для отображения f равносильно утверждению $\Delta_1 \neq 0 \vee \Delta_2 \neq 0 \vee \Delta_3 \neq 0$.
При $\cos u^1 = 0$ $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$, при $\cos u^1 \neq 0$ $\Delta_2 \neq 0 \vee \Delta_3 \neq 0$.
Ответ: при $u^1 \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$ $(k \in \mathbb{Z})$ отображение f удовлетворяет условию максимальности ранга.

Найти стандартный базис касательного пространства $\mathrm{T}_p f$ к поверхности $f(u,v) = {}^t(u\cos v, u\sin v, 4v)$ в точке $p(2, \frac{\pi}{4})$.
Найти параметризации координатных линий этой поверхности, проходящих через точку $f(p)$.
Составить уравнение аффинной касательной плоскости к этой поверхности в точке $f(p)$.

$f_u(u,v) = {}^t(\cos v, \sin v, 0)$, $f_u(p) = {}^t(\cos\frac{\pi}{4}, \sin\frac{\pi}{4}, 0) = {}^t(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$;
$f_v(u,v) = {}^t(-u\sin v, u\cos v, 4)$, $f_v(p) = {}^t(-2\sin\frac{\pi}{4}, 2\cos\frac{\pi}{4}, 4) = {}^t(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4)$.
Стандартный базис касательного пространства $\mathrm{T}_p f$ к поверхности f в точке $p(2, \frac{\pi}{4})$: $({}^t(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0), {}^t(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 4))$.
Параметризации координатных линий поверхности f, проходящих через точку $f(p)$: $\alpha(u) = f(u, v_0) = {}^t(u\cos\frac{\pi}{4}, u\sin\frac{\pi}{4}, \pi) = {}^t(\frac{u\sqrt{2}}{2}, \frac{u\sqrt{2}}{2}, \pi)$ – прямая;
$\beta(v) = f(u_0, v) = {}^t(2\cos v, 2\sin v, 4v)$ – винтовая линия.
Уравнение аффинной касательной плоскости к поверхности f в точке
$f(p) = {}^t(2\cos\frac{\pi}{4}, 2\sin\frac{\pi}{4}, \pi) = {}^t(\sqrt{2}, \sqrt{2}, \pi)$: $\begin{vmatrix} x-\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\sqrt{2} \\ y-\sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} \\ z-\pi & 0 & 4 \end{vmatrix} = 0$;

$4\frac{\sqrt{2}}{2}(x-\sqrt{2}) - 4\frac{\sqrt{2}}{2}(y-\sqrt{2}) + 2(z-\pi) = 0$, $\sqrt{2}x - \sqrt{2}y + z - \pi = 0$.

Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $f(u,v) = {}^t(u, u^2 - 2uv, u^3 - 3u^2v)$ в точке $A(1,3,4)$. Найти поверхностные координаты точки A. Найти параметризации координатных линий этой поверхности, проходящих через точку A.

$A = f(u_0, v_0)$, $u_0 = 1$, $u_0^2 - 2u_0v_0 = 3$, $2v_0 = -2$, $v_0 = -1$, $u_0^3 - 3u_0^2v_0 = 4$ (проверка), ${}^t(1,-1)$ – поверхностные координаты точки A.
$f_u(u,v) = {}^t(1, 2u-2v, 3u^2-6uv)$, $f_u(u_0,v_0) = {}^t(1,4,9)$;
$f_v(u,v) = {}^t(0, -2u, -3u^2)$, $f_v(u_0,v_0) = {}^t(0,-2,-3)$.

Уравнение касательной плоскости: $\begin{vmatrix} x-1 & 1 & 0 \\ y-3 & 4 & -2 \\ z-4 & 9 & -3 \end{vmatrix} = 0$;
$6(x-1) + 3(y-3) - 2(z-4) = 0$, $6x + 3y - 2z - 7 = 0$.
Параметризации координатных линий этой поверхности, проходящих через точку A: $\alpha(u) = f(u, v_0) = {}^t(u, u^2+2u, u^3+3u^2)$,
$\beta(v) = f(u_0, v) = {}^t(1, 1-2v, 1-3v)$ – прямая.

Составить уравнение двупараметрического семейства всех касательных плоскостей к сфере (“касательное расслоение”) сферы $f(u,v) = {}^t(R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)$ $(-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}, -\pi < v < \pi)$. Найти на этой сфере множество точек, в которых касательные плоскости параллельны вектору $\vec{s} = {}^t(1,2,-3)$.

$f_u = {}^t(-R\sin u\cos v, -R\sin u\sin v, R\cos u)$,
$f_v = {}^t(-R\cos u\sin v, R\cos u\cos v, 0)$,

$$\begin{vmatrix} x - R\cos u\cos v & -R\sin u\cos v & -R\cos u\sin v \\ y - R\cos u\sin v & -R\sin u\sin v & R\cos u\cos v \\ z - R\sin u & R\cos u & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

$-R^2\cos^2 u\cos v(x - R\cos u\cos v) - R^2\cos^2 u\sin v(y - R\cos u\sin v) - R^2\sin u\cos u(\cos^2 v + \sin^2 v)(z - R\sin u) = 0;$
$x\cos^2 u\cos v - R\cos^3 u\cos^2 v + y\cos^2 u\sin v - R\cos^3 u\sin^2 v + z\sin u\cos u - R\sin^2 u\cos u = 0;$
$-R\cos^3 u\cos^2 v - R\cos^3 u\sin^2 v - R\sin^2 u\cos u = -R\cos u(\cos^2 u\cos^2 v + \cos^2 u\sin^2 v + \sin^2 u) = -R\cos u;$
$x\cos^2 u\cos v + y\cos^2 u\sin v + z\sin u\cos u - R\cos u = 0;\ \cos u \neq 0.$
Уравнение двупараметрического семейства всех касательных плоскостей к сфере: $x\cos u\cos v + y\cos u\sin v + z\sin u - R = 0.$

Заметим, что это уравнение можно получить быстрее, используя тот факт, что касательная плоскость перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.
$\vec{n} = {}^t(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u)$; $\langle \vec{n}, \vec{s} \rangle = 0$;
$\cos u \cos v + 2 \cos u \sin v - 3 \sin u = 0$.
Множество всех точек на сфере, в которых касательные плоскости параллельны вектору $\vec{s} = {}^t(1, 2, -3)$, представляет собой множество всех точек на сфере, в которых радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен к вектору $\vec{s}$, т.е. линия пересечения сферы с плоскостью, проходящей через центр сферы перпендикулярно к вектору $\vec{s}$ – окружность большого круга $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \\ x + 2y - 3z = 0. \end{cases}$

Найти параметризацию поверхности, которая получается вращением цепной линии $\alpha(u) = {}^t(a\,\mathrm{ch}(u/a), 0, u)$ вокруг оси Oz. (Катеноид)

Будем вращать график $\alpha(u)$ вокруг Oz. Матрица такого поворота на угол v имеет вид $A_v = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Имеем

$f(u, v) = A_v\alpha(u) = {}^t(a\,\mathrm{ch}(u/a)\cos v, a\,\mathrm{ch}(u/a)\sin v, u)$.

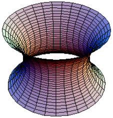

Рис. 1 Изображение взято с сайта https://ru.wikipedia.org/wiki

Написать параметризацию тора $S^1_a \times S^2_b$ в пространстве $\mathbb{R}^5$. Найти базис касательного пространства $\mathrm{T}_p f$ в произвольной точке к этому тору. Найти базис нормального пространства $(\mathrm{T}_p f)^\perp$ в произвольной точке.

Параметризация S^1_a $f : (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(u) = {}^t(a\cos u, a\sin u)$;
параметризация S^2_b $g : (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^3$,
$g(v, w) = {}^t(b\cos v\cos w, b\cos v\sin w, b\sin v)$;
параметризация тора $S^1_a \times S^2_b$ в пространстве $\mathbb{R}^5$
$h : (-\pi, \pi) \times (-\pi/2, \pi/2) \times (-\pi, \pi) \longrightarrow \mathbb{R}^5$,
$h(u, v, w) = {}^t(a\cos u, a\sin u, b\cos v\cos w, b\cos v\sin w, b\sin v)$.
$h_u = {}^t(-a\sin u, a\cos u, 0, 0, 0)$,
$h_v = {}^t(0, 0, -b\sin v\cos w, -b\sin v\sin w, b\cos v)$,
$h_w = {}^t(0, 0, -b\cos v\sin w, b\cos v\cos w, 0)$;
базис $\mathrm{T}_p f$ в произвольной точке $p(u, v, w)$: $(h_u(p), h_v(p), h_w(p))$.
$\dim(\mathrm{T}_p f) = 3 \Longrightarrow \dim(\mathrm{T}_p f)^\perp = 2$.
$c_1 = {}^t(\cos u, \sin u, 0, 0, 0) \in (\mathrm{T}_p f)^\perp$. Пусть ${}^t(d_3, d_4, d_5) =$
${}^t(-\sin v\cos w, -\sin v\sin w, \cos v) \times {}^t(-\cos v\sin w, \cos v\cos w, 0)$. Тогда
$c_2 = {}^t(0, 0, d_3, d_4, d_5) \in (\mathrm{T}_p f)^\perp$ и c_1, c_2 – базис $(\mathrm{T}_p f)^\perp$ в произвольной точке $p(u, v, w)$.
${}^t(d_3, d_4, d_5) = -{}^t(\cos^2 v\cos w, \cos^2 v\sin w, \sin v\cos v)$.

Найти параметризацию поверхности, образованной главными нормалями винтовой линии.

Параметризация винтовой линии: $\alpha(t) = {}^t(a\cos t, a\sin t, bt)$. Вычисляем производные: $\dot\alpha(t) = {}^t(-a\sin t, a\cos t, b)$, $\ddot\alpha(t) = {}^t(-a\cos t, -a\sin t, 0)$ и векторное произведение

$$\dot\alpha \times \ddot\alpha = \begin{vmatrix} -a\sin t & -a\cos t & e_1 \\ a\cos t & -a\sin t & e_2 \\ b & 0 & e_3 \end{vmatrix} = {}^t(ab\sin t, -ab\cos t, a^2).$$ Тогда

$$E_1 = \vec\tau = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,{}^t(-a\sin t, a\cos t, b),$$

$$E_3 = \vec\beta = \frac{\dot\alpha \times \ddot\alpha}{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,{}^t(b\sin t, -b\cos t, a).$$ Далее находим

$$E_2 = \vec\nu = E_3 \times E_1 = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{vmatrix} b\sin t & -a\sin t & e_1 \\ -b\cos t & a\cos t & e_2 \\ a & b & e_3 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{1}{a^2+b^2}\,{}^t(-(a^2+b^2)\cos t, -(a^2+b^2)\sin t, 0) = {}^t(-\cos t, -\sin t, 0).$$

Главная нормаль: $x = a\cos t - u\cos t,\ y = a\sin t - u\sin t,\ z = bt.$

Параметризация поверхности:

$f(u, v) = {}^t(a\cos v - u\cos v, a\sin v - u\sin v, bv).$

Поверхность f образована касательными к бирегулярной кривой $\alpha(u) : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Найти параметризацию поверхности f. Доказать, что во всех точках одной и той же касательной к $\alpha(u)$ поверхность f имеет одну и ту же касательную плоскость (рассматриваемую, разумеется, как аффинное пространство).

Параметризация поверхности f: $f(u, v) = \alpha(u) + v\dot{\alpha}(u)$, $v \in \mathbb{R}$.
При $u = u_0$, $v \in \mathbb{R}$ получаем все точки касательной $f(u_0, v) = \alpha(u_0) + v\dot{\alpha}(u_0)$.
$f_u = \dot{\alpha}(u) + v\ddot{\alpha}(u)$, $f_v = \dot{\alpha}(u)$. При $v = 0$ нарушается условие максимальности ранга.
Аффинная касательная плоскость в произвольной точке касательной имеет уравнение $q = \alpha(u_0) + v\dot{\alpha}(u_0) + sf_u + tf_v$;
$q = \alpha(u_0) + v\dot{\alpha}(u_0) + s(\dot{\alpha}(u_0) + v\ddot{\alpha}(u_0)) + t\dot{\alpha}(u_0) =$
$\alpha(u_0) + (v + s + t)\dot{\alpha}(u_0) + sv\ddot{\alpha}(u_0)$;
При фиксированном $v \neq 0$ выражения $v + s + t$ и sv принимают всевозможные значения при произвольных $s, t \in \mathbb{R}$ независимо от значения v.