Тема: Кривые общего вида

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Дифференциальная геометрия и топология (практика)
для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
III семестр

Задачи в аудитории

С.В.Сизый с.130 №2, с. 135 № 3, 4 а), 6, с.141 №1, с.147 №1 а), в), 4, с.158 № 1а), с.162 1 в), 3.

Рекомендуемое домашнее задание

с. 135 № 4 б), с.147 №1 б), 3, 4, с.158 № 1б), с.162 1 б), 4.

При каких значениях $k \in \mathbb{N}$ кривая $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4$, имеющая параметризацию $\alpha(t) = {}^t(t^k, t^{k+1}, t^{k+2}, t^{k+3})$, является кривой общего вида?

$\dot{\alpha}(t) = {}^t(kt^{k-1}, (k+1)t^k, (k+2)t^{k+1}, (k+3)t^{k+2})$. При $k > 1$ $\dot{\alpha}(0) = {}^t(0,0,0,0)$ и $\alpha(t)$ не является кривой общего вида.
При $k = 1$ $\alpha(t) = {}^t(t, t^2, t^3, t^4)$, $\dot{\alpha}(t) = {}^t(1, 2t, 3t^2, 4t^3)$, $\ddot{\alpha}(t) = {}^t(0, 2, 6t, 12t^2)$, $\dddot{\alpha}(t) = {}^t(0, 0, 6, 24t)$.

$$[\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \dddot{\alpha}(t)] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2t & 2 & 0 \\ 3t^2 & 6t & 6 \\ 4t^3 & 12t^2 & 24t \end{pmatrix}, \ \mathsf{r}([\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t), \dddot{\alpha}(t)]) = 3.$$

Таким образом, при $k = 1$ $\alpha(t)$ является кривой общего вида.

Найти базис Френе кривой $\alpha(t) = {}^t(\sin^3 t, \cos^3 t, \cos 2t)$.

$\dot\alpha(t) = {}^t(3\sin^2 t\cos t, -3\cos^2 t\sin t, -2\sin 2t)$; $|\dot\alpha(t)| =$
$\sqrt{9\sin^4 t\cos^2 t + 9\cos^4 t\sin^2 t + 4\sin^2 2t} = \sqrt{25\sin^2 t\cos^2 t} = \frac{5}{2}\sin 2t$;
$E_1(t) = \frac{2}{5}{}^t(\frac{3}{2}\sin t, -\frac{3}{2}\cos t, -2)$;
$\ddot\alpha(t) = {}^t(6\sin t\cos^2 t - 3\sin^3 t, 6\cos t\sin^2 t - 3\cos^3 t, -4\cos 2t)$;

$$E_1(t)\times\ddot\alpha(t) = \frac{1}{5}\begin{vmatrix} 3\sin t & 6\sin t\cos^2 t - 3\sin^3 t & e_1 \\ -3\cos t & 6\cos t\sin^2 t - 3\cos^3 t & e_2 \\ -4 & -4\cos 2t & e_3 \end{vmatrix} =$$

$\frac{1}{5}{}^t(12\cos t\cos 2t + 24\cos t\sin^2 t - 12\cos^3 t, 12\sin t\cos 2t - 24\sin t\cos^2 t +$
$12\sin^3 t, 18\sin^3 t\cos t - 9\sin t\cos^3 t + 18\sin t\cos^3 t - 9\sin^3 t\cos t) =$
$\frac{1}{5}{}^t(12\sin^2 t\cos t, -12\sin t\cos^2 t, 9\sin^3 t\cos t + 9\sin t\cos^3 t) =$
$\frac{3}{5}\sin t\cos t\,{}^t(4\sin t, -4\cos t, 3)$;
$E_3(t) = \frac{1}{5}{}^t(4\sin t, -4\cos t, 3)$;

$$E_2(t) = E_3(t)\times E_1(t) = \frac{1}{25}\begin{vmatrix} 4\sin t & 3\sin t & e_1 \\ -4\cos t & -3\cos t & e_2 \\ 3 & -4 & e_3 \end{vmatrix} =$$

$\frac{1}{25}{}^t(25\cos t, 25\sin t, 0) = {}^t(\cos t, \sin t, 0)$.

С.В.Сизый с.135 №6

Доказать, что если все соприкасающиеся плоскости бирегулярной кривой в $\mathbb{R}^3$ проходят через фиксированную точку, то эта кривая плоская.

Перенесем начало координат в указанную фиксированную точку. Тогда векторы $\alpha(t) - O$, $\dot{\alpha}(t)$ и $\ddot{\alpha}(t)$ при любом значении t лежат в одной плоскости. Кривая будет плоской в силу результата задачи 5 на с.39.

Вычислить векторы репера Френе и кривизны кривой $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4$, имеющей параметризацию $\alpha(t) = {}^t(\sin t, \cos t, \frac{1}{2}\sin 2t, \frac{1}{2}\cos 2t)$.

$\dot\alpha(t) = {}^t(\cos t, -\sin t, \cos 2t, -\sin 2t)$;
$E_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t(\cos t, -\sin t, \cos 2t, -\sin 2t)$;
$\ddot\alpha(t) = {}^t(-\sin t, -\cos t, -2\sin 2t, -2\cos 2t)$; $\langle\ddot\alpha(t), E_1(t)\rangle = 0$;
$E_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{5}}{}^t(\sin t, \cos t, 2\sin 2t, 2\cos 2t)$;
$\dddot\alpha(t) = {}^t(-\cos t, \sin t, -4\cos 2t, 4\sin 2t)$; $\langle\dddot\alpha(t), E_1(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-4) = -\frac{5}{\sqrt{2}}$;
$\langle\dddot\alpha(t), E_2(t)\rangle = 0$; $b_3 = \dddot\alpha(t) - \langle\dddot\alpha(t), E_1(t)\rangle E_1(t) =$
${}^t(-\cos t, \sin t, -4\cos 2t, 4\sin 2t) + \frac{5}{2}{}^t(\cos t, -\sin t, \cos 2t, -\sin 2t) =$
${}^t(\frac{3}{2}\cos t, -\frac{3}{2}\sin t, -\frac{3}{2}\cos 2t, \frac{3}{2}\sin 2t) = \frac{3}{2}{}^t(\cos t, -\sin t, -\cos 2t, \sin 2t)$;
$E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t(\cos t, -\sin t, -\cos 2t, \sin 2t)$;

$$E_4(t) = E_1(t)\times E_2(t)\times E_3(t) = -\frac{1}{2\sqrt{5}}\begin{vmatrix} \cos t & \sin t & \cos t & e_1 \\ -\sin t & \cos t & -\sin t & e_2 \\ \cos 2t & 2\sin 2t & -\cos 2t & e_3 \\ -\sin 2t & 2\cos 2t & \sin 2t & e_4 \end{vmatrix}.$$

$$-\begin{vmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ \cos 2t & 2\sin 2t & -\cos 2t \\ -\sin 2t & 2\cos 2t & \sin 2t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\sin 2t & -\cos 2t \\ 2\cos 2t & \sin 2t \end{vmatrix} \sin t + \begin{vmatrix} 2\cos 2t & -\cos 2t \\ -2\sin 2t & \sin 2t \end{vmatrix} \cos t + \begin{vmatrix} \cos 2t & 2\sin 2t \\ -\sin 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix} \sin t = 2\sin t + 2\sin t = 4\sin t;$$

$$\begin{vmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ \cos 2t & 2\sin 2t & -\cos 2t \\ -\sin 2t & 2\cos 2t & \sin 2t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\sin 2t & -\cos 2t \\ 2\cos 2t & \sin 2t \end{vmatrix} \cos t - \begin{vmatrix} \cos 2t & -\cos 2t \\ -\sin 2t & \sin 2t \end{vmatrix} \sin t + \begin{vmatrix} \cos 2t & 2\sin 2t \\ -\sin 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix} \cos t = 2\cos t + 2\cos t = 4\cos t;$$

$$-\begin{vmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\sin 2t & 2\cos 2t & \sin 2t \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ 2\cos 2t & \sin 2t \end{vmatrix} \cos t + \begin{vmatrix} -\sin t & -\sin t \\ -\sin 2t & \sin 2t \end{vmatrix} \sin t - \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\sin 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix} \cos t = -(\cos t \sin 2t + 2\sin t\cos 2t)\cos t - 2\sin^2 t \sin 2t - (-2\sin t\cos 2t + \sin 2t\cos t)\cos t = -2(\cos^2 t + \sin^2 t)\sin 2t = -2\sin 2t;$$

$$\begin{vmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \\ \cos 2t & 2\sin 2t & -\cos 2t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ 2\sin 2t & -\cos 2t \end{vmatrix} \cos t - \begin{vmatrix} -\sin t & -\sin t \\ \cos 2t & -\cos 2t \end{vmatrix} \sin t + \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos 2t & 2\sin 2t \end{vmatrix} \cos t = (-\cos t \cos 2t +$$

$$2\sin t \sin 2t)\cos t - 2\sin^2 t \cos 2t + (-2\sin t \sin 2t - \cos 2t \cos t)\cos t =$$

$$-2(\cos^2 t + \sin^2 t)\cos 2t = -2\cos 2t;$$

$$E_4(t) = -\frac{1}{2\sqrt{5}}{}^t(4\sin t, 4\cos t, -2\sin 2t, -2\cos 2t) =$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}{}^t(-2\sin t, -2\cos t, \sin 2t, \cos 2t).$$

Находим кривизны. $\dot{E}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t(-\sin t, -\cos t, -2\sin 2t, -2\cos 2t)$;

$E_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{5}}{}^t(\sin t, \cos t, 2\sin 2t, 2\cos 2t)$;

$\langle \dot{E}_1(t), E_2(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(1+2) = \frac{3}{\sqrt{10}}$; $|\dot{\alpha}(t)| = \sqrt{2}$; $k_1(t) = \frac{3}{\sqrt{10}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$;

$\dot{E}_2(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}{}^t(-\cos t, \sin t, -4\cos 2t, 4\sin 2t)$;

$E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t(\cos t, -\sin t, -\cos 2t, \sin 2t)$; $\langle \dot{E}_2(t), E_3(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1+4) = \frac{3}{\sqrt{10}}$;

$k_2(t) = \frac{3}{\sqrt{10}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$; $\dot{E}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t(-\sin t, -\cos t, 2\sin 2t, 2\cos 2t)$;

$\langle \dot{E}_3(t), E_4(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(2+2) = \frac{4}{\sqrt{10}}$; $k_3(t) = \frac{4}{\sqrt{10}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Найти репер Френе, кривизну и кручение кривой $\alpha(t) = {}^t(a\operatorname{ch} t, a\operatorname{sh} t, at)$.

$\dot\alpha(t) = {}^t(a\operatorname{sh} t, a\operatorname{ch} t, a)$; $|\dot\alpha(t)| = a\sqrt{\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t + 1} = a\sqrt{2}\operatorname{ch} t$;

$E_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t\left(tht, 1, \frac{1}{\operatorname{ch} t}\right)$; $\ddot\alpha(t) = {}^t(a\operatorname{ch} t, a\operatorname{sh} t, 0)$; $\dot\alpha(t) \times \ddot\alpha(t) =$

$\begin{vmatrix} a\operatorname{sh} t & a\operatorname{ch} t & e_1 \\ a\operatorname{ch} t & a\operatorname{sh} t & e_2 \\ a & 0 & e_3 \end{vmatrix} = a^2{}^t(-\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, \operatorname{sh}^2 t - \operatorname{ch}^2 t) = a^2(-\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, -1)$;

$|\dot\alpha(t) \times \ddot\alpha(t)| = a^2\sqrt{2}\operatorname{ch} t$; $E_3(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t\left(-tht, 1, -\frac{1}{\operatorname{ch} t}\right)$;

$E_2(t) = E_3(t) \times E_1(t) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -tht & tht & e_1 \\ 1 & 1 & e_2 \\ -\frac{1}{\operatorname{ch} t} & \frac{1}{\operatorname{ch} t} & e_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}{}^t\left(\frac{2}{\operatorname{ch} t}, 0, -2tht\right) =$

${}^t\left(\frac{1}{\operatorname{ch} t}, 0, -tht\right)$. Кривизна $k(t) = \frac{|\dot\alpha(t) \times \ddot\alpha(t)|}{|\dot\alpha(t)|^3} = \frac{a^2\sqrt{2}\operatorname{ch} t}{2a^3\sqrt{2}\operatorname{ch}^3 t} = \frac{1}{2a\operatorname{ch}^2 t}$;

$\dddot\alpha(t) = {}^t(a\operatorname{sh} t, a\operatorname{ch} t, 0)$;

$\dot\alpha(t)\ddot\alpha(t)\dddot\alpha(t) = \langle\dot\alpha(t) \times \ddot\alpha(t), \dddot\alpha(t)\rangle = a^3(-\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t) = a^3$; кручение

$\kappa(t) = \frac{\dot\alpha(t)\ddot\alpha(t)\dddot\alpha(t)}{|\dot\alpha(t) \times \ddot\alpha(t)|^2} = \frac{a^3}{2a^4\operatorname{ch}^2 t} = \frac{1}{2a\operatorname{ch}^2 t}$.

Найти кривизну и кручение кривой $\alpha(t) = {}^t(2t, \ln t, t^2)$.

Кривая определена при всех $t > 0$. Считаем производные:
$\dot\alpha(t) = {}^t(2, \frac{1}{t}, 2t)$, $\ddot\alpha(t) = {}^t(0, -\frac{1}{t^2}, 2)$, $\dddot\alpha(t) = {}^t(0, \frac{2}{t^3}, 0)$. Длина
$|\dot\alpha| = \sqrt{4 + \frac{1}{t^2} + 4t^2} = \sqrt{(2t + \frac{1}{t})^2} = 2t + \frac{1}{t} = \frac{2t^2+1}{t}$. Найдем
$\dot\alpha \times \ddot\alpha = \begin{vmatrix} 2 & 0 & e_1 \\ 1/t & -1/t^2 & e_2 \\ 2t & 2 & e_3 \end{vmatrix} = {}^t(\frac{4}{t}, -4, -\frac{2}{t^2})$ и
$|\dot\alpha \times \ddot\alpha| = \sqrt{\frac{16}{t^2} + 16 + \frac{4}{t^4}} = 2(2 + \frac{1}{t^2}) = \frac{2(2t^2+1)}{t^2}$,
$\dot\alpha\ddot\alpha\dddot\alpha = \langle \dot\alpha \times \ddot\alpha, \dddot\alpha \rangle = -\frac{8}{t^3}$.

Теперь находим кривизну $k(t) = \frac{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|}{|\dot\alpha|^3} = \frac{2(2t^2+1)t^3}{t^2(2t^2+1)^3} = \frac{2t}{(2t^2+1)^2}$ и
кручение $\kappa(t) = \frac{\dot\alpha\ddot\alpha\dddot\alpha}{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|^2} = -\frac{8t^4}{4t^3(2t^2+1)^2} = -\frac{2t}{(2t^2+1)^2}$.

Пусть $\alpha(s) : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ – произвольная кривая единичной скорости. Доказать, что существует такой вектор $\vec{\omega}$, что для векторов репера Френе выполняются тождества $\dot{\vec{\tau}} = \vec{\omega} \times \vec{\tau}$, $\dot{\vec{\nu}} = \vec{\omega} \times \vec{\nu}$, $\dot{\vec{\beta}} = \vec{\omega} \times \vec{\beta}$.

Разложим вектор $\vec{\omega}$ по базису Френе: $\vec{\omega} = p\vec{\tau} + q\vec{\nu} + r\vec{\beta}$.
$\dot{\vec{\tau}} = k\vec{\nu}$; $\vec{\omega} \times \vec{\tau} = (p\vec{\tau} + q\vec{\nu} + r\vec{\beta}) \times \vec{\tau} = -q\vec{\beta} + r\vec{\nu} \Rightarrow q = 0$, $r = k$.
$\dot{\vec{\nu}} = -k\vec{\tau} + \kappa\vec{\beta}$; $\vec{\omega} \times \vec{\nu} = (p\vec{\tau} + k\vec{\beta}) \times \vec{\nu} = p\vec{\beta} - k\vec{\tau} \Rightarrow p = \kappa$.
Таким образом, $\vec{\omega} = \kappa\vec{\tau} + k\vec{\beta}$.
Проверим последнее условие. $\dot{\vec{\beta}} = -\kappa\vec{\nu}$, $\vec{\omega} \times \vec{\beta} = (\kappa\vec{\tau} + k\vec{\beta}) \times \vec{\beta} = -\kappa\vec{\nu}$.
$\vec{\omega}$ – вектор Дарбу – вектор мгновенной угловой скорости репера Френе при его движении по кривой с единичной скоростью.

Составить натуральные уравнения кривой $\alpha(t) = {}^t(a\operatorname{ch} t, a\operatorname{sh} t, at)$.

В задаче на с.147 №1 а) найдены кривизна и кручение данной кривой:

кривизна $k(t) = \varkappa(t) = \dfrac{1}{2a\operatorname{ch}^2 t}$.

$\dot{\alpha}(t) = {}^t(a\operatorname{sh} t, a\operatorname{ch} t, a)$; $|\dot{\alpha}(t)| = a\sqrt{\operatorname{sh}^2 t + \operatorname{ch}^2 t + 1} = a\sqrt{2}\operatorname{ch} t$;

$s(t) = \int_0^t a\sqrt{2}\operatorname{ch}\tau d\tau = a\sqrt{2}\operatorname{sh}\tau|_0^t = a\sqrt{2}\operatorname{sh} t$; $\operatorname{sh} t = \dfrac{s}{a\sqrt{2}}$;

$\operatorname{ch}^2 t = \operatorname{sh}^2 t + 1 = \dfrac{s^2}{2a^2} + 1 = \dfrac{s^2 + 2a^2}{2a^2}$;

$\dfrac{1}{2a\operatorname{ch}^2 t} = \dfrac{2a^2}{2a(s^2 + 2a^2)} = \dfrac{a}{s^2 + 2a^2}$;

натуральные уравнения кривой $\alpha(t)$: $k = \varkappa = \dfrac{a}{s^2 + 2a^2}$.

Доказать, что кривая $\alpha(t) = {}^t(2t^2, 3t^3 - 2t, t^3 + 2t^2 + 4, -t^3 + t^2 + t + 1)$ лежит в некоторой гиперплоскости и написать уравнение этой гиперплоскости. Найти последний вектор репера Френе данной кривой.

$\dot\alpha(t) = {}^t(4t, 9t^2 - 2, 3t^2 + 4t, -3t^2 + 2t + 1)$; $\ddot\alpha(t) = {}^t(4, 18t, 6t + 4, -6t + 2)$;
$\dddot\alpha(t) = {}^t(0, 18, 6, -6)$; $\alpha^{iv}(t) = O$.
Следовательно, $\det([\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha, \alpha^{iv}]) \equiv 0$, поэтому кривая $\alpha(t)$ лежит в некоторой гиперплоскости.

Вычислим $\dot\alpha \times \ddot\alpha \times \dddot\alpha = \begin{vmatrix} 4t & 4 & 0 & e_1 \\ 9t^2 - 2 & 18t & 18 & e_2 \\ 3t^2 + 4t & 6t + 4 & 6 & e_3 \\ -3t^2 + 2t + 1 & -6t + 2 & -6 & e_4 \end{vmatrix} =$

$$6 \begin{vmatrix} 4t & 4 & 0 & e_1 \\ 9t^2 - 2 & 18t & 3 & e_2 \\ 3t^2 + 4t & 6t + 4 & 1 & e_3 \\ -3t^2 + 2t + 1 & -6t + 2 & -1 & e_4 \end{vmatrix} = 6 \begin{vmatrix} 4t & 4 & 0 & e_1 \\ -2 & 0 & 3 & e_2 \\ +4t & 4 & 1 & e_3 \\ 2t + 1 & 2 & -1 & e_4 \end{vmatrix} =$$

$$12 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & e_1 \\ -2 & 0 & 3 & e_2 \\ 0 & 2 & 1 & e_3 \\ 1 & 1 & -1 & e_4 \end{vmatrix} = -24 \begin{vmatrix} -2 & 3 & e_2 \\ 0 & 1 & e_3 \\ 1 & -1 & e_4 \end{vmatrix} - 12e_1 \begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$-24(-e_2 + e_3 - 2e_4) - 12e_1 \begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 24(e_2 - e_3 + 2e_4);\ E_4 = \frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(0, 1, -1, 2);$$

$\alpha(0) = {}^t(0, 0, 4, 1)$; уравнение гиперплоскости $\langle p - \alpha(0), E_4\rangle = 0$ или
$x_2 - (x_3 - 4) + 2(x_4 - 1) = 0$ или $x_2 - x_3 + 2x_4 + 2 = 0$.

Доказать, что если все нормальные плоскости бирегулярной кривой $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ параллельны некоторому постоянному вектору $\vec{e}$, то кривая является плоской.

Нормальная плоскость перпендикулярна к касательному вектору $\vec{\tau} = E_1$. Отсюда $\langle E_1, \vec{e} \rangle \equiv 0$ и $\langle \dot{\alpha}, \vec{e} \rangle \equiv 0$. Интегрируем тождество:

$$\int_{t_0}^{t} \langle \dot{\alpha}(\theta), \vec{e} \rangle d\theta \equiv const; \ \langle \int_{t_0}^{t} \dot{\alpha}(\theta) d\theta, \vec{e} \rangle \equiv const, \ \langle \alpha(t) - \alpha(t_0), \vec{e} \rangle \equiv const,$$

при $t = t_0$ получаем $const = 0$. Таким образом, $\langle \alpha(t) - \alpha(t_0), \vec{e} \rangle \equiv 0$ и образ кривой лежит в плоскости, проходящей через точке $\alpha(t_0)$ перпендикулярно вектору $\vec{e}$.