Тема: Занятие 2

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Дифференциальная геометрия и топология (практика)
для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
III семестр

Задачи в аудитории

С.В.Сизый с.58 №1, 2, 3, с.59 № 6, 9 б), в), 10, 13, 15 в), с. 67 № 1, 2, 3, 5, 6, с.72 №2, с.73 №4 б), 5, 6 а), 7.

Рекомендуемое домашнее задание

с. 59 № 5, 7, 9 а), 11, 15 б), с.67 №4, с.72 №1, с.73 №4 а), 6 б).

С.В.Сизый с.58 №1

Астроида

Отрезок AB длины a скользит своими концами по осям прямоугольной декартовой системы координат. Прямые AC и BC, параллельные координатрным осям, пересекаются в точке C, из которой проведен перпендикуляр CM к AB. Найти параметрическое задание траектории точки M (астроида).

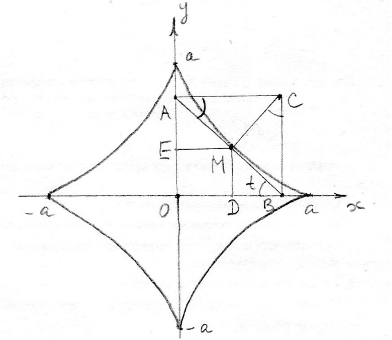

Рис. 1

В качестве параметра возьмем $t = \angle OBA$. Тогда $\angle BAC = \angle OBA = \angle BCM$. Из $\triangle ABC$: $OB = AC = a\cos t$,
$OA = BC = a\sin t$

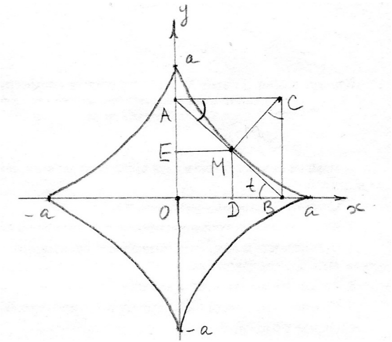

Рис. 1

Из $\triangle ACM$: $AM = AC\cos t = a\cos^2 t$;
Из $\triangle BCM$: $MB = BC\sin t = a\sin^2 t$;
Из $\triangle AEM$: $x(t) = EM = AM\cos t = a\cos^3 t$;
Из $\triangle MDB$: $y(t) = MD = MB\sin t = a\sin^3 t$.
Параметризация астроиды: $\alpha(t) = {}^t(a\cos^3 t, a\sin^3 t)$.
Координатное уравнение астроиды: $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$.

Циклоиды

Круг радиуса a катится по прямой без скольжения. Найти параметризацию траектории точки K, жестко связанной с кругом и находящейся на расстоянии d от его центра. При $d = a$ получается циклоида, при $d < a$ – укороченная циклоида, при $d > a$ – удлиненная циклоида.

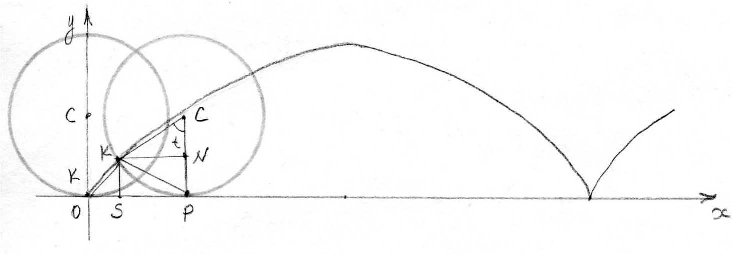

Рис. 2

t – угол поворота круга вокруг центра C; $d = a$; $K(x, y)$;
$x = OS = OP - SP$; $y = KS = NP$; $SP = KN = a \sin t$; $CN = a \cos t$;
$OP = at$; $x = at - a \sin t = a(t - \sin t)$, $y = a - a \cos t = a(1 - \cos t)$.
Параметризация циклоиды: $\alpha(t) = {}^t(a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$.
При $d \neq a$: $\beta(t) = {}^t(at - d \sin t, a - d \cos t)$.

Логарифмическая спираль

Луч OL вращается вокруг точки O с постоянной угловой скоростью ω. Точка M движется по прямой OL со скоростью, пропорциональной расстоянию $|OM|$. Найти параметризацию траектории точки M.

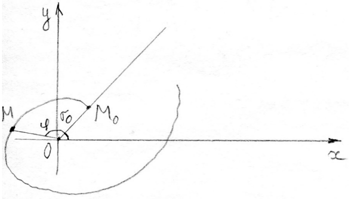

Рис. 3

Зафиксируем полярную систему координат с полюсом в точке O. Параметр t – время. Угол $\varphi = \omega t$ поворота луча OL вокруг точки O относительно полярного луча Ox. Координата $r(t)$ точки M на луче OL; скорость движения точки M по нему $v(t) = \dot{r}(t)$. По условию $v(t) = ar(t)$, где $a > 0$ – постоянная. Получается дифференциальное уравнение $\frac{dr}{dt} = ar$. Решаем его: $\frac{dr}{r} = at$; $\ln r = at + C$; $r(t) = r_0 e^{at}$. Параметризация логарифмической спирали в полярных координатах: $\varphi = \omega t$, $r(t) = r_0 e^{at}$. В прямоугольной декартовой системе координат, связанной со взятой полярной: $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$; $\alpha(t) = {}^t(r_0 e^{at}\cos\omega t, r_0 e^{at}\sin\omega t)$.

Кривая Вивиани

Найти параметризацию кривой, образ которой есть пересечение сферы радиуса R и прямого кругового цилиндра диаметра R, одна из образующих которого проходит через центр сферы.

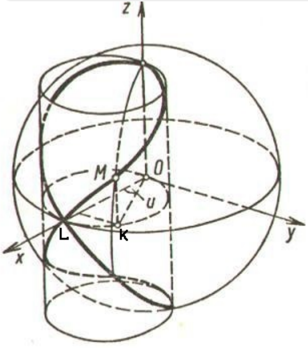

Рис. 4

Изображение взято с сайта school-collection.edu.ru

В качестве параметра возьмем угол u. В $\triangle OKL$ $\angle K$ – прямой, $|OL| = R$, поэтому $|OK| = R\cos u$.

Точка K – проекция точки M на плоскость Oxy. Следовательно, $x_M = |OK|\cos u = R\cos^2 u$, $y_M = |OK|\sin u = R\cos u \sin u$. Так как точка M лежит на сфере радиуса R,
$z_M^2 = R^2 - x_M^2 - y_M^2 = R^2 - |OK|^2 = R^2(1-\cos^2 u) = R^2\sin^2 u$.
Параметризация верхней петли линии Вивиани:
$\alpha(t) = {}^t(R\cos^2 u, R\cos u \sin u, R\sin u)$;
параметризация нижней петли линии Вивиани:
$\beta(t) = {}^t(R\cos^2 u, R\cos u \sin u, -R\sin u)$.

Касательная к кривой

Написать уравнения касательной к кривой $\alpha(t)$ в точке $t_0 = 1$, если б) $\alpha(t) = {}^t(t^2, t^3, 2t)$; в) $\alpha(t) = {}^t(t^2, t^3, 2t, t^4)$.

Уравнение касательной: $p = \alpha(t_0) + \dot{\alpha}(t_0)u$.

б) $\alpha(1) = {}^t(1, 1, 2)$; $\dot{\alpha}(t) = {}^t(2t, 3t^2, 2)$; $\dot{\alpha}(1) = {}^t(2, 3, 2)$.

Касательная $p = {}^t(1, 1, 2) + {}^t(2, 3, 2)u$ или $\begin{cases} x = 1 + 2u, \\ y = 1 + 3u, \\ z = 2 + 2u. \end{cases}$

в) $\alpha(1) = {}^t(1, 1, 2, 1)$; $\dot{\alpha}(t) = {}^t(2t, 3t^2, 2, 4t^3)$; $\dot{\alpha}(1) = {}^t(2, 3, 2, 4)$.

Касательная $p = {}^t(1, 1, 2, 1) + {}^t(2, 3, 2, 4)u$ или $\begin{cases} x_1 = 1 + 2u, \\ x_2 = 1 + 3u, \\ x_3 = 2 + 2u, \\ x_4 = 1 + 4u. \end{cases}$

Найти наиболее удаленные от начала координат касательные к астроиде $\alpha(t) = {}^t(a\cos^3 t, a\sin^3 t)$.

Касательная к астроиде в точке t_0 проходит через точку ${}^t(a\cos^3 t_0, a\sin^3 t_0)$ и имеет направляющий вектор $\dot{\alpha}(t_0) = {}^t(-3a\cos^2 t_0 \sin t_0, 3a\sin^2 t_0 \cos t_0)$.
Каноническое уравнение касательной к астроиде в точке t_0:
$\dfrac{x - a\cos^3 t_0}{-3a\cos^2 t_0 \sin t_0} = \dfrac{y - a\sin^3 t_0}{3a\sin^2 t_0 \cos t_0}$. Считая, что $\cos t_0 \neq 0$ и $\sin t_0 \neq 0$, раскроем пропорцию, сократив на $3a\cos t_0 \sin t_0$:
$(x - a\cos^3 t_0)\sin t_0 = -(y - a\sin^3 t_0)\cos t_0$,
$x\sin t_0 + y\cos t_0 - a(\cos^2 t_0 + \sin^2 t_0)\sin t_0 \cos t_0 = 0$,
$x\sin t_0 + y\cos t_0 - a\sin t_0 \cos t_0 = 0$.
Расстояние от начала коодинат до этой прямой равно
$d = \dfrac{|-a\sin t_0 \cos t_0|}{\sqrt{\sin^2 t_0 + \cos^2 t_0}} = \frac{a}{2}|\sin 2t_0|$. Максимальное значение получается при $2t_k = \pi/2 + \pi k$ $(k = 0, 1, 2, 3)$, т.е. при $t_0 = \pi/4$, $t_1 = 3\pi/4$, $t_2 = 5\pi/4$, $t_3 = 7\pi/4$.

Найти длину кардиоиды $\rho = a(1+\cos\varphi)$.

Перейдем к декартовой системе координат: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$;
$\dot{x} = \dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi$; $\dot{y} = \dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi$;
$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = (\dot{\rho}\cos\varphi - \rho\sin\varphi)^2 + (\dot{\rho}\sin\varphi + \rho\cos\varphi)^2 = \dot{\rho}^2\cos^2\varphi - 2\dot{\rho}\rho\cos\varphi\sin\varphi + \rho^2\sin^2\varphi + 2\dot{\rho}\rho\cos\varphi\sin\varphi + \dot{\rho}^2\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi = \dot{\rho}^2 + \rho^2$.
Для кардиоиды $\alpha(\varphi) = {}^t(a(1+\cos\varphi)\cos\varphi, a(1+\cos\varphi)\sin\varphi)$ имеем $-\pi \le \varphi \le \pi$ и
$\dot{\rho}^2 + \rho^2 = a^2\sin^2\varphi + a^2(1+2\cos\varphi+\cos^2\varphi) = 2a^2(1+\cos\varphi) = 4a^2\cos^2(\varphi/2)$.
Длина кардиоиды

$$\ell = \int_{-\pi}^{\pi} |\dot{\alpha}(\varphi)| d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} 2a\cos(\varphi/2) d\varphi = 4a\sin(\varphi/2)\Big|_{-\pi}^{\pi} = 8a.$$

Найти длину дуги между двумя произвольными точками следующих кривых:
в) $\alpha(t) = {}^t(a \operatorname{ch} t, a \operatorname{sh} t, at)$.

$$\dot{\alpha}(t) = {}^t(a \operatorname{sh} t, a \operatorname{ch} t, a);\ \ell = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{a^2 \operatorname{sh}^2 t + a^2 \operatorname{ch}^2 t + a^2} dt =$$
$$a \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{2 \operatorname{ch}^2 t} dt = a\sqrt{2} \int_{t_0}^{t_1} \operatorname{ch} t dt = a\sqrt{2}(\operatorname{sh}(t_1) - \operatorname{sh}(t_0)).$$

1. Пусть $t, \theta \in (-\infty, +\infty)$. Показать, что кривые $\alpha(t) = {}^t(t, t)$ и $\beta(\theta) = {}^t(\theta^3, \theta^3)$ не эквивалентны, хотя имеют одинаковый образ.
2. Пусть теперь $t, \theta \in (0, +\infty)$. Показать, что теперь кривые $\alpha(t) = {}^t(t, t)$ и $\beta(\theta) = {}^t(\theta^3, \theta^3)$ положительно эквивалентны.
3. Эквивалентны ли кривые $\alpha(\tau) = {}^t(a\cos\tau, b\sin\tau)$ и $\beta(t) = {}^t\left(a\frac{1-t^2}{1+t^2}, b\frac{2t}{1+t^2}\right)$, если $\tau \in (-\pi, \pi)$, $t \in (-\infty, +\infty)$? А если $t, \tau \in (-\infty, +\infty)$?

1. Замена $t = \varphi(\theta) = \theta^3$ не является регулярной, так как $\dot{\varphi}(\theta) = 3\theta^2$ обращается в нуль при $\theta = 0$. Образы кривых совпадают и являются множеством всех точек прямой $y = x$.
2. Теперь замена $t = \varphi(\theta) = \theta^3$ является регулярной, так как $\dot{\varphi}(\theta) = 3\theta^2$ не обращается в нуль при $\theta \in (0, +\infty)$.
3. Замена $t = \mathrm{tg}(\tau/2)$ является регулярной при $\tau \in (-\pi, \pi)$, $t \in (-\infty, +\infty)$ и не является регулярной при $\tau \in (-\infty, +\infty)$.

5. Показать, что образ кривой $\alpha(t) = {}^t(a \operatorname{ch} t, b \operatorname{sh} t)$ – ветвь гиперболы.

6. Показать, что $\alpha(t) = {}^t\left(a \ln \dfrac{t+\sqrt{a^2+t^2}}{a}, \sqrt{a^2+t^2}\right)$ – параметризация цепной линии $y = a \operatorname{ch}(x/a)$.

5. $x(t) = a \operatorname{ch} t > 0$; $y(t) = b \operatorname{sh} t$ при $t \in (-\infty, +\infty)$ принимает значения от $-\infty$ до $+\infty$ и $\frac{x(t)^2}{a^2} - \frac{y(t)^2}{b^2} = \operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$. Получается правая ветвь гиперболы.

6. $a \operatorname{ch}\left(\ln(t+\sqrt{a^2+t^2})\right) = \dfrac{a}{2}\left(\dfrac{t+\sqrt{a^2+t^2}}{a} + \dfrac{a}{t+\sqrt{a^2+t^2}}\right) =$

$$\frac{a}{2}\frac{(t+\sqrt{a^2+t^2})^2+a^2}{a(t+\sqrt{a^2+t^2})} = \frac{t^2+2t\sqrt{a^2+t^2}+a^2+t^2+a^2}{2(t+\sqrt{a^2+t^2})} =$$

$$\frac{t^2+a^2+t\sqrt{a^2+t^2}}{t+\sqrt{a^2+t^2}} = \frac{\sqrt{a^2+t^2}(\sqrt{a^2+t^2}+t)}{t+\sqrt{a^2+t^2}} = \sqrt{a^2+t^2}.$$

Найти кривую единичной скорости, положительно эквивалентную цепной линии $y = a\,\mathrm{ch}(x/a)$.

$\alpha(t) = {}^t(t, a\,\mathrm{ch}(t/a))$; $\dot\alpha(t) = {}^t(1, \mathrm{sh}(t/a))$; $|\dot\alpha(t)| = \sqrt{1+\mathrm{sh}^2(t/a)} = \mathrm{ch}(t/a)$;

$s(t) = \int_0^t |\dot\alpha(\tau)| d\tau = \int_0^t \mathrm{ch}(\tau/a) d\tau = a\,\mathrm{sh}(\tau/a)\,\Big|_0^t = a\,\mathrm{sh}(t/a)$;

$s = a\,\mathrm{sh}(t/a)$; $t = aArcsh(s/a)$;

$u = Arcshv$; $\mathrm{sh}\,u = v$; $\dfrac{e^u - e^{-u}}{2} = v$; $\dfrac{e^{2u}-1}{2e^u} = v$; $e^u = w$;

$w^2 - 2vw - 1 = 0$; $w = v \pm \sqrt{v^2+1}$; $w > 0 \Rightarrow w = v + \sqrt{v^2+1}$;

$u = \ln w = \ln(v + \sqrt{v^2+1})$;

$t = a \ln \dfrac{s+\sqrt{a^2+s^2}}{a}$; $a\,\mathrm{ch}(t/a) = \sqrt{a^2+s^2}$ (см. предыдущую задачу).

$\beta(s) = {}^t\left(a \ln \frac{s+\sqrt{a^2+s^2}}{a}, \sqrt{a^2+s^2}\right)$ – кривая единичной скорости, положительно эквивалентная цепной линии.

Составить натуральную параметризацию окружности $x^2+y^2+z^2=R^2$, $x+y+z=0$, лежащей в $\mathbb{R}^3$.

Изменим систему координат так, чтобы плоскость $\pi : x+y+z=0$ стала плоскостью Ox_1y_1.
$f_3=\frac{1}{\sqrt{3}}{}^t(1,1,1)$; $f_1=\frac{1}{\sqrt{2}}{}^t(1,-1,0)$; $f_2=f_3\times f_1=\frac{1}{\sqrt{6}}{}^t(-1,-1,2)$.
Параметрические уравнения плоскости π:
$x=\frac{u}{\sqrt{2}}-\frac{v}{\sqrt{6}}$, $y=-\frac{u}{\sqrt{2}}-\frac{v}{\sqrt{6}}$, $z=2\frac{v}{\sqrt{6}}$.
Координатное уравнение данной окружности:
$\frac{u^2}{2}-2\frac{uv}{2\sqrt{3}}+\frac{v^2}{6}+\frac{u^2}{2}+2\frac{uv}{2\sqrt{3}}+\frac{v^2}{6}+\frac{4v^2}{6}=R^2$; $u^2+v^2=R^2$.
Ее параметризация на плоскости Ouv: $\alpha(t)={}^t(R\cos t, R\sin t)$;
параметризация в пространстве $\mathbb{R}^3$:

$$\beta(t)={}^tR\left(\left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}-\frac{\sin t}{\sqrt{6}}\right),-\left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}+\frac{\sin t}{\sqrt{6}}\right),2\frac{\sin t}{\sqrt{6}}\right).$$

$$\dot\beta(t)={}^tR\left(\left(-\frac{\sin t}{\sqrt{2}}-\frac{\cos t}{\sqrt{6}}\right),\left(\frac{\sin t}{\sqrt{2}}-\frac{\cos t}{\sqrt{6}}\right),2\frac{\cos t}{\sqrt{6}}\right);\ \dot\beta(t)^2=R^2;$$

$|\dot\beta(t)|=R$; $s(t)=\int_0^t|\dot\beta(\tau)|d\tau=Rt$; $t=\frac{s}{r}$;

Натуральная параметризация:

$$\gamma(s)={}^tR\left(\left(\frac{\cos\frac{s}{r}}{\sqrt{2}}-\frac{\sin\frac{s}{r}}{\sqrt{6}}\right),-\left(\frac{\cos\frac{s}{r}}{\sqrt{2}}+\frac{\sin\frac{s}{r}}{\sqrt{6}}\right),2\frac{\sin\frac{s}{r}}{\sqrt{6}}\right).$$

С.В.Сизый с.73 №5

Записать натуральную параметризацию винтовой линии
$\alpha(t) = {}^t(a\cos t, a\sin t, bt)$.

$\dot{\alpha}(t) = {}^t(-a\sin t, a\cos t, b)$; $|\dot{\alpha}(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2+b^2}$;
$s(t) = \displaystyle\int_0^t |\dot{\alpha}(\tau)|d\tau = t\sqrt{a^2+b^2}$; $t = \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$;
Натуральная параметризация:

$$\beta(s) = {}^t\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, \frac{bs}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$

Перепараметризовать кривую $\alpha(t) = {}^t(e^t \cos t, e^t \sin t, e^t)$ натуральным параметром.

$\dot\alpha(t) = {}^t(e^t(\cos t - \sin t), e^t(\sin t + \cos t), e^t)$;
$|\dot\alpha(t)| = \sqrt{e^{2t}((\cos t - \sin t)^2 + (\sin t + \cos t)^2 + 1)} =$
$e^t\sqrt{\cos^2 t - 2\cos t \sin t + \sin^2 t + \sin^2 t + 2\sin t \cos t + \cos^2 t + 1} = e^t\sqrt{3}$;
$s(t) = \displaystyle\int_0^t |\dot\alpha(\tau)| d\tau = \int_0^t e^\tau \sqrt{3} d\tau = (e^t - 1)\sqrt{3}$; $t = \ln\left(\dfrac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)$.
Натуральная параметризация:

$$\beta(s) = \left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right){}^t\left(\cos\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right), \sin\ln\left(\frac{s}{\sqrt{3}} + 1\right), 1\right).$$

Найти кривую единичной скорости, положительно эквивалентную кривой $\alpha(t) : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4 : \alpha(t) = {}^t(a\cos t, a\sin t, b\cos t, b\sin t)$.

$\dot{\alpha}(t) = {}^t(-a\sin t, a\cos t, -b\sin t, b\cos t)$;
$|\dot{\alpha}(t)| = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t} = \sqrt{a^2+b^2}$;
$s(t) = \int_0^t |\dot{\alpha}(\tau)| d\tau = t\sqrt{a^2+b^2}$; $t = \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}$;
Кривая единичной скорости, положительно эквивалентная данной кривой:

$$\beta(s) = {}^t\left(a\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, a\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\cos\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}, b\sin\frac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}\right).$$