Тема: Введение. Предварительные сведения

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Дифференциальная геометрия и топология (практика)
для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
III семестр

Описание занятия

Задачи в аудитории

С.В.Сизый с.14 №1, 2; с.18 №2, 3; с.39 № 3, 4, 5, 6; с.45 № 1 а), г), 2 б), с.51 2, 3, 7, 11, 12, 13.

Рекомендуемое домашнее задание

с.14 № 1 $g_i^j h_j^k g_k^i$, $g_i^j h_j^k g_k^\ell h_\ell^i$; с.18 № 1; с.22 № 2; с.45 № 1 б), в) 2 а), с.39 1, с. 51 5, 6.

Привыкаем к обозначениям Эйнштейна.

Пусть $(g_i^j) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ и $(h_i^j) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ – две квадратные матрицы (номер строки внизу). Вычислить $g_i^k h_k^j$ и $g_k^j h_i^k$ и сравнить их. Вычислить g_i^i, $g_i^j g_j^i$, $g_i^j h_j^i$.

$$(g_i^k h_k^j) = \left(\sum_{k=1}^3 g_i^k h_k^j\right) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -7 & -4 & -5 \\ 4 & 7 & 4 \\ -26 & 10 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(g_k^j h_i^k) = {}^t\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot {}^t\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -5 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 10 & 5 & 11 \\ 4 & 10 & 10 \end{pmatrix};$$

$g_i^i = \mathrm{tr}(g_i^j) = 4$; $g_i^j g_j^i = \mathrm{tr}((g_i^j)^2) = 42$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & -4 & -2 \\ 2 & 15 & 0 \\ 8 & 8 & 16 \end{pmatrix};$$

$g_i^j h_j^i = \mathrm{tr}(g_i^k h_k^j) = 2.$

Являются ли базисы
$a_1 = {}^t(1,1,1,1)$, $a_2 = {}^t(1,1,-1,-1)$, $a_3 = {}^t(1,-1,1,-1)$, $a_4 = {}^t(1,-1,-1,1)$
и $b_1 = {}^t(1,2,3,4)$, $b_2 = {}^t(2,3,1,2)$, $b_3 = {}^t(1,1,1,-1)$, $b_4 = {}^t(1,0,-2,-6)$
одинаково ориентированными?

Чтобы определить это, вычислим определители матриц перехода от стандартного базиса к данным базисам.

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -8 \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$-8 \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -16 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -16;$$

$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & -1 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \\ 3 & 4 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \\ -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -1.$$ Базисы одинаково ориентированы.

Пусть (a_1, a_2, a_3, a_4) – некоторый базис пространства $\overrightarrow{\mathbb{R}^4}$. Рассмотрим два орфлага $\mathcal{L}(a_1) \subset \mathcal{L}(a_1, a_2) \subset \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3) \subset \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ и
$\mathcal{L}(a_1) \subset \mathcal{L}(a_1, a_1 + a_2) \subset \mathcal{L}(a_1, a_2, a_2 + a_3) \subset \mathcal{L}(a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_2 + a_4)$.
Совпадают эти орфлаги или нет?

$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$; базисы (a_1, a_2) и $(a_1, a_1 + a_2)$ ориентированы одинаково;

$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$;

базисы (a_1, a_2, a_3) и $(a_1, a_2, a_2 + a_3)$ ориентированы одинаково;

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$;

базисы (a_1, a_2, a_3, a_4) и $(a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_2 + a_4)$ ориентированы одинаково;
орфлаги совпадают.

Доказать, что значения вектор-функций $x_1(t) = {}^t(\cos t, \sin t, e^{2t})$, $x_2(t) = {}^t(-\sin t, \cos t, 2e^{2t})$, $x_3(t) = {}^t(-\cos t, -\sin t, 4e^{2t})$ в любой момент времени $t \in \mathbb{R}$ образуют базис пространства $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$.

$$\det([x_1(t), x_2(t), x_3(t)]) = \begin{vmatrix} \cos t & -\sin t & -\cos t \\ \sin t & \cos t & -\sin t \\ e^{2t} & 2e^{2t} & 4e^{2t} \end{vmatrix} = e^{2t} + 4e^{2t} = 5e^{2t} \neq 0$$

в любой момент времени $t \in \mathbb{R}$ (разложили определитель по последней строке), что и требуется доказать.

Пусть $x(t) : I \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^3}$ – вектор-функция класса гладкости C^1 и $x(t) \neq \vec{0}$ при любом $t \in I$. Доказать, что вектор $x(t)$ имеет постоянное направление тогда и только тогда, когда в любой момент $t \in I$ векторы $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ коллинеарны.

Если вектор $x(t)$ имеет постоянное направление, то по определению производной векторы $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ коллинеарны.
Пусть векторы $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ коллинеарны. Положим $x(t) = \lambda(t)e(t)$, где $|e(t)| \equiv 1$, $\lambda(t) = |x(t)|$. Тогда $\dot{x}(t) = \lambda(t)\dot{e}(t) + \dot{\lambda}(t)e(t)$. Из $|e(t)| \equiv 1$ следует $e(t) \perp \dot{e}(t)$ $\forall t \in I$ и $e(t) \parallel x(t) \parallel \dot{x}(t)$. Следовательно, $\langle \dot{x}(t), \dot{e}(t) \rangle \equiv 0$. Так как $\langle \lambda(t)\dot{e}(t) + \dot{\lambda}(t)e(t), \dot{e}(t) \rangle = \lambda(t)\dot{e}(t)^2$, имеем $\lambda(t)\dot{e}(t)^2 \equiv 0$. Из $\lambda(t) \neq 0$ $\forall t \in I$ следует $\dot{e}(t)^2 \equiv 0$ и $\dot{e}(t) \equiv 0$. Таким образом, $e(t) \equiv 1$ и вектор $x(t)$ имеет постоянное направление.

Пусть $x(t) : I \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^3}$ – вектор-функция класса гладкости C^2 и для любого $t \in I$ выполнены два условия:
1) векторы $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ не коллинеарны, т.е. $x(t) \times \dot{x}(t) \neq \vec{0}$;
2) векторы $x(t)$, $\dot{x}(t)$ и $\ddot{x}(t)$ компланарны, т.е. $(x(t), \dot{x}(t), \ddot{x}(t)) \equiv 0$.
Доказать, что тогда вектор $x(t)$ всегда находится в некоторой фиксированной плоскости (т.е. годограф вектор-функции $x(t)$ является плоским).

Пусть $e(t)$ – орт, перпендикулярный к векторам $x(t)$, $\dot{x}(t)$ и $\ddot{x}(t)$. Тогда $\langle x(t), e(t)\rangle \equiv 0$, откуда $\langle \dot{x}(t), e(t)\rangle + \langle x(t), \dot{e}(t)\rangle \equiv 0$. Так как $\dot{x}(t) \perp e(t)$, имеем $\langle \dot{x}(t), e(t)\rangle \equiv 0$ и $\langle x(t), \dot{e}(t)\rangle \equiv 0$. Аналогично из $\langle \dot{x}(t), e(t)\rangle \equiv 0$ следует $\langle \ddot{x}(t), e(t)\rangle + \langle \dot{x}(t), \dot{e}(t)\rangle \equiv 0$. Поскольку $\ddot{x}(t) \perp e(t)$, получаем $\langle \dot{x}(t), \dot{e}(t)\rangle \equiv 0$. Таким образом, $\dot{e}(t) \perp x(t)$ и $\dot{e}(t) \perp \dot{x}(t)$. Так как $x(t) \not\parallel \dot{x}(t)$, отсюда следует $e(t) \parallel \dot{e}(t)$ для любого $t \in I$. В силу результата задачи 4 вектор $e(t)$ имеет постоянное направление. Поэтому вектор $x(t)$ для любого $t \in I$ лежит в плоскости, перпендикулярной к вектору $e(t)$.

Объяснить, используя задачу 5, почему траектория материальной точки, движущейся под действием центральной силы (но не проходящей через центр), является плоской. В частности, орбиты планет солнечной системы являются плоскими.

Рассмотрим вектор-функцию $x(t)$, направленную из центра в точки траектории. Тогда по 2-му закону Ньютона $m\ddot{x}(t) = \vec{F}(t)$. Так как сила центральная, $\vec{F}(t) \parallel x(t)$, следовательно, векторы $x(t)$, $\dot{x}(t)$ и $\ddot{x}(t)$ компланарны. При этом векторы $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ не коллинеарны, так как траектория не проходит через центр. По результату задачи 5 траектория является плоской.

Найти обобщенное векторное произведение векторов а) ${}^t(3,-4)$;
г) ${}^t(3,2,-1,4,1)$, ${}^t(0,2,1,0,1)$, ${}^t(1,-1,-1,4,5)$, ${}^t(-4,0,-1,0,2)$.
Вычислить объемы параллелотопов, построенных на данных векторах.

а) $p = \begin{vmatrix} 3 & e_1 \\ -4 & e_2 \end{vmatrix} = 4e_1 + 3e_2$; $V = |p| = \sqrt{16+9} = 5$;

$$\text{г) } p = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & -4 & e_1 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & e_2 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & e_3 \\ 4 & 0 & 4 & 0 & e_4 \\ 1 & 1 & 5 & 2 & e_5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -4 & e_1 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & e_2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & e_3 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & e_4 \\ -4 & 1 & 5 & 2 & e_5 \end{vmatrix} =$$

$$-4\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & e_1 \\ 3 & 2 & 0 & e_2 \\ 0 & 1 & -1 & e_3 \\ -4 & 1 & 2 & e_5 \end{vmatrix} - e_4\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -4 \\ 3 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & 1 & 5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$-4\begin{vmatrix} 2 & 0 & -4 & e_1 \\ 3 & 0 & 2 & e_2-2e_3 \\ 0 & 1 & -1 & e_3 \\ -4 & 0 & 3 & e_5-e_3 \end{vmatrix} - e_4\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & -4 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -4 & 0 & 6 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$4\begin{vmatrix} 2 & -4 & e_1 \\ 3 & 2 & e_2-2e_3 \\ -4 & 3 & e_5-e_3 \end{vmatrix} + e_4\begin{vmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -4 & 6 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$4(17e_1 + 10(e_2-2e_3) + 16(e_5-e_3) + e_4\left(2\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 6 \end{vmatrix}\right) =$$

$$68e_1 + 40e_2 - 144e_3 + 64e_5 + (-18-17-88)e_4 = 68e_1 + 40e_2 - 144e_3 - 123e_4 + 64e_5;$$

$p^2 = 41625$, $V = |p| = 15\sqrt{185}$.

Найти нормальный вектор единичной длины к подпространству, порожденному векторами $x(t) = {}^t(t^3+1, 3t^2, t^3-t^2, 2t^3)$, $\dot{x}(t)$ и $\ddot{x}(t)$. Объяснить, почему получившийся нормальный вектор постоянный.

$\dot{x}(t) = {}^t(3t^2, 6t, 3t^2-2t, 6t^2)$, $\ddot{x}(t) = {}^t(6t, 6, 6t-2, 12t)$; $x(t)\times\dot{x}(t)\times\ddot{x}(t) =$

$$\begin{vmatrix} t^3+1 & 3t^2 & 6t & e_1 \\ 3t^2 & 6t & 6 & e_2 \\ t^3-t^2 & 3t^2-2t & 6t-2 & e_3 \\ 2t^3 & 6t^2 & 12t & e_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^2+1 & 2t & 2 & e_1-e_3 \\ 3t^2 & 6t & 6 & e_2 \\ t^3-t^2 & 3t^2-2t & 6t-2 & e_3 \\ 2t^3 & 6t^2 & 12t & e_4 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} t^2+1 & 0 & 2 & e_1-e_3 \\ 3t^2 & 0 & 6 & e_2 \\ t^3-t^2 & -3t^2 & 6t-2 & e_3 \\ 2t^3 & -6t^2 & 12t & e_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t^2+1 & 0 & 2 & e_1-e_3 \\ 3t^2 & 0 & 6 & e_2 \\ t^3-t^2 & -3t^2 & 6t-2 & e_3 \\ 2t^2 & 0 & 4 & e_4-2e_3 \end{vmatrix} =$$

$$3t^2\begin{vmatrix} t^2+1 & 2 & e_1-e_3 \\ 3t^2 & 6 & e_2 \\ 2t^2 & 4 & e_4-2e_3 \end{vmatrix} = 6t^2\begin{vmatrix} t^2+1 & 1 & e_1-e_3 \\ 3t^2 & 3 & e_2 \\ 2t^2 & 2 & e_4-2e_3 \end{vmatrix} =$$

$$6t^2\begin{vmatrix} 1 & 1 & e_1-e_3 \\ 0 & 3 & e_2 \\ 0 & 2 & e_4-2e_3 \end{vmatrix} = 6t^2(3(e_4-2e_3)-2e_2) = 6t^2\,{}^t(0,-2,-6,3);$$ единичный нормальный вектор $n = \frac{1}{7}\,{}^t(0,-2,-6,3)$.

Этот вектор постоянный, потому что все значения вектор-функции $x(t)$ лежат в 3-мерном подпространстве $\mathcal{L}(n)^\perp$ пространства $\overrightarrow{\mathbb{R}^4}$.

Найти длины сторон и внутренние углы треугольника ABC в пространстве $\overrightarrow{\mathbb{R}^5}$, если в стандартном репере $A(2,4,2,4,2)$, $B(6,4,4,4,6)$, $C(5,7,5,7,2)$. Написать канонические уравнения высоты этого треугольника, проходящей через вершину A.

$\overrightarrow{AB} = {}^t(4,0,2,0,4)$, $\overrightarrow{AC} = {}^t(3,3,3,3,0)$, $\overrightarrow{BC} = {}^t(-1,3,1,3,-4)$, $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}| = 6$; треугольник равносторонний. Внутренние углы равны $\dfrac{\pi}{3}$. $\cos A = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \dfrac{\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\rangle}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{12+6}{36} = \dfrac{1}{2}$, аналогично находятся $\cos B = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right)$ и $\cos C = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}}\right)$.

Основание D высоты лежит на прямой (BC). Векторное уравнение этой прямой $Q = B + t\overrightarrow{BC}$; $D = B + t_0\overrightarrow{BC}$. вектор $\overrightarrow{AD}$ ортогонален к вектору $\overrightarrow{BC}$. $\overrightarrow{AD} = (B + t_0\overrightarrow{BC}) - A = \overrightarrow{AB} + t_0\overrightarrow{BC}$; $\langle\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}\rangle = 0$, $\langle\overrightarrow{AB} + t_0\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BC}\rangle = 0$, $\langle\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\rangle + t_0\overrightarrow{BC}^{\,2} = 0$; $-18 + 36t_0 = 0$, $t_0 = \dfrac{1}{2}$;

$AD = {}^t(4,0,2,0,4) + \frac{1}{2}{}^t(-1,3,1,3,-4) = {}^t(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}, 2) = \frac{1}{2}{}^t(7,3,5,3,4)$; $D(5\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}, 5\frac{1}{2}, 4)$ – середина отрезка $[BC]$; канонические уравнения высоты (AD): $\dfrac{x_1-2}{7} = \dfrac{x_2-4}{3} = \dfrac{x_3-2}{5} = \dfrac{x_4-4}{3} = \dfrac{x_5-2}{4}$.

Параллелотоп в $\overrightarrow{\mathbb{R}^4}$ построен на векторах $a_1 = {}^t(0,2,1,1)$, $a_2 = {}^t(1,-2,0,3)$, $a_3 = {}^t(2,2,1,-1)$, $a_4 = {}^t(3,2,2,5)$, отложенных от точки $p_0(3,1,0,1)$. Проверить, лежит ли точка $q(4,2,1,5)$ внутри этого параллелотопа или снаружи? Найти длину высоты, опущенной из конца вектора a_4 на грань (a_1, a_2, a_3) и написать параметрические уравнения этой высоты. Найти объем грани (a_1, a_2, a_3).

Точка q лежит внутри этого параллелотопа $\Leftrightarrow$ для координат $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ вектора $q - p_0 = {}^t(1,1,1,4)$ в базисе (a_1, a_2, a_3, a_4) выполняются условия $0 \le \lambda_j \le 1$ при всех $j = 1,2,3,4$. $q - p_0 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + \lambda_4 a_4$; $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \to$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -6 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to$$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_1 = -\frac{1}{4}, \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \lambda_3 = -\frac{3}{4}, \lambda_4 = 1$. Точка q лежит снаружи этого параллелотопа.

Конец вектора a_4, отложенного от точки p_0 – точка $r = p_0 + a_4 = {}^t(6,3,2,6)$. Прямая, на которой лежит высота, имеет направляющий вектор $a_1 \times a_2 \times a_3 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & e_1 \\ 2 & -2 & 2 & e_2 \\ 1 & 0 & 1 & e_3 \\ 1 & 3 & -1 & e_4 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & e_1 \\ 2 & -2 & 0 & e_2 \\ 1 & 0 & 0 & e_3 \\ 1 & 3 & -2 & e_4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & e_1 \\ 2 & -2 & 0 & e_2 \\ 1 & 0 & 0 & e_3 \\ 1 & 4 & 0 & e_1 + e_4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 2 & -2 & e_2 \\ 1 & 0 & e_3 \\ 1 & 4 & e_1 + e_4 \end{vmatrix} =$$

$$2\begin{vmatrix} 2 & -2 & e_2 \\ 1 & 0 & e_3 \\ 5 & 0 & e_1 + 2e_2 + e_4 \end{vmatrix} = 4(e_1 + 2e_2 + e_4 - 5e_3) = 4\,{}^t(1,2,-5,1);$$

параметрические уравнения высоты $x_1 = 6 + t$, $x_2 = 3 + 2t$, $x_3 = 2 - 5t$, $x_4 = 6 + t$; грань (a_1, a_2, a_3) проходит через точку $p_0(3,1,0,1)$; координатное уравнение грани (a_1, a_2, a_3):

$x_1 - 3 + 2(x_2 - 1) - 5x_3 + x_4 - 1 = 0$ или $x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 6 = 0$;

$6 + t + 2(3 + 2t) - 5(2 - 5t) + 6 + t - 6 = 0$; $31t + 2 = 0$; $t = -\frac{2}{31}$,

основание высоты $s = \frac{1}{31}\,{}^t(184, 89, 54, 184)$, высота $s - r = \frac{2}{31}\,{}^t(1,2,-5,1)$,

длина высоты $|s - r| = \frac{2}{31}\sqrt{31}$. Объем грани (a_1, a_2, a_3)

$V = |a_1 \times a_2 \times a_3| = 4\sqrt{31}$.

Найти точку B, симметричную точке $A(1,2,3,4)$ относительно гиперплоскости $x = p_0 + t_1 a_1 + t_2 a_2 + t_3 a_3$, где $p_0 = {}^t(1,4,-2,3)$, $a_1 = {}^t(0,2,1,1)$, $a_2 = {}^t(1,-2,0,3)$, $a_3 = {}^t(2,2,1,-1)$.

В предыдущей задаче было вычислено $a_1 \times a_2 \times a_3 = 4\,{}^t(1,2,-5,1)$ – нормальный вектор данной гиперплоскости. Ее координатное уравнение $(x_1 - 1) + 2(x_2 - 4) - 5(x_3 + 2) + (x_4 - 3) = 0$; $x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 - 21 = 0$.
Проведем прямую через точку A перпендикулярно гиперплоскости:
$x_1 = 1 + t$, $x_2 = 2 + 2t$, $x_3 = 3 - 5t$, $x_4 = 4 + t$,
$1 + t_0 + 4 + 4t_0 - 15 + 25t_0 + 4 + t_0 - 21 = 0$, $31t_0 = 27$; $t_0 = \frac{27}{31}$. Точка пересечения $C : x_1^0 = \frac{58}{31}$, $x_2^0 = \frac{116}{31}$, $x_3^0 = -\frac{42}{31}$, $x_4^0 = \frac{151}{31}$. $B - C = C - A$; $B = 2C - A$; $B = {}^t(\frac{85}{31}, \frac{170}{31}, -\frac{177}{31}, \frac{178}{31})$.

С.В.Сизый с.52 № 11

Аффинное отображение $\mathcal{A}(x) = p_0 + \vec{\mathcal{A}}(\vec{x})$ пространства $\mathbb{R}^3$ переводит точки $A(1,2,3)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,1,3)$, $D(0,1,7)$ в точки $A'(0,1,1)$, $B'(2,1,0)$, $C'(-2,0,3)$, $D'(0,1,4)$ соответственно. Найти точку p_0 и матрицу оператора $\vec{\mathcal{A}}$ в стандартном базисе. Найти образ точки $q(2,-1,4)$ при этом отображении.

Пусть O – начало координат, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$. Обозначим через X матрицу оператора $\vec{\mathcal{A}}$ в стандартном базисе. Тогда $A' = p_0 + X\cdot\vec{a}$, $B' = p_0 + X\cdot\vec{b}$, $C' = p_0 + X\cdot\vec{c}$, $D' = p_0 + X\cdot\vec{d}$. Отсюда $B' - A' = X\cdot(\vec{b}-\vec{a})$, $C' - A' = X\cdot(\vec{c}-\vec{a})$, $D' - A' = X\cdot(\vec{d}-\vec{a})$ и получаем матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = X\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}. \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 0 & -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 4 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & \frac{1}{3} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$$X = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix};\ p_0 = A' - X\cdot\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

С.В.Сизый с.52 № 11

$$\mathcal{A}(q) = p_0 + X \cdot \overrightarrow{Oq} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 8 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ -6 & 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Изометрия $\mathcal{A}(x) = p_0 + \vec{\mathcal{A}}(\vec{x})$ пространства $\mathbb{R}^2$, сохраняющая ориентацию, переводит точку $(1, 0)$ в точку $(0, 0)$, а точку $(0, 1)$ – в точку $\left(\sqrt{\frac{2}{5}}, 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$. Найти точку p_0 и матрицу оператора $\vec{\mathcal{A}}$ в стандартном базисе. Найти неподвижную точку этой изометрии.

Так как изометрия сохраняет ориентацию, $|X| = 1$ и $X = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$. Из $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = p_0 + X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ и $\sqrt{\frac{2}{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = p_0 + X \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ следует
$\sqrt{\frac{2}{5}}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = X \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} -\cos\varphi + \sin\varphi = \sqrt{\frac{2}{5}}; \\ \cos\varphi + \sin\varphi = 2\sqrt{\frac{2}{5}}, \end{cases}$ $\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{10}}$, $\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{10}}$,
$X = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$, $p_0 = -X \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Если (q_1, q_2) – неподвижная точка этой изометрии, то $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = p_0 + X \cdot \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$; $\begin{cases} q_1 = \frac{1}{\sqrt{10}}(1 + q_1 + 3q_2); \\ q_2 = \frac{1}{\sqrt{10}}(-3 - 3q_1 + q_2); \end{cases}$

$\begin{cases} q_1(1 - \sqrt{10}) + 3q_2 = -1; \\ 3q_1 + q_2(\sqrt{10} - 1) = -3; \end{cases}$

$\triangle = \begin{vmatrix} 1 - \sqrt{10} & 3 \\ 3 & \sqrt{10} - 1 \end{vmatrix} = -(\sqrt{10} - 1)^2 - 9 = -20 + 2\sqrt{10} = -2(10 - \sqrt{10})$;

$\triangle_1 = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -3 & \sqrt{10} - 1 \end{vmatrix} = 10 - \sqrt{10}$; $q_1 = -\frac{1}{2}$; $\triangle_2 = \begin{vmatrix} 1 - \sqrt{10} & -1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = 3\sqrt{10}$;

$q_2 = -\frac{3\sqrt{10}}{2(10 - \sqrt{10})} = -\frac{3}{2(\sqrt{10} - 1)} = -\frac{\sqrt{10} + 1}{6}$.

Изометрия $\mathcal{A}(x) = p_0 + \vec{\mathcal{A}}(\vec{x})$ пространства $\mathbb{R}^3$ поворачивант точки пространства вокруг оси $x = y = z$ на угол $\pi/4$, после чего сдвигает их в направлении этой оси на расстояние 1. Найти точку p_0 и матрицу оператора $\vec{\mathcal{A}}$ в стандартном базисе.

Так как операции поворота вокруг оси и сдвига перестановочны, можно сразу определить точку p_0 как $\mathcal{A}(O) = p_0 + \vec{\mathcal{A}}(\vec{0}) = p_0$. Эта точка получается сдвигом начала координат на 1 вдоль оси $x = y = z$: $p_0 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$. Чтобы найти матрицу оператора поворота, перейдем в базис $\vec{f_1} = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t(1, -1, 0)$, $\vec{f_2}$, $\vec{f_3} = \frac{1}{\sqrt{3}}{}^t(1, 1, 1)$, где $\vec{f_2} = \vec{f_3} \times \vec{f_1} = \frac{1}{\sqrt{6}}{}^t(1, 1, -2)$. В базисе $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ матрица оператора поворота на угол $\pi/4$ вокруг вектора $\vec{f_3}$ равна $A_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$. Матрица перехода от стандартного базиса к базису $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ есть $T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$

Матрица A оператора $\vec{\mathcal{A}}$ в стандартном базисе есть $A = T \cdot A_1 \cdot T^{-1}$, так как T^{-1} – матрица перехода от базиса $(\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3})$ к стандартному базису. Поскольку T – ортогональная матрица, $T^{-1} = T^\top$.

Итак,

$$A = T \cdot A_1 \cdot T^\top = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \cdot T^\top =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{2\sqrt{3}} & -\frac{1}{2\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} =$$

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2+2\sqrt{2} & 2-\sqrt{2}-\sqrt{6} & 2-\sqrt{2}+\sqrt{6} \\ 2-\sqrt{2}+\sqrt{6} & 2+2\sqrt{2} & 2-\sqrt{2}-\sqrt{6} \\ 2-\sqrt{2}-\sqrt{6} & 2-\sqrt{2}+\sqrt{6} & 2+2\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$