Глава II. Поверхности
§ 7. Внешняя геометрия гиперповерхностей

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Дифференциальная геометрия и топология
для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
III семестр

Определение

Пусть $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — поверхность. *Векторным полем вдоль поверхности* f называется гладкое отображение $\vec{X} : U \longrightarrow \bigcup\limits_{u \in U} \mathrm{T}_{f(u)}\mathbb{R}^m$,

где $\vec{X}(u) = (f(u), \vec{x})$, $\vec{x} \in \overrightarrow{\mathbb{R}}^m$.

Поверхность с определенным на ней векторным полем можно представлять себе как “ежа".

Определения

Векторное поле $\vec{X}$ называется *касательным* [*нормальным*] к поверхности f, если $\vec{X}(u) \in \mathrm{T}_u f$ [$\vec{X}(u) \in (\mathrm{T}_u f)^{\perp}$] для любого $u \in U$. Векторное поле называется *единичным*, если длина любого его вектора равна единице

Гиперповерхность. Нормальное гауссово поле

Определение

Поверхность $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, где $U \subseteq \mathbb{R}^n$ называется *гиперповерхностью*, если $m = n + 1$.

Справедлива следующая лемма, которая вытекает из леммы сл.46 §1.

Лемма

Пусть $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ — гиперповерхность. Тогда вдоль f существует единственное нормальное единичное векторное поле $\vec{N}$ такое что $\det([f_{u^1}, f_{u^2}, \dots f_{u^n}, \vec{N}(u)]) > 0$.

Определение

Поле $\vec{N}$, о котором идет идет речь в лемме, называется *гауссовым полем* гиперповерхности f или *нормальным отображением* вдоль f.

Например, для гиперповерхности $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$, если $f = f(u, v)$, то $\vec{N} = \dfrac{f_u \times f_v}{|f_u \times f_v|}$.

Нахождение нормального гауссова поля

В общем случае (см. доказательство леммы сл.46 §1) $\vec{N} = \dfrac{f_{u^1} \times f_{u^2} \times \ldots \times f_{u^n}}{|f_{u^1} \times f_{u^2} \times \ldots \times f_{u^n}|}$. По свойству обобщенного векторного произведения получаем, что $|f_{u^1} \times f_{u^2} \times \ldots \times f_{u^n}|$ есть объем параллелотопа, построенного на векторах $f_{u^1}, f_{u^2}, \ldots, f_{u^n}$, т.е. $|f_{u^1} \times f_{u^2} \times \ldots \times f_{u^n}| = \sqrt{g}$. Таким образом,

$$\vec{N}(u) = \frac{f_{u^1} \times f_{u^2} \times \ldots \times f_{u^n}}{\sqrt{g}}. \tag{1}$$

В случае, когда гиперповерхность задается как график функции от n переменных (т.е. когда $f(u^1, u^2, \ldots, u^n) = (u^1, u^2, \ldots, u^n, \varphi(u^1, u^2, \ldots, u^n))$), используя правило вычисления обобщенного векторного произведения с помощью определителя, вектор $f_{u^1} \times f_{u^2} \times \ldots \times f_{u^n}$ можно найти по формуле

$$f_{u^1} \times f_{u^2} \times \ldots \times f_{u^n} = (-\varphi_{u^1}, -\varphi_{u^2}, \ldots, -\varphi_{u^n}, 1). \tag{2}$$

Если гиперповерхность задается с помощью уравнения $F(x^1, \ldots, x^{n+1}) = 0$, то нормальное отображение задается как

$$\vec{N} = \pm \frac{1}{|\operatorname{grad} F|} \operatorname{grad} F. \tag{3}$$

Так как $\langle\vec{N}(u),\vec{N}(u)\rangle\equiv 1$, для любого $i=1,2,\ldots,n$ имеем $\dfrac{\partial}{\partial u^i}\langle\vec{N},\vec{N}\rangle\equiv 0$, откуда $2\langle\vec{N}_{u^i},\vec{N}\rangle\equiv 0$ и $\vec{N}_{u^i}\perp\vec{N}$. Следовательно, $\vec{N}_{u^i}\in \mathrm{T}_pf$.

Поскольку $\vec{N}$ — гладкое отображение, его дифференциал $d\vec{N}_p$ существует и является линейным отображением из T_pU в T_pf. В самом деле, $\vec{N}$ действует из U в $\overrightarrow{\mathbb{R}}^{n+1}$ и для любой кривой $u(t)$ в U по формуле (2) сл.10 §5 имеем $d\vec{N}_p(\dot{u}(t_0))=\dfrac{d}{dt}\vec{N}(u(t))|_{t=t_0}=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\vec{N}_{u^i}\dot{u}^i(t_0)\in\mathrm{T}_pf$. Для вектора $\vec{x}\in\mathrm{T}_pU$, который равен $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\xi^i\vec{e}_i$, где $\vec{e}_i$ — векторы канонического базиса в $\overrightarrow{\mathbb{R}}^{n}$, имеем $d\vec{N}_p(\vec{x})=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\xi^i\vec{N}_{u^i}(p)$.

Нормальное гауссово поле вдоль поверхности и матрица дифференциала нормального отображения

Найти нормальное гауссово поле вдоль поверхности $f(u,v) = {}^t(u\cos v, u\sin v, av)$ и матрицу дифференциала нормального отображения.

Вычисляем: $f_u = {}^t(\cos v, \sin v, 0)$; $f_v = {}^t(-u\sin v, u\cos v, a)$;

$$f_u \times f_v = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v & e_1 \\ \sin v & u\cos v & e_2 \\ 0 & a & e_3 \end{vmatrix} = {}^t(a\sin v, -a\cos v, u);$$

$|f_u \times f_v| = \sqrt{a^2+u^2}$;

$\vec{N}(u,v) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}\,{}^t(a\sin v, -a\cos v, u)$ – нормальное гауссово поле.

Так как $\dfrac{d}{du}\dfrac{1}{\sqrt{a^2+u^2}} = -\dfrac{u}{(a^2+u^2)^{3/2}}$ и $\dfrac{d}{du}\dfrac{u}{\sqrt{a^2+u^2}} =$ $\dfrac{1}{\sqrt{a^2+u^2}} - \dfrac{u^2}{(a^2+u^2)^{3/2}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}\left(1-\dfrac{u^2}{a^2+u^2}\right) = \dfrac{a^2}{(a^2+u^2)^{3/2}}$,

имеем $\vec{N}_u = {}^t\left(\dfrac{-au\sin v}{(a^2+u^2)^{3/2}}, \dfrac{au\cos v}{(a^2+u^2)^{3/2}}, \dfrac{a^2}{(a^2+u^2)^{3/2}}\right) =$ $\dfrac{a}{(a^2+u^2)^{3/2}}\,{}^t(-u\sin v, u\cos v, a)$.

Далее, $\vec{N}_v = \dfrac{1}{\sqrt{a^2+u^2}}\,{}^t(a\cos v, a\sin v, 0) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+u^2}}\,{}^t(\cos v, \sin v, 0)$.

Матрица дифференциала нормального отображения:

$$[d\vec{N}(u,v)] = \frac{a}{\sqrt{a^2+u^2}}\begin{pmatrix} \dfrac{-u\sin v}{a^2+u^2} & \cos v \\ \dfrac{u\cos v}{a^2+u^2} & \sin v \\ \dfrac{a}{a^2+u^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Степень "изогнутости"гиперповерхности можно определять, двигая по линии вдоль поверхности единичный вектор и измеряя скорость его поворота при перемещении по этой линии. В качестве таких линий естественно взять координатные линии гиперповерхности.
Так как $\dim \mathrm{T}_p f = \dim \mathrm{T}_p U = n$ и $\mathrm{r}(df_p) = n$, существует обратное отображение $(df_p)^{-1} : \mathrm{T}_p f \longrightarrow \mathrm{T}_p U$. Положим

$$L_p = -d\vec{N}_p \circ (df_p)^{-1}.$$

Это линейный оператор на пространстве $\mathrm{T}_p f$. Он называется *основным оператором гиперповерхности* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ или *оператором Петерсона-Вейнгартена*. Для вектора $x \in \mathrm{T}_p f$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi^i f_{u^i}$, имеем $L_p x = -\sum\limits_{i=1}^{n} \xi^i \vec{N}_{u^i}(p)$. В самом деле, $df_p e_i = f_{u^i}(p)$, поэтому $(df_p)^{-1} f_{u^i}(p) = e_i$. Далее, $d\vec{N}_p(e_i) = \vec{N}_{u^i}(p)$ и потому

$$L_p(f_{u^i}) = -\vec{N}_{u^i}(p). \tag{4}$$

Вторая фундаментальная форма гиперповерхности

Определение

Второй фундаментальной формой гиперповерхности $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ называется билинейная форма, определенная в $\mathrm{T}_p f$: $\mathrm{II}_p(x, y) = \langle L_p(x), y \rangle$, для любых $x, y \in \mathrm{T}_p f$.

Замечание 1

Вторая фундаментальная форма гиперповерхности действительно является билинейной формой, определенной в касательном пространстве $\mathrm{T}_p f$.

Линейность по второму аргументу вытекает из свойств скалярного произведения. Линейность по первому аргументу следует из линейности оператора L_p и линейности скалярного произведения по первому аргументу:
$\mathrm{II}_p(t_1 x_1 + t_2 x_2, y) = \langle L_p(t_1 x_1 + t_2 x_2), y \rangle = \langle t_1 L_p(x_1) + t_2 L_p(x_2), y \rangle =$
$t_1 \langle L_p(x_1), y \rangle + t_2 \langle L_p(x_2), y \rangle = t_1 \mathrm{II}_p(x_1, y) + t_2 \mathrm{II}_p(x_2, y)$.

Замечание 2

Часто второй фундаментальной формой гиперповерхности $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ (без указания точки) называется совокупность форм $\mathrm{II}_p(x, y)$ по всем точкам $p \in U$, рассматриваемых во всех касательных пространствах $\mathrm{T}_p f$.

Теорема

1) Вторая фундаментальная форма является симметричной билинейной формой.
2) Оператор L_p является самосопряженным.

$\Downarrow$Возьмем векторы $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi^i f_{u^i}$, $y = \sum\limits_{j=1}^{n} \eta^j f_{u^j}$ в пространстве $\mathrm{T}_p f$. Тогда

$\mathrm{II}_p(x, y) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \xi^i \eta^j \mathrm{II}_p(f_{u^i}, f_{u^j}) = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \xi^i \eta^j h_{ij}$, где

$h_{ij} = \mathrm{II}_p(f_{u^i}, f_{u^j}) = \langle L_p(f_{u^i}), f_{u^j} \rangle$ — коэффициенты второй фундаментальной формы. Составим из них матрицу второй фундаментальной формы $(h_{ij}) = [\mathrm{II}_p]$. В силу (4) имеем $h_{ij} = \langle L_p(f_{u^i}), f_{u^j} \rangle = \langle -\vec{N}_{u^i}, f_{u^j} \rangle$. Из $\vec{N} \perp \mathrm{T}_p f$ выводим $\langle \vec{N}, f_{u^j} \rangle \equiv 0$. Дифференцируя последнее тождество по u^i, получаем $\langle \vec{N}_{u^i}, f_{u^j} \rangle + \langle \vec{N}, f_{u^j u^i} \rangle \equiv 0$. Значит,

$$h_{ij} = -\langle \vec{N}_{u^i}, f_{u^j} \rangle = \langle \vec{N}, f_{u^j u^i} \rangle. \tag{5}$$

Поскольку $f_{u^i u^j} = f_{u^j u^i}$, имеем

$$h_{ij} = \langle \vec{N}, f_{u^j u^i} \rangle = \langle \vec{N}, f_{u^i u^j} \rangle = h_{ji}. \tag{6}$$

Следовательно, вторая фундаментальная форма является симметричной:

$$\mathrm{II}_p(x, y) = \mathrm{II}_p(y, x).$$

Докажем, что оператор L_p является самосопряженным. Пусть $x, y \in \mathrm{T}_p f$. Так как $\mathrm{II}_p(x, y) = \mathrm{II}_p(y, x)$, заключаем, что $\langle L_p(x), y \rangle = \mathrm{II}_p(x, y) = \mathrm{II}_p(y, x) = \langle L_p(y), x \rangle = \langle x, L_p(y) \rangle$, откуда $\langle L_p(x), y \rangle = \langle x, L_p(y) \rangle$.$\Uparrow$

Вспомнив свойства самосопряженного оператора из курса линейной алгебры, получаем

Следствие

Все собственные значения оператора L_p вещественны и в касательном пространстве $\mathrm{T}_p f$ существует ортонормированный базис из собственных векторов этого оператора.

Рассмотрим $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ — гиперповерхность. Тогда имеем $\vec{N} = \dfrac{f_u \times f_v}{\sqrt{g}}$,
$h_{11} = \langle \vec{N}, f_{uu} \rangle = \dfrac{(f_u, f_v, f_{uu})}{\sqrt{g}}$, $h_{12} = \langle \vec{N}, f_{uv} \rangle = \dfrac{(f_u, f_v, f_{uv})}{\sqrt{g}}$,
$h_{22} = \langle \vec{N}, f_{vv} \rangle = \dfrac{(f_u, f_v, f_{vv})}{\sqrt{g}}$.
В общем случае для гиперповерхности $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ на основании (1), (5) и способа вычисления обобщенного векторного произведения имеем

$$h_{ij} = \frac{\det([f_{u^1}, \dots, f_{u^n}, f_{u^i u^j}])}{\sqrt{g}}. \tag{7}$$

Лемма

Пусть U — область в $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ — гиперповерхность. В стандартном базисе $f_{u^1}, f_{u^2}, \ldots, f_{u^n}$ касательного пространства $\mathrm{T}_p f$ матрица оператора L_p имеет вид

$$[L_p] = [\mathrm{I}_p]^{-1} \cdot [\mathrm{II}_p].$$

$\Downarrow$Обозначим в данном базисе матрицу первой фундаментальной формы через $[\mathrm{I}_p] = (g_{ij})$, матрицу второй фундаментальной формы — через $[\mathrm{II}_p] = (h_{ij})$, а определители этих матриц — через g и h соответственно. Через $[L_p] = (a^i_j)$ (вверху номер строки) обозначим матрицу основного оператора гиперповерхности. По определению матрицы линейного оператора $L_p f_{u^i} = \sum\limits_{k=1}^{n} a^k_i f_{u^k}$. Далее,

$$h_{ij} = \langle L_p(f_{u^i}), f_{u^j} \rangle = \langle \textstyle\sum_{k=1}^{n} a^k_i f_{u^k}, f_{u^j} \rangle = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a^k_i \langle f_{u^k}, f_{u^j} \rangle = \sum_{k=1}^{n} a^k_i g_{kj}.$$

Следовательно, в силу симметричности матриц $[\mathrm{I}_p]$ и $[\mathrm{II}_p]$ $h_{ji} = h_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} g_{kj} a^k_i = \sum\limits_{k=1}^{n} g_{jk} a^k_i$, откуда следует матричное равенство

$$[\mathrm{II}_p] = [\mathrm{I}_p] \cdot [L_p]. \tag{8}$$

Так как матрица $[\mathrm{I}_p]$ обратима как матрица Грама линейно независимой системы векторов $f_{u^1}, f_{u^2}, \ldots, f_{u^n}$, из последнего равенства следует требуемое утверждение.$\Uparrow$

Пусть $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ — гиперповерхность, $L_p : \mathrm{T}_p f \longrightarrow \mathrm{T}_p f$ — ее основной оператор.

Определения

Полной (гауссовой) кривизной гиперповерхности f в точке $p \in U$ называется число $K(p) = \det[L_p]$.

Средней кривизной f в точке p называется $H(p) = \dfrac{1}{n}\mathrm{tr}[L_p]$.

Собственные значения $k_1, k_2, \ldots k_n$ оператора L_p (они все вещественные числа) называются *главными нормальными кривизнами* гиперповерхности f в точке p.

Собственные векторы–орты $X_1, X_2, \ldots, X_n$ оператора L_p (они образуют ортонормированный базис) называются *главными направлениями* гиперповерхности f в точке p.

О характеристиках гиперповерхности

Все введенные на сл.14 характеристики гиперповерхности f в точке $p \in U$ основаны на понятии характеристического многочлена линейного оператора L_p. Так как характеристический многочлен оператора не зависит от выбора базиса, введенные величины не зависят от выбора базиса в касательном пространстве $\mathrm{T}_p f$. Они являются *чисто геометрическими* характеристиками и объектами, связанными с гиперповерхностью.

В базисе из собственных векторов $X_1, X_2, \dots, X_n$ матрица оператора L_p имеет диагональный вид, при этом на главной диагонали стоят собственные значения оператора L_p, т.е. главные нормальные кривизны. След матрицы линейного оператора и ее определитель являются коэффициентами характеристического многочлена, поэтому не зависят от выбора базиса. Следовательно, имеют место формулы, связывающие главные нормальные кривизны с полной кривизной и со средней кривизной гиперповерхности.

$$K = k_1 k_2 \dots k_n, \quad H = \frac{1}{n}(k_1 + k_2 + \dots + k_n).$$

Из формулы леммы сл.13 получаем $\det[L_p] = \dfrac{\det[\mathrm{II}_p]}{\det[\mathrm{I}_p]}$, откуда получается формула для полной кривизны: $K = h/g$.

Примеры

Пример 1. Пусть $f = \alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ — плоская кривая единичной скорости. Тогда $\vec{N} = \vec{\nu}$, $\dot{\alpha}$ — базис $\mathrm{T}_p f$. Имеем $L_t = -d\vec{\nu} \circ (d\alpha)^{-1}$, $L_t(\dot{\alpha}) = -\dot{\vec{\nu}} = k\dot{\alpha}$ в силу уравнений Френе, поэтому k — собственное значение оператора L_t, т.е. главная нормальная кривизна гиперповерхности.

Пример 2. Рассмотрим гиперплоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$, заданную уравнением $a_1 x^1 + a_2 x^2 + \ldots + a_{n+1} x^{n+1} = a_0$. Очевидно, что ее единичный нормальный вектор есть $\vec{N} = \dfrac{1}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_{n+1}^2}}\,{}^t(a_1, \ldots, a_{n+1}) = \mathrm{const}$.

Поэтому $d\vec{N} = \mathcal{O}$ — нулевой оператор, L_p — также нулевой оператор. У гиперплоскости все главные нормальные кривизны нулевые и все направления главные.

Вычислительные формулы

Положим $(g_{ij})^{-1} = (g^{ji})$. Приведем вычислительные формулы для средней кривизны произвольной гиперповерхности $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$.

$$H = \frac{1}{n}\mathrm{tr}[L_p] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k^k = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(\textstyle\sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g^{jk}h_{kj}) = \displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} g^{ji}h_{ij}.$$

Случай гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Пусть $p(u,v) \in \mathbb{R}^2$, $(g_{ij}) = [\mathrm{I}_p]$, $(h_{ij}) = [\mathrm{II}_p]$ — матрицы первой и второй фундаментальных форм гиперповерхности f соответственно.

Гауссова кривизна

$$K = \frac{h}{g} = \frac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}.$$

Вычислим $[L_p] = (g_{ij})^{-1}(h_{ij}) = \dfrac{1}{g}\begin{pmatrix} g_{22} & -g_{12} \\ -g_{12} & g_{11} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} =$ $\dfrac{1}{g}\begin{pmatrix} g_{22}h_{11} - g_{12}h_{12} & g_{22}h_{12} - g_{12}h_{22} \\ -g_{12}h_{11} + g_{11}h_{12} & -g_{12}h_{12} + g_{11}h_{22} \end{pmatrix}$. Так как $H = \frac{1}{2}\mathrm{tr}[L_p]$, имеем

Средняя кривизна

$$H = \frac{g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12} + g_{11}h_{22}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}.$$

Вычисление главных нормальных кривизн

Матрица оператора L_p в базисе из собственных векторов имеет вид $[L_p] = \begin{pmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{pmatrix}$, поэтому $\begin{cases} K = k_1 k_2, \\ 2H = k_1 + k_2. \end{cases}$ Следовательно, кривизны k_1 и k_2 являются корнями квадратного уравнения $k^2 - 2Hk + K = 0$. Решив его, найдем оба вещественных корня — главные нормальные кривизны k_1 и k_2 двумерной гиперповерхности.

Предложение

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое подмножество, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ — гиперповерхность, $p \in U$, $x \in \mathrm{T}_p f$, $x \neq o$, $x = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi^i f_{u^i}$, $[x] = {}^t(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n)$. Тогда
1) X есть главное направление, отвечающее главной нормальной кривизне k, тогда и только тогда, когда $([\mathrm{II}_p] - k[\mathrm{I}_p])[X] = O$;
2) k — главная кривизна гиперповерхности f в точке p тогда и только тогда, когда $\det([\mathrm{II}_p] - k[\mathrm{I}_p]) = 0$.

$\Downarrow$По определению, X — главное направление, отвечающее главной кривизне k тогда и только тогда, когда $L_p X = kX$, что равносильно $[L_p][X] = k[X]$. В силу предложения сл.13 последнее равенство равносильно равенству $[\mathrm{I}_p]^{-1}[\mathrm{II}_p][X] = k[X]$, откуда $([\mathrm{I}_p]^{-1}[\mathrm{II}_p] - k\mathbb{I}_n)[X] = O$. Умножая последнее равенство слева на $[\mathrm{I}_p]$, получаем равносильное равенство $([\mathrm{II}_p] - k[\mathrm{I}_p])[X] = O$. Утверждение 1) доказано.
Утверждение 2) получается с учетом того, что однородная система линейных уравнений $([\mathrm{II}_p] - k[\mathrm{I}_p])[X] = o$ имеет ненулевое решение x тогда и только тогда, когда $\det([\mathrm{II}_p] - k[\mathrm{I}_p]) = 0$.$\Uparrow$

Вторая фундаментальная форма прямого геликоида

Найти вторую фундаментальную форму гиперповерхности $f(u,v) = {}^t(u\cos v, u\sin v, av)$.

Вспомним, что $f_u = {}^t(\cos v, \sin v, 0)$; $f_v = {}^t(-u\sin v, u\cos v, a)$;

$$f_u \times f_v = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v & e_1 \\ \sin v & u\cos v & e_2 \\ 0 & a & e_3 \end{vmatrix} = {}^t(a\sin v, -a\cos v, u);$$

$|f_u \times f_v| = \sqrt{g} = \sqrt{a^2+u^2}$.

Вычислим $f_{uu} = \vec{0}$; $f_{uv} = {}^t(-\sin v, \cos v, 0)$; $f_{vv} = {}^t(-u\cos v, -u\sin v, 0)$.

Найдем $h_{11} = \dfrac{\langle f_u \times f_v, f_{uu}\rangle}{\sqrt{g}} = 0$;

$$h_{12} = h_{21} = \frac{\langle f_u \times f_v, f_{uv}\rangle}{\sqrt{g}} = -\frac{a}{\sqrt{u^2+a^2}};\ h_{22} = \frac{\langle f_u \times f_v, f_{vv}\rangle}{\sqrt{g}} = 0.$$

Запишем матрицу второй фундаментальной формы в точке $p(u,v)$:

$$[\mathrm{II}_p] = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица основного оператора, полная и средняя кривизна, главные нормальные кривизны и главные направления прямого геликоида

Найти матрицу основного оператора, полную и среднюю кривизну, главные нормальные кривизны и главные направления гиперповерхности $f(u,v) = {}^t(u\cos v, u\sin v, av)$. Убедиться, что главные направления делят пополам углы между ее координатными линиями.

Запишем матрицы первой и второй фундаментальных форм в точке $p(u,v)$: $[\mathrm{I}_p] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+a^2 \end{pmatrix}$ и $[\mathrm{II}_p] = \begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} & 0 \end{pmatrix}$.

Вычислим матрицу основного оператора в точке $p(u,v)$:

$$[L_p] = [\mathrm{I}_p]^{-1}\cdot[\mathrm{II}_p] = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{u^2+a^2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ -\dfrac{a}{(u^2+a^2)^{3/2}} & 0 \end{pmatrix}.$$

Полная кривизна в точке $p(u,v)$: $K = \det[L_p] = -\dfrac{a^2}{(u^2+a^2)^2}$. Средняя кривизна в точке $p(u,v)$: $K = \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}[L_p] = 0$. Характеристическое уравнение для главных нормальных кривизн: $\begin{vmatrix} -k & -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ -\dfrac{a}{(u^2+a^2)^{3/2}} & -k \end{vmatrix} = 0$

или $k^2 - \dfrac{a^2}{(u^2+a^2)^2} = 0$. Главные нормальные нормальные кривизны:
$k_1 = -\dfrac{a}{u^2+a^2}$, $k_2 = \dfrac{a}{u^2+a^2}$.
Уравнения для главных направлений: $([\mathrm{II}_p] - k_{1,2}[\mathrm{I}_p]) \cdot X = O$ или

$$\left(\begin{pmatrix} 0 & -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} & 0 \end{pmatrix} \pm \frac{a}{u^2+a^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+a^2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} \pm\dfrac{a}{u^2+a^2} & -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} \\ -\dfrac{a}{\sqrt{u^2+a^2}} & \pm a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Каждая система из двух уравнений равносильна одному: $\frac{x_1}{\sqrt{u^2+a^2}}+x_2=0$ для k_1 и $\frac{x_1}{\sqrt{u^2+a^2}}-x_2=0$ для k_2. Таким образом, для главной нормальной кривизны k_1 получаем главное направление $X_1={}^t(\sqrt{u^2+a^2},-1)$, а для k_2 – главное направление $X_2={}^t(\sqrt{u^2+a^2},1)$. Найдем $\langle X_1,X_1\rangle=(\sqrt{u^2+a^2},-1)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & u^2+a^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{u^2+a^2}\\ -1\end{pmatrix}=$ $(\sqrt{u^2+a^2},-u^2-a^2)\cdot{}^t(\sqrt{u^2+a^2},-1)=2(u^2+a^2)$. Следовательно, $|X_1|=\sqrt{2(u^2+a^2)}$ и аналогично $|X_2|=\sqrt{2(u^2+a^2)}$.
Пусть $A_1={}^t(1,0)$ и $A_2={}^t(0,1)$ – касательные векторы к координатным линиям. Вычислим $\langle A_1,A_1\rangle=(1,0)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & u^2+a^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=1$ и $\langle A_2,A_2\rangle=(0,1)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & u^2+a^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}=u^2+a^2$. Имеем $|A_1|=1$, $|A_2|=\sqrt{u^2+a^2}$. Вычислим
$\langle A_1,X_1\rangle=(1,0)\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & u^2+a^2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sqrt{u^2+a^2}\\ -1\end{pmatrix}=\sqrt{u^2+a^2}$. Тогда $\cos(\widehat{A_1,X_1})=\frac{\langle A_1,X_1\rangle}{|A_1|\cdot|X_1|}=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Таким образом, $(\widehat{A_1,X_1})=\frac{\pi}{4}$. Так как $A_1\perp A_2$, X_1 делит угол между координатными линиями пополам. Для X_2 доказательство проводится аналогично.

Пример

Главные кривизны и главные направления

Найти главные кривизны и главные направления, полную и среднюю кривизну гиперповерхности $f(u,v,w) = {}^t(u,v,w,uvw)$ в точке $p(1,1,1)$.

Вычисляем $f_u(u,v,w) = {}^t(1,0,0,vw)$, $f_v(u,v,w) = {}^t(0,1,0,uw)$, $f_w(u,v,w) = {}^t(0,0,1,uv)$; $f_u(p) = {}^t(1,0,0,1)$, $f_v(p) = {}^t(0,1,0,1)$, $f_w(p) = {}^t(0,0,1,1)$; $g_{11}(p) = g_{22}(p) = g_{33}(p) = 2$,

$g_{12}(p) = g_{13}(p) = g_{23}(p) = 1$. Таким образом, $[\mathrm{I}_p] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Далее,

$$f_u \times f_v \times f_w(p) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & e_1 \\ 0 & 1 & 0 & e_2 \\ 0 & 0 & 1 & e_3 \\ 1 & 1 & 1 & e_4 \end{vmatrix} = {}^t(-1,-1,-1,1) \text{ и}$$

$g(p) = |f_u \times f_v \times f_w(p)| = 2$, т.е. $\vec{N}(p) = \frac{1}{2}{}^t(-1,-1,-1,1)$.
Вычисляем $f_{u^2}(p) = f_{v^2}(p) = f_{w^2}(p) = {}^t(0,0,0,0)$;
$f_{uv}(u,v,w) = {}^t(0,0,0,w)$, $f_{uw}(u,v,w) = {}^t(0,0,0,v)$,
$f_{vw}(u,v,w) = {}^t(0,0,0,u)$, $f_{uv}(p) = f_{vw}(p) = f_{uw}(p) = {}^t(0,0,0,1)$; имеем
$h_{11}(p) = \langle f_{u^2}(p), \vec{N}(p)\rangle = 0$ и аналогично $h_{22}(p) = h_{33}(p) = 0$,
$h_{12}(p) = \langle f_{uv}(p), \vec{N}(p)\rangle = \frac{1}{2}$, $h_{13}(p) = h_{23}(p) = \frac{1}{2}$.

Таким образом, $[\mathrm{II}_p] = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Запишем уравнение для отыскания главных нормальных кривизн:

$\det([\mathrm{II}_p] - k[\mathrm{I}_p]) = 0$ или $\begin{vmatrix} -2k & \frac{1}{2}-k & \frac{1}{2}-k \\ \frac{1}{2}-k & -2k & \frac{1}{2}-k \\ \frac{1}{2}-k & \frac{1}{2}-k & -2k \end{vmatrix} = 0$. Прибавим к 1-й строке определителя 2-ю и 3-ю строки, вынесем из 1-й строки $1-4k$, а затем умножим 1-ю строку на $k-\frac{1}{2}$ и прибавим к 2-й и к 3-й:

$$\begin{vmatrix} 1-4k & 1-4k & 1-4k \\ \frac{1}{2}-k & -2k & \frac{1}{2}-k \\ \frac{1}{2}-k & \frac{1}{2}-k & -2k \end{vmatrix} = (1-4k)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2}-k & -2k & \frac{1}{2}-k \\ \frac{1}{2}-k & \frac{1}{2}-k & -2k \end{vmatrix} =$$

$$(1-4k)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -k-\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -k-\frac{1}{2} \end{vmatrix} = (1-4k)(k+\tfrac{1}{2})^2 = 0.$$ Следовательно, главные нормальные кривизны в точке p: $k_1 = \frac{1}{4}$, $k_2 = k_3 = -\frac{1}{2}$ и полная кривизна $K = k_1k_2k_3 = \frac{1}{16}$, средняя кривизна $H = \frac{1}{3}(k_1+k_2+k_3) = -\frac{1}{4}$.

Запишем систему линейных уравнений для отыскания главного направления, соответствующего главной нормальной кривизне $k_1 = \frac{1}{4}$:
$([\mathrm{II}_p] - k_1[\mathrm{I}_p]) \cdot X = 0$ или
$\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Преобразуем основную матрицу этой системы: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \to$
$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Ее фундаментальная система решений ${}^t(1,1,1)$, после нормирования $X_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1,1,1)$ – главное направление, соответствующее главной нормальной кривизне $k_1 = \frac{1}{4}$.
Так как $k_2 = k_3$, главные направления, соответствующие этим главным нормальным кривизнам, ортогональны к вектору ${}^t(1,1,1)$. Возьмем вектор $X_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\,{}^t(-1,1,0)$ и положим

$$X_3 = X_1 \times X_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{vmatrix} 1 & -1 & e_1 \\ 1 & 1 & e_2 \\ 1 & 0 & e_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\,{}^t(-1,-1,2).$$

Следствие

Пусть стандартный базис $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}$ касательного пространства $\mathrm{T}_p f$ ортогонален. В этом случае векторы $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}$ являются главными направлениями оператора L_p тогда и только тогда, когда матрица второй фундаментальной формы $[\mathrm{II}_p]$ диагональна. При этом $k_i = \dfrac{h_{ii}}{g_{ii}}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

$\Downarrow$Матрица $[\mathrm{I}_p]$ диагональна, поэтому и обратная матрица $[\mathrm{I}_p]^{-1}$ диагональна. Векторы $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}$ являются собственными векторами оператора L_p тогда и только тогда, когда его матрица $[L_p]$ диагональна. Так как $[L_p] = [\mathrm{I}_p]^{-1} \cdot [\mathrm{II}_p]$, матрица $[L_p]$ диагональна тогда и только тогда, когда матрица второй фундаментальной формы $[\mathrm{II}_p]$ диагональна.$\Uparrow$

Определение

Кривая α вдоль гиперповерхности $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ называется *линией кривизны*, если в каждой ее точке касательный вектор $\dot{\alpha}$ является главным направлением.

Найдем линии кривизны вдоль гиперповерхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Пусть $u = u^1$, $v = u^2$. Тогда (du, dv) — координаты касательного вектора к кривой $w : I \longrightarrow U$. Для кривой $\alpha(t) = f(w(t))$ имеем $\dot{\alpha}(t)dt = \dfrac{d}{dt} f(w(t))dt = df(\dot{w}(t))dt = f_u du + f_v dv$. Последний вектор будет главным направлением, отвечающим кривизне k, при условии $\begin{pmatrix} h_{11} - kg_{11} & h_{12} - kg_{12} \\ h_{12} - kg_{12} & h_{22} - kg_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, которое равносильно существованию у системы уравнений $\begin{cases} h_{11}du + h_{12}dv = k(g_{11}du + g_{12}dv); \\ h_{12}du + h_{22}dv = k(g_{12}du + g_{22}dv) \end{cases}$ ненулевого решения. Последнее условие равносильно тому, что $\begin{vmatrix} h_{11}du + h_{12}dv & g_{11}du + g_{12}dv \\ h_{12}du + h_{22}dv & g_{12}du + g_{22}dv \end{vmatrix} = 0.$

Легко проверить, что данное уравнение можно записать в виде $\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0$. Это и есть дифференциальное уравнение для нахождения линий кривизны.

Линии кривизны

Доказать, что координатные линии поверхности $f(u,v) = {}^t(3u + 3uv^2 - u^3, v^3 - 3v - 3u^2v, 3u^2 - 3v^2)$ являются линиями кривизны. Найти полную и среднюю кривизны этой поверхности в произвольной точке.

Вычислим $f_u = {}^t(3 + 3v^2 - 3u^2, -6uv, 6u) = 3{}^t(v^2 - u^2 + 1, -2uv, 2u)$, $f_v = {}^t(6uv, 3v^2 - 3 - 3u^2, -6v) = 3{}^t(2uv, v^2 - u^2 - 1, -2v)$. Далее, $g_{11} = \langle f_u, f_u\rangle = 9((v^2 - u^2 + 1)^2 + 4u^2v^2 + 4u^2) = 9(v^4 + u^4 + 1 - 2v^2u^2 + 2v^2 - 2u^2 + 4u^2v^2 + 4u^2) = 9(v^4 + u^4 + 1 + 2v^2u^2 + 2v^2 + 2u^2) = 9(u^2 + v^2 + 1)^2$; $g_{12} = \langle f_u, f_v\rangle = 9(2uv(v^2 - u^2 + 1) - 2uv(v^2 - u^2 - 1) - 4uv) = 0$; $g_{22} = \langle f_v, f_v\rangle = 9(4u^2v^2 + (v^2 - u^2 - 1)^2 + 4v^2) = 9(u^2 + v^2 + 1)^2$. Имеем $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 81(u^2 + v^2 + 1)^4$ и $\sqrt{g} = 9(u^2 + v^2 + 1)^2$.
Вычислим $f_{uu} = 6{}^t(-u, -v, 1)$, $f_{uv} = 6{}^t(v, -u, 0)$, $f_{vv} = 6{}^t(u, v, -1)$. Далее,

$$h_{11} = \frac{54}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} v^2 - u^2 + 1 & 2uv & -u \\ -2uv & v^2 - u^2 - 1 & -v \\ 2u & -2v & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{54}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} v^2 + u^2 + 1 & 0 & 0 \\ 0 & -v^2 - u^2 - 1 & 0 \\ 2u & -2v & 1 \end{vmatrix} = -6;$$

Окончание примера

$$h_{12} = \frac{54}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} v^2 - u^2 + 1 & 2uv & v \\ -2uv & v^2 - u^2 - 1 & -u \\ 2u & -2v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{54}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} v^2 + u^2 + 1 & 0 & v \\ 0 & -v^2 - u^2 - 1 & -u \\ 2u & -2v & 0 \end{vmatrix} =$$

$$2uv(v^2 + u^2 + 1) - 2uv(v^2 + u^2 + 1) = 0;$$

$$h_{22} = \frac{54}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} v^2 - u^2 + 1 & 2uv & u \\ -2uv & v^2 - u^2 - 1 & v \\ 2u & -2v & -1 \end{vmatrix} = -h_{11} = 6.$$

Запишем дифференциальное уравнение для линий кривизны:

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -dudv & du^2 \\ 9(u^2 + v^2 + 1)^2 & 0 & 9(u^2 + v^2 + 1)^2 \\ -6 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0,$$ или $dudv = 0$. Таким образом, линиями кривизны являются линии $u = \mathrm{const}$ и $v = \mathrm{const}$, т.е. координатные линии на поверхности.

Находим полную кривизну $K = \dfrac{h_{11}h_{22} - h_{12}^2}{g} = -\dfrac{4}{9(u^2 + v^2 + 1)^4}$ и среднюю кривизну $H = \dfrac{g_{22}h_{11} - 2g_{12}h_{12} + g_{11}h_{22}}{2g} = 0.$

Теорема

Пусть $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ — гиперповерхность, $k_1, \ldots, k_n$ — ее главные кривизны в точке $p \in U$. Тогда существует окрестность $U_0 \subseteq U$ точки p и декартова система координат такие, что $f(U_0)$ является графиком функции
$\varphi(x) = \dfrac{1}{2}(k_1(x^1)^2 + k_2(x^2)^2 + \ldots + k_n(x^n)^2) + o(|x^1|^2 + |x^2|^2 + \ldots + |x^n|^2)$.

$\Downarrow$Линейный оператор L_p самосопряженный, поэтому в $\mathrm{T}_p f$ существует ортонормированный базис $X_1, X_2, \ldots, X_n$ из главных направлений: $L_p X_i = k_i X_i$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда $X_1, X_2, \ldots, X_n, \vec{N}$ — ортонормированный базис в $\mathrm{T}_{f(p)}\mathbb{R}^{n+1}$. Рассмотрим репер $(f(p), X_1, X_2, \ldots, X_n, \vec{N})$ в $\mathbb{R}^{n+1}$ с началом в $f(p)$. Для $u \in U$ запишем координаты $f(u)$ в этом репере: $f(u) = {}^t(f^1(u), \ldots, f^n(u), f^{n+1}(u))$. В частности, $f(p) = o$ и поэтому $f^{n+1}(p) = 0$. Далее, $f_{u^i} = {}^t(f^1_{u^i}(u), \ldots, f^n_{u^i}(u), f^{n+1}_{u^i}(u)) \in \mathrm{T}_p f$. Так как $f_{u^i} \perp \vec{N}$, имеем $f^{n+1}_{u^i}(p) = 0$ и нижняя строка в матрице $f'(p)$ нулевая. Поскольку ранг этой матрицы равен n, в ее первых n строках расположен ненулевой минор $\det(f^j_{u^i}(u))$. Рассмотрим отображение $\Psi : u \mapsto {}^t(f^1(u), \ldots, f^n(u)) = {}^t(x^1, \ldots, x^n) = x$. По теореме сл.15 §5 существует некоторая окрестность U_0 точки p и некоторая окрестность V_0 точки ${}^t(0, 0 \ldots, 0)$ такие что Ψ есть диффеоморфизм U_0 на V_0.

Обозначим Φ обратный к Ψ диффеоморфизм. Тогда

$$\Phi : V_0 \longrightarrow U_0 \text{ и } u = \Phi(x), \Phi(o) = p.$$

Отображение $\tilde{f} = f \circ \Phi : V_0 \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ связано с f заменой параметров Φ и $\tilde{f}(x) = {}^t(x^1, \dots, x^n, f^{n+1}(\Phi(x)))$. Образ $\tilde{f}(V_0) = f(U_0)$ есть график функции $\varphi(x) = f^{n+1}(\Phi(x))$, т.е. $x^{n+1} = \varphi(x)$.
Покажем, что $\varphi(x)$ — искомая функция. Имеем

$\varphi(o) = f^{n+1}(\Phi(o)) = f^{n+1}(p) = 0$. Далее, $\varphi_{x^i}(o) = \displaystyle\sum_{j=1}^{n} f^{n+1}_{u^j}(p) \frac{\partial \Phi}{\partial x^i} = 0$,

так как $f^{n+1}_{u^j}(p) = 0$. Следовательно, разложение по формуле Тейлора для функции $\varphi(x)$ в окрестности точки o содержит слагаемые с производными не менее чем второго порядка:

$$\varphi(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_{x^i x^j}(o) x^i x^j + o(|x|^2). \tag{9}$$

Матрица квадратичной формы из правой части (9) называется *гессианом* функции φ в точке o: $\mathrm{Hess}\varphi(o) = \begin{pmatrix} \varphi_{x^1x^1} & \varphi_{x^1x^2} & \dots & \varphi_{x^1x^n} \\ \varphi_{x^2x^1} & \varphi_{x^2x^2} & \dots & \varphi_{x^2x^n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{x^nx^1} & \varphi_{x^nx^2} & \dots & \varphi_{x^nx^n} \end{pmatrix}$.

Гессиан определяет форму графика $\varphi(x)$ вблизи точки o. Покажем, что гессиан диагонален. При $i = 1, \dots, n$ имеем $\tilde{f}_{x^i}(o) = X_i$, так как координаты берутся в репере $(f(p), X_1, X_2, \dots, X_n, \vec{N})$. Таким образом, $\tilde{f}_{x^i}(o)$ — главные направления гиперповерхности f и образуют ортонормированный базис касательного пространства $\mathrm{T}_o\tilde{f} = \mathrm{T}_p f$.
Для первой фундаментальной формы $\tilde{f}$ в новом репере имеем $[\mathrm{I}_o] = \mathbb{I}_n$.
Покажем, что основной оператор $\tilde{L}_o$ гиперповерхности $\tilde{f}$ в точке o совпадает с оператором L_p гиперповерхности f в точке p. Так как $\overrightarrow{N^{\sim}}(o) = \vec{N}(\Phi(o))$ и $\tilde{f} = f \circ \Phi$, имеем $\tilde{L}_o = -d\overrightarrow{N^{\sim}}_o \circ (d\tilde{f}_o)^{-1} =$
$-d\vec{N}_p d\Phi(o)(df_p d\Phi(o))^{-1} = -d\vec{N}_p d\Phi(o) d\Phi(o)^{-1} df_p^{-1} = -d\vec{N}_p df_p^{-1} = L_p$.
По следствию сл.27 матрица $[\mathrm{II}_o]$ диагональна и $k_i = \dfrac{h_{ii}}{g_{ii}} = h_{ii}$, так как $g_{ii} = 1$. Вычисляя производную $\dfrac{\partial \tilde{f}_{x^i}}{\partial x^j} = (0, \dots, 0, \varphi_{x^i x^j}(o))$, получаем $\tilde{f}_{x^i x^j}(o) = \varphi_{x^i x^j}(o)\vec{N}$. По формуле (5) сл.10 получаем
$h_{ij} = \langle \vec{N}, \tilde{f}_{x^i x^j}(o)\rangle = \langle \vec{N}, \varphi_{x^i x^j}(o)\vec{N}\rangle = \varphi_{x^i x^j}(o)$. Таким образом,
$\varphi_{x^i x^j}(o) = \begin{cases} k_i, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$ Следовательно, $\varphi(x) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} k_i (x^i)^2 + o(|x|^2)$.⇑
Функция $\varphi_0(x) = \dfrac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} k_i (x^i)^2$ хорошо приближает функцию φ в окрестности точки o.

Рассмотрим гиперповерхность в $\mathbb{R}^3$, т.е. случай $n = 2$. Имеем $\varphi_0 = z = \frac{1}{2}(k_1 x^2 + k_2 y^2)$, главные кривизны k_1 и k_2 определяются полной гауссовой кривизной $K = k_1 \cdot k_2$ и средней кривизной $H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$. Проведем классификацию точек на поверхности.

1. $K > 0$. В этом случае $k_1 k_2 > 0$ и график φ_0 является эллиптическим параболоидом. Точка $f(p)$ называется *эллиптической*. Точка $f(p)$ называется *омбилической*, если $k_1 = k_2$, или $K = H^2$.

2. $K < 0$. В этом случае $k_1 k_2 < 0$ и график φ_0 является гиперболическим параболоидом. Точка $f(p)$ называется *гиперболической*.

3. $K = 0$, $H \neq 0$. Без ограничения общности предположим, что $k_1 \neq 0$, $k_2 = 0$. В этом случае график φ_0 является параболическим цилиндром. Точка $f(p)$ называется *параболической*.

4. $K = H = 0$. В этом случае $k_1 = k_2 = 0$, $\varphi_0 = o(x^2 + y^2)$ и про поверхность ничего определенного сказать нельзя. Точка $f(p)$ называется *точкой уплощения*. Поверхность не обязательно является плоскостью. Например, для гиперповерности $\varphi(x, y) = x^3 - 3xy^2$ (так называемое “обезъяне седло") точка $(0, 0, 0)$ является точкой уплощения.

Классификация точек на торе-бублике

Найти эллиптические, гиперболические и параболические точки на торе $f(u,v) = {}^t((a+b\cos u)\cos v, (a+b\cos u)\sin v, b\sin u)$, где $a > b$, $u, v \in (-\pi, \pi)$.

Вычисляем $f_u = {}^t(-b\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, b\cos u)$,
$f_v = {}^t(-(a+b\cos u)\sin v, (a+b\cos u)\cos v, 0)$;
$\langle f_u, f_u\rangle = b^2(\sin^2 u\cos^2 v + \sin^2 u\sin^2 v + \cos^2 u) = b^2$, $\langle f_u, f_v\rangle = 0$,
$\langle f_v, f_v\rangle = (a+b\cos u)^2$; $[\mathrm{I}_p] = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & (a+b\cos u)^2 \end{pmatrix}$, $g = b^2(a+b\cos u)^2$
и $\sqrt{g} = b(a+b\cos u)$.
Далее, $f_{uu} = {}^t(-b\cos u\cos v, -b\cos u\sin v, -b\sin u)$,
$f_{uv} = {}^t(b\sin u\sin v, -b\sin u\cos v, 0)$,
$f_{vv} = {}^t(-(a+b\cos u)\cos v, -(a+b\cos u)\sin v, 0)$;

$$h_{11} = \frac{1}{\sqrt{g}}\begin{vmatrix} -b\sin u\cos v & -(a+b\cos u)\sin v & -b\cos u\cos v \\ -b\sin u\sin v & (a+b\cos u)\cos v & -b\cos u\sin v \\ b\cos u & 0 & -b\sin u \end{vmatrix} =$$

$$\frac{(-b)^2(a+b\cos u)}{b(a+b\cos u)}\begin{vmatrix} \sin u\cos v & -\sin v & \cos u\cos v \\ \sin u\sin v & \cos v & \cos u\sin v \\ -\cos u & 0 & \sin u \end{vmatrix} = b,$$

Продолжение примера

$$h_{12} = \tfrac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} -b\sin u\cos v & -(a+b\cos u)\sin v & b\sin u\sin v \\ -b\sin u\sin v & (a+b\cos u)\cos v & -b\sin u\cos v \\ b\cos u & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{(-b)^2(a+b\cos u)\sin u}{b(a+b\cos u)} \begin{vmatrix} \sin u\cos v & -\sin v & -\sin v \\ \sin u\sin v & \cos v & \cos v \\ -\cos u & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$h_{22} = \tfrac{1}{\sqrt{g}} \begin{vmatrix} -b\sin u\cos v & -(a+b\cos u)\sin v & -(a+b\cos u)\cos v \\ -b\sin u\sin v & (a+b\cos u)\cos v & -(a+b\cos u)\sin v \\ b\cos u & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$\frac{b(a+b\cos u)^2}{b(a+b\cos u)} \begin{vmatrix} \sin u\cos v & -\sin v & \cos v \\ \sin u\sin v & \cos v & \sin v \\ -\cos u & 0 & 0 \end{vmatrix} = (a+b\cos u)\cos u;$$

$$[\mathrm{II}_p] = \begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & (a+b\cos u)\cos u \end{pmatrix} \text{ и } h = b(a+b\cos u)\cos u.$$

Так как $g = b^2(a+b\cos u)^2$, полная кривизна $K = \dfrac{h}{g} = \dfrac{\cos u}{b(a+b\cos u)}$.

Помним, что полная кривизна $K = \dfrac{\cos u}{b(a + b\cos u)}$.

Для нахождения средней кривизны вычислим матрицу основного оператора $[L_p] = [\mathrm{I}_p]^{-1} \cdot [\mathrm{II}_p] = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{b} & 0 \\ 0 & \dfrac{\cos u}{a + b\cos u} \end{pmatrix}$. Тогда средняя кривизна $H = \dfrac{1}{2}\mathrm{tr}[L_p] = \dfrac{1}{2b} + \dfrac{\cos u}{2(a + b\cos u)}$.

Точка на торе эллиптическая $\Leftrightarrow K > 0 \Leftrightarrow \cos u > 0 \Leftrightarrow -\pi/2 < u < \pi/2$.

Точка на торе гиперболическая $\Leftrightarrow K < 0 \Leftrightarrow \cos u < 0 \Leftrightarrow$
$u \in (-\pi, -\pi/2) \cup (\pi/2, \pi)$.

При $K = 0$ имеем $u = \pm\pi/2$ и $H = \dfrac{1}{2b} > 0$ – точка параболическая.

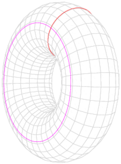

Рис.1

Изображение взято с сайта https://ru.wikipedia.org/wiki

Лемма

Пусть $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ - гиперповерхность, $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ — кривая вдоль f и $\alpha(t_0) = f(p)$. Тогда $\mathrm{II}_p(\dot\alpha, \dot\alpha) = \langle \ddot\alpha(t_0), \vec{N}(p) \rangle$.

$\Downarrow$Пусть $\alpha(t) = f(u(t))$, $u : I \longrightarrow U$ — кривая в области U. Имеем согласно формуле (2) сл.10 §5 $\dot\alpha(t) = df_p(\dot u(t))$. Отсюда $\langle \dot\alpha(t), \vec{N}(u(t)) \rangle \equiv 0$. Продифференцировав, получаем $\langle \ddot\alpha(t_0), \vec{N}(p) \rangle + \langle \dot\alpha(t_0), d\vec{N}_p(\dot u(t_0)) \rangle \equiv 0$. Отсюда $\langle \ddot\alpha(t_0), \vec{N}(p) \rangle = -\langle \dot\alpha(t_0), d\vec{N}_p(\dot u(t_0)) \rangle = \langle -d\vec{N}_p(\dot u(t_0)), \dot\alpha(t_0) \rangle = \langle -d\vec{N}_p(df_p)^{-1}(\dot\alpha(t_0)), \dot\alpha(t_0) \rangle = \langle L_p(\dot\alpha), \dot\alpha \rangle = \mathrm{II}_p(\dot\alpha, \dot\alpha)$.$\Uparrow$

Рассмотрим кривую α вдоль гиперповерхности $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$. Имеем $\dot\alpha = |\dot\alpha| \vec\tau \in \mathrm{T}_p f$. Соприкасающаяся плоскость к α, вообще говоря, не совпадает с $\mathrm{T}_p f$, так как вектор нормали $\vec\nu$ не обязан лежать в $\mathrm{T}_p f$. Имеем $\ddot\alpha = |\dot\alpha|^{\cdot} \vec\tau + |\dot\alpha|^2 k \vec\nu$, где k — кривизна кривой α. Обозначим через θ угол между векторами $\vec\nu$ и $\vec{N}(p)$.

Теорема Менье

Имеет место равенство $k \cos\theta = \dfrac{\mathrm{II}_p(\dot\alpha, \dot\alpha)}{\mathrm{I}_p(\dot\alpha, \dot\alpha)}$.

$\Downarrow$В силу леммы имеем
$\mathrm{II}_p(\dot{\alpha},\dot{\alpha}) = \langle \ddot{\alpha}, \vec{N} \rangle = \langle |\dot{\alpha}|^{\cdot}\vec{\tau} + |\dot{\alpha}|^2 k\vec{\nu}, \vec{N} \rangle = |\dot{\alpha}|^2 k \langle \vec{\nu}, \vec{N} \rangle = \mathrm{I}_p(\dot{\alpha},\dot{\alpha}) \cdot k \cdot \cos\theta$,
поскольку $|\vec{\nu}| = |\vec{N}| \equiv 1$, откуда следует требуемое.$\Uparrow$

Пусть теперь $\cos\theta = \pm 1$. Это случается, например, когда α — кривая, являющаяся сечением поверхности f плоскостью, порожденной вектором $\vec{N}$ и некоторым вектором из $\mathrm{T}_p f$, так называемое *нормальное сечение*. Если $\vec{\nu} = \pm\vec{N}$, то $\cos\theta = \pm 1$ и $k = \dfrac{\mathrm{II}_p(\dot{\alpha},\dot{\alpha})}{\mathrm{I}_p(\dot{\alpha},\dot{\alpha})}$ — кривизна нормального сечения. Последняя формула подсказывает идею следующего определения.

Определение

Для ненулевого вектора $x \in \mathrm{T}_p f$ число $k_N(x) = \dfrac{\mathrm{II}_p(x,x)}{\mathrm{I}_p(x,x)}$ называется *нормальной кривизной поверхности* f в точке p в направлении x.

Заметим, во-первых, что для любого числа $\lambda \neq 0$ справедливо равенство $k_N(\lambda x) = k_N(x)$. Во-вторых, если x — главное направление, отвечающее главной нормальной кривизне k_i, то $k_N(x) = k_i$. В самом деле,
$k_N(x) = \dfrac{\mathrm{II}_p(x,x)}{\mathrm{I}_p(x,x)} = \dfrac{\langle L_p(x), x \rangle}{\langle x, x \rangle} = \dfrac{\langle k_i x, x \rangle}{\langle x, x \rangle} = k_i \dfrac{\langle x, x \rangle}{\langle x, x \rangle} = k_i$. Этим объясняется термин "главные нормальные кривизны".

Теорема

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n \in \mathrm{T}_p f$ — ортонормированный базис из главных направлений гиперповерхности f, $L_p(X_i) = k_i X_i$, $(i = 1, \ldots, n)$, $x \in \mathrm{T}_p f$ — вектор, образующий углы θ_i с векторами X_i $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда $k_N(x) = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i \cos^2 \theta_i$.

$\Downarrow$В силу первого замечания, сделанного в конце предыдущего слайда, можно считать вектор x ортом. Тогда $x = \sum\limits_{i=1}^{n} (\cos\theta_i) X_i$. Имеем

$$k_N(x) = \frac{\mathrm{II}_p(x,x)}{\mathrm{I}_p(x,x)} = \mathrm{II}_p(x,x) = \mathrm{II}_p\Big(\sum_{i=1}^{n} (\cos\theta_i) X_i, \sum_{j=1}^{n} (\cos\theta_j) X_j\Big) =$$

$$\sum_{i,j=1}^{n} \cos\theta_i \cos\theta_j \mathrm{II}_p(X_i, X_j) = \sum_{i=1}^{n} (\cos^2\theta_i) k_i, \text{ поскольку}$$

$$\mathrm{II}_p(X_i, X_j) = \langle L_p X_i, X_j \rangle = \langle k_i X_i, X_j \rangle = \begin{cases} k_i, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases} \quad \Uparrow$$

Следствие

Пусть $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ — двумерная гиперповерхность, X_1, X_2 — ортонормированный базис из ее главных направлений и k_1, k_2 — ее главные нормальные кривизны. Пусть $\theta_1 = \theta$ — угол между первым базисным вектором X_1 и произвольным касательным вектором x. Тогда справедлива формула Эйлера:

$$k_N(x) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta.$$

$\Downarrow$В самом деле, угол между вектором x и вторым базисным вектором X_2 есть $\theta_2 = \frac{\pi}{2} \pm \theta_1$ и $\cos\theta_2 = \pm\sin\theta_1$, откуда получается требуемое.$\Uparrow$

Из формулы Эйлера получаем $k_N(x) = k_1 + (k_2 - k_1)\sin^2\theta$. Следовательно, k_1, k_2 — экстремальные значения нормальной кривизны.

Нормальная кривизна в данном направлении

Для гиперповерхности $f(u,v) = {}^t(u^2+v^2, u^2-v^2, uv)$ в точке $p(1,1)$ найти:
а) главные нормальные кривизны;
б) нормальную кривизну в направлении касательной к линии $v = u^2$;
в) углы между вектором скорости кривой $v = u^2$ и главными направлениями (без отыскания самих главных направлений).

Вычисляем $f_u = {}^t(2u, 2u, v)$, $f_u(p) = {}^t(2,2,1)$, $g_{11}(p) = 9$; $f_v = {}^t(2v, -2v, u)$, $f_v(p) = {}^t(2,-2,1)$, $g_{12}(p) = 1$, $g_{22}(p) = 9$ и $[\mathrm{I}_p] = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$. Далее,

$$f_u \times f_v = \begin{vmatrix} 2 & 2 & e_1 \\ 2 & -2 & e_2 \\ 1 & 1 & e_3 \end{vmatrix} = {}^t(4,0,-8) \text{ и } \vec{N}(p) = \frac{1}{\sqrt{5}}\,{}^t(1,0,-2).$$

Теперь вычисляем $f_{uu} = {}^t(2,2,0)$, $f_{uv} = {}^t(0,0,1)$, $f_{vv} = {}^t(2,-2,0)$ и $h_{11}(p) = \langle f_{uu}, \vec{N}(p)\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}$, $h_{12}(p) = \langle f_{uv}, \vec{N}(p)\rangle = -\frac{2}{\sqrt{5}}$,
$h_{22}(p) = \langle f_{vv}, \vec{N}(p)\rangle = \frac{2}{\sqrt{5}}$ и $[\mathrm{II}_p] = \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Продолжение примера

Запишем уравнение для отыскания главных нормальных кривизн:
$\det([\mathrm{II}_p] - k[\mathrm{I}_p]) = 0$ или $\begin{vmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} - 9k & -\frac{2}{\sqrt{5}} - k \\ -\frac{2}{\sqrt{5}} - k & \frac{2}{\sqrt{5}} - 9k \end{vmatrix} = 0$. Имеем
$(\frac{2}{\sqrt{5}} - 9k)^2 - (k + \frac{2}{\sqrt{5}})^2 = 0$, т.е.
$(\frac{2}{\sqrt{5}} - 9k + k + \frac{2}{\sqrt{5}})(\frac{2}{\sqrt{5}} - 9k - k - \frac{2}{\sqrt{5}}) = 0$ и главные нормальные кривизны $k_1 = \frac{4}{8\sqrt{5}} = \frac{1}{2\sqrt{5}}$, $k_2 = 0$.
Для ответа на вопрос б) запишем параметризацию кривой $v = u^2$:
$\alpha(t) = {}^t(t, t^2)$. Ее производная в точке $p = \alpha(1)$ есть $\dot{\alpha}(1) = {}^t(1, 2)$.
Вычисляем
$\mathrm{I}_p(\dot{\alpha}(1), \dot{\alpha}(1)) = (1, 2) \cdot \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = (11, 19) \cdot {}^t(1, 2) = 49$ и
$\mathrm{II}_p(\dot{\alpha}(1), \dot{\alpha}(1)) = (1, 2) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{\sqrt{5}}(-1, 1) \cdot {}^t(1, 2) =$
$\frac{2}{\sqrt{5}}$. Теперь $k_N(\dot{\alpha}(1)) = \frac{\mathrm{II}_p(\dot{\alpha}(1), \dot{\alpha}(1))}{\mathrm{I}_p(\dot{\alpha}(1), \dot{\alpha}(1))} = \frac{2}{49\sqrt{5}}$.

Окончание примера

Для ответа на вопрос в) воспользуемся формулой Эйлера $K_N(\dot{\alpha}(1)) = k_1 \cos^2\theta + k_2 \sin^2\theta$, где θ – угол между главным направлением, соответствующим главной нормальной кривизне k_1, и вектором скорости $\dot{\alpha}(1)$. Имеем $\dfrac{2}{49\sqrt{5}} = \dfrac{\cos^2\theta}{2\sqrt{5}}$, откуда $\cos^2\theta = \dfrac{4}{49}$ и $\cos\theta = \dfrac{2}{7}$. Таким образом, углы между вектором скорости кривой $v = u^2$ и главными направлениями суть $\arccos\dfrac{2}{7}$ и $\arcsin\dfrac{2}{7}$.

Пусть $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ — гиперповерхность, $p = f(u)$.

Определения

Ненулевой вектор $x \in \mathrm{T}_p f$ называется *асимптотическим*, если $K_N(x) = 0$ или, что то же самое, $\mathrm{II}_p(x, x) = 0$.
Кривая $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ вдоль f называется *асимптотической*, если для любого $t \in I$ вектор $\dot\alpha(t)$ является асимптотическим.

Пусть $\alpha(t) = f(u(t))$. Очевидно, линия α будет асимптотической тогда и только тогда, когда $\mathrm{II}_p(\dot\alpha, \dot\alpha) = 0$. Имеем $\dot\alpha = f(u(t))^{\cdot} = \sum\limits_{i=1}^{n} f_{u^i} \dot u^i$, т.е. вектор $\dot\alpha$ имеет в стандартном базисе пространства $\mathrm{T}_p f$ координаты $\dot u^1, \dot u^2, \ldots, \dot u^n$. Таким образом, $\sum\limits_{i,j=1}^{n} h_{ij} \dot u^i \dot u^j = 0$. Умножая обе части последнего равенства на $(dt)^2$, получаем

Дифференциальное уравнение для нахождения асимптотических линий:

$$\sum_{i,j=1}^{n} h_{ij} du^i du^j = 0.$$

Дифференциальное уравнение для нахождения асимптотических линий для случая двумерной гиперповерхности

Для случая двумерной гиперповерхности $f(u,v) : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ получается следующее уравнение:

$$h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2 = 0.$$

Асимптотические линии конкретной гиперповерхности

Найти асимптотические линии гиперповерхности
$f(u,v) = {}^t(\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, u)$.

Вычисляем: $f_u = {}^t(\operatorname{sh} u \cos v, \operatorname{sh} u \sin v, 1)$, $f_v = {}^t(-\operatorname{ch} u \sin v, \operatorname{ch} u \cos v, 0)$;
$g_{11} = \langle f_u, f_u \rangle = \operatorname{sh}^2 u + 1 = \operatorname{ch}^2 u$, $g_{12} = \langle f_u, f_v \rangle = 0$, $g_{22} = \langle f_v, f_v \rangle = \operatorname{ch}^2 u$,
$g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \operatorname{ch}^4 u$ и $\sqrt{g} = \operatorname{ch}^2 u$.

Далее, $f_u \times f_v = \begin{vmatrix} \operatorname{sh} u \cos v & -\operatorname{ch} u \sin v & e_1 \\ \operatorname{sh} u \sin v & \operatorname{ch} u \cos v & e_2 \\ 1 & 0 & e_3 \end{vmatrix} =$
${}^t(-\operatorname{ch} u \cos v, -\operatorname{ch} u \sin v, \operatorname{ch} u \operatorname{sh} u)$ и

$$\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,{}^t(-\operatorname{ch} u \cos v, -\operatorname{ch} u \sin v, \operatorname{ch} u \operatorname{sh} u) = \frac{1}{\operatorname{ch} u}\,{}^t(-\cos v, -\sin v, \operatorname{sh} u).$$

Вычисляем далее: $f_{uu} = {}^t(\operatorname{ch} u \cos v, \operatorname{ch} u \sin v, 0)$,
$f_{uv} = {}^t(-\operatorname{sh} u \sin v, \operatorname{sh} u \cos v, 0)$, $f_{vv} = {}^t(-\operatorname{ch} u \cos v, -\operatorname{ch} u \sin v, 0)$;
$h_{11} = \langle f_{uu}, \vec{N} \rangle = -1$, $h_{12} = \langle f_{uv}, \vec{N} \rangle = 0$, $h_{22} = \langle f_{vv}, \vec{N} \rangle = 1$.
Записываем дифференциальное уравнение асимптотических линий:
$h_{11}du^2 + 2h_{12}dudv + h_{22}dv^2 = 0$ или $-du^2 + dv^2 = 0$; $dv = \pm du$ или
$v = \pm u + C$.

Предложение

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — область, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ — гиперповерхность. Любая прямая, целиком лежащая в образе $f(U)$, является асимптотической линией.

$\Downarrow$Пусть $\alpha : I \longrightarrow U$ — кривая в области U и $\beta(t) = f(\alpha(t))$ — прямая. Тогда $\ddot{\beta}(t) \equiv 0$. По лемме сл.38 $\mathrm{II}_{\alpha(t)}(\dot{\beta}(t)), \dot{\beta}(t))) = \langle \ddot{\beta}(t), \vec{N}(\dot{\alpha}(t)) \rangle \equiv 0$. Таким образом, в каждой точке $t \in I$ вектор $\dot{\beta}(t)$ имеет асимптотическое направление.$\Uparrow$

Пример линии $u = v$ вдоль поверхности, рассмотренной на предыдущем слайде, показывает, что обратное утверждение к предложению неверно: не всякая асимптотическая линия — прямая.

Рассмотрим поверхность вращения $f(u,v) = {}^t(x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u))$ с профилем ${}^t(x(u), 0, z(u))$, $u \in I \subseteq \mathbb{R}$, $-\pi < v < \pi$, $x(u) > 0$,
$\dot{x}(u)^2 + \dot{z}(u)^2 > 0 \ \forall u \in I$.
$f_u = {}^t(\dot{x}(u)\cos v, \dot{x}(u)\sin v, \dot{z}(u))$, $f_v = {}^t(-x(u)\sin v, x(u)\cos v, 0)$;
$g_{11} = \langle f_u, f_u\rangle = \dot{x}(u)^2 + \dot{z}(u)^2$, $g_{12} = g_{21} = \langle f_u, f_v\rangle = 0$,
$g_{22} = \langle f_v, f_v\rangle = x(u)^2$, $[\mathrm{I}_p] = \begin{pmatrix} \dot{x}(u)^2 + \dot{z}(u)^2 & 0 \\ 0 & x(u)^2 \end{pmatrix}$.

$$f_u \times f_v = \begin{vmatrix} \dot{x}(u)\cos v & -x(u)\sin v & e_1 \\ \dot{x}(u)\sin v & x(u)\cos v & e_2 \\ \dot{z}(u) & 0 & e_3 \end{vmatrix} =$$

${}^t(-x(u)\dot{z}(u)\cos v, -x(u)\dot{z}(u)\sin v, x(u)\dot{x}(u)$;
$|f_u \times f_v| = x(u)\sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{z}(u)^2}$.

$$\vec{N}_p = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{z}(u)^2}}\,{}^t(-\dot{z}(u)\cos v, -\dot{z}(u)\sin v, \dot{x}(u)).$$

$f_{uu} = {}^t(\ddot{x}(u)\cos v, \ddot{x}(u)\sin v, \ddot{z}(u))$, $f_{uv} = {}^t(-\dot{x}(u)\sin v, \dot{x}\cos v, 0)$,
$f_{vv} = {}^t(-x(u)\cos v, -x(u)\sin v, 0)$;

$$h_{11} = \langle f_{uu}, \vec{N}_p\rangle = \frac{\dot{x}(u)\ddot{z}(u) - \ddot{x}(u)\dot{z}(u)}{\sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{z}(u)^2}}, \ h_{12} = h_{21} = \langle f_{uv}, \vec{N}_p\rangle = 0,$$

$$h_{22} = \langle f_{vv}, \vec{N}_p\rangle = \frac{x(u)\dot{z}(u)}{\sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{z}(u)^2}}.$$

Вторая фундаментальная форма и основной оператор поверхности вращения

$$[\mathrm{II}_p] = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{z}(u)^2}} \begin{pmatrix} \dot{x}(u)\ddot{z}(u) - \ddot{x}(u)\dot{z}(u) & 0 \\ 0 & x(u)\dot{z}(u) \end{pmatrix}$$

$$[L_p] = [\mathrm{I}_p]^{-1} \cdot [\mathrm{II}_p] = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{z}(u)^2}} \begin{pmatrix} (\dot{x}(u)^2 + \dot{z}(u)^2)^{-1} & 0 \\ 0 & (x(u)^2)^{-1} \end{pmatrix} \cdot$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(u)\ddot{z}(u) - \ddot{x}(u)\dot{z}(u) & 0 \\ 0 & x(u)\dot{z}(u) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\dot{x}(u)\ddot{z}(u) - \ddot{x}(u)\dot{z}(u)}{(\dot{x}(u)^2 + \dot{z}(u)^2)^{3/2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\dot{z}(u)}{x(u)\sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{z}(u)^2}} \end{pmatrix}.$$

$$K = \mathsf{det}([L_p]) = \frac{(\dot{x}(u)\ddot{z}(u) - \ddot{x}(u)\dot{z}(u))\dot{z}(u)}{(x(u)\dot{x}(u)^2 + \dot{z}(u)^2)^2};$$

$$H = \mathsf{tr}([L_p]) = \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{x}(u)\ddot{z}(u) - \ddot{x}(u)\dot{z}(u)}{(\dot{x}(u)^2 + \dot{z}(u)^2)^{3/2}} + \frac{\dot{z}(u)}{x(u)\sqrt{\dot{x}(u)^2 + \dot{z}(u)^2}}\right).$$