Глава II. Поверхности
§ 6. Внутренняя геометрия поверхности

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Дифференциальная геометрия и топология
для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
III семестр

Как определить геометрию на поверхности

Чтобы определить геометрию на поверхности, нужно в каждом касательном пространстве задать скалярное произведение.

Определение

Пространство $\mathbb{R}^m$, в котором содержится образ $f(U)$ поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, называется *окружающим пространством поверхности* f.

Требуется определить на поверхности f "геометрию"(т.е. скалярное произведение в каждом касательном пространстве) таким образом, чтобы свойства всех фигур, лежащих на поверхности $f(U)$, совпадали со свойствами этих же фигур после того, как поверхность убрали, а фигуры бы остались висеть в окружающем пространстве $\mathbb{R}^m$, сохранив свою форму.
Каждое касательное пространство $\mathrm{T}_p f$ приклеено к точке $f(p) \in f(U)$ и $\mathrm{T}_p f \subseteq \mathrm{T}_{f(p)}\mathbb{R}^m \cong \overrightarrow{\mathbb{R}}^m$. Наша задача будет решена, если скалярное произведение векторов в $\mathrm{T}_p f$ будет совпадать со скалярным произведением этих векторов в $\overrightarrow{\mathbb{R}}^m$.

Первая фундаментальная форма

Пусть U — область из $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — поверхность, $p \in U$.

Определение и обозначения

Первой фундаментальной формой поверхности f в точке p называется скалярное произведение в $\mathrm{T}_p f$, индуцированное из окружающего евклидова пространства $\mathrm{T}_{f(p)}\mathbb{R}^m$. Обозначаем первую фундаментальную форму через $\mathrm{I}_p(x, y) = \langle x, y\rangle_{\mathbb{R}^m}$ для $x, y \in \mathrm{T}_p f$. Другие обозначения: $\mathrm{I}(p; x, y) = \langle x, y\rangle_p$.

Каждое векторное касательное пространство $\mathrm{T}_p f$ превращается в еклидово пространство со скалярным произведением, определенным первой фундаментальной формой. В разных касательных пространствах это скалярное произведение может быть разным.

Первой фундаментальной формой поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ называется совокупность форм $\mathrm{I}_p(x, y)$ по всем точкам $p \in U$.

Первая фундаментальная форма — это билинейная форма.

Напомним, что $f_{u^1}, \dots, f_{u^n}$ — стандартный базис $\mathrm{T}_p f$. Пусть $x, y \in \mathrm{T}_p f$. Тогда $x = \sum_{i=1}^n \xi^i f_{u^i}(p)$, $y = \sum_{j=1}^n \eta^j f_{u^j}(p)$. Имеем
$\mathrm{I}_p(x,y) = \left\langle \sum_{i=1}^n \xi^i f_{u^i}(p), \sum_{j=1}^n \eta^j f_{u^j}(p) \right\rangle = \sum_{i,j=1}^n \xi^i \eta^j \langle f_{u^i}(p), f_{u^j}(p)\rangle =$
$= \sum_{i,j=1}^n \mathrm{I}_p(f_{u^i}(p), f_{u^j}(p))\xi^i\eta^j$. Положим

$$g_{ij}(p) = \langle f_{u^i}(p), f_{u^j}(p)\rangle = \mathrm{I}_p(f_{u^i}(p), f_{u^j}(p)).$$

Коэффициенты $g_{ij}(p) : U \longrightarrow \mathbb{R}$ представляют собой гладкие функции, так как являются скалярными произведениями гладких функций.

Определение

Функции $g_{ij}(p)$ называются *коэффициентами первой фундаментальной формы* или *метрическими коэффициентами* поверхности f. Матрица $(g_{ij}(p))_{n\times n}$ называется *матрицей первой фундаментальной формы поверхности f*. Она обозначается через $[\mathrm{I}_p]$.

Поскольку матрица $[\mathrm{I}_p] = (g_{ij})_{n\times n}$ является матрицей Грама линейно независимой системы векторов, она является симметрической, все ее элементы главной диагонали и угловые главные миноры положительны.

Найдем матрицу первой фундаментальной формы поверхности вращения в окружающем пространстве $\mathbb{R}^3$ со стандартным скалярным произведением $f(u,v) = (x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u))$, полученной вращением кривой $\alpha(u) = (x(u), 0, z(u))$ вокруг оси Oz. Так как $f_u = (\dot{x}\cos v, \dot{x}\sin v, \dot{z})$, $f_v = (-x\sin v, x\cos v, 0)$, имеем $g_{11} = \langle f_u, f_u\rangle = \dot{x}^2 + \dot{z}^2 = |\dot{\alpha}|^2$, $g_{12} = g_{21} = \langle f_u, f_v\rangle = 0$, $g_{22} = \langle f_v, f_v\rangle = x^2$. Матрица $[\mathrm{I}_p] = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} |\dot{\alpha}|^2 & 0 \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$.

Так как f_{u^i} — касательные векторы к координатным линиям на любой поверхности, получаем следующее утверждение.

Лемма

Координатная сеть на поверхности ортогональна тогда и только тогда, когда матрица первой фундаментальной формы этой поверхности диагональна.

$\Downarrow$Если $i \neq j$, то $f_{u^i} \perp f_{u^j} \Leftrightarrow \langle f_{u^i}, f_{u^j}\rangle = 0 \Leftrightarrow g_{ij} = 0$$\Uparrow$.

1-я фундаментальная форма

Найти первую фундаментальную форму поверхности $f(u,v) = {}^t(u\cos v, u\sin v, av)$, если скалярное произведение в окружающем пространстве $\mathbb{R}^3$ задано матрицей Грама $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Вычисляем: $f_u(u,v) = {}^t(\cos v, \sin v, 0)$, $f_v(u,v) = {}^t(-u\sin v, u\cos v, a)$;

$$g_{11} = \langle f_u, f_u \rangle = (\cos v, \sin v, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos v \\ \sin v \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$(\cos v + \sin v, \cos v + 2\sin v, 0) \cdot {}^t(\cos v, \sin v, 0) = 1 + \sin 2v + \sin^2 v;$$

$$g_{12} = g_{21} = \langle f_u, f_v \rangle = (\cos v, \sin v, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ a \end{pmatrix} =$$

$$(\cos v + \sin v, \cos v + 2\sin v, 0) \cdot {}^t(-u\sin v, u\cos v, a) = u\cos 2v + \frac{u}{2}\sin 2v;$$

Окончание примера

$$g_{22} = \langle f_v, f_v \rangle = (-u\sin v, u\cos v, a) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -u\sin v \\ u\cos v \\ a \end{pmatrix} =$$

$$(u(\cos v - \sin v), u(2\cos v - \sin v), 4a) \cdot {}^t(-u\sin v, u\cos v, a) =$$

$$u^2(\sin^2 v - \sin v\cos v + 2\cos^2 v - \sin v\cos v) + 4a^2 = u^2(1 + \cos^2 v - \sin 2v) + 4a^2.$$

Записываем матрицу первой фундаментальной формы:

$$[\mathrm{I}_{p(u,v)}] = \begin{pmatrix} 1 + \sin 2v + \sin^2 v & u\cos 2v + \dfrac{u}{2}\sin 2v \\ u\cos 2v + \dfrac{u}{2}\sin 2v & u^2(1 + \cos^2 v - \sin 2v) + 4a^2 \end{pmatrix}.$$

Свойства внутренней геометрии

Традиционно для поверхности из $\mathbb{R}^2$ в $\mathbb{R}^3$ метрические коэффициенты обозначаются через $E = g_{11}$, $F = g_{12}$, $G = g_{22}$.

Определение

Договоримся все свойства поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ (и фигур на этой поверхности), которые можно выразить через коэффициенты ее первой фундаментальной формы (и параметры, определяющие эти поверхностные фигуры), называть *свойствами внутренней геометрии поверхности* f. Совокупность таких свойств составляет *внутреннюю геометрию поверхности*.

Это, в частности, углы, длины линий, площади и прочие *метрические* величины, т.е. величины, которые можно найти, зная скалярное произведение.

Длина кривой вдоль поверхности

Пусть U — область из $\mathbb{R}^n$, $f: U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — поверхность, α — кривая вдоль f, т.е. $\alpha(t) = f(u(t))$, где $u: [a,b] \longrightarrow U$ — кривая в U. Найдем длину α. Имеем $\ell[\alpha]|_a^b = \int_a^b |\dot\alpha(t)| dt$. Подсчитаем $|\dot\alpha(t)|$. В силу формулы (2) сл.10 т.5 имеем

$$\dot\alpha(t) = \frac{d}{dt} f(u(t)) = df_{u(t)}\dot u(t) = \sum_{i=1}^n \dot u^i(t) f_{u^i}(u(t)) = [f_{u^1} \dots f_{u^n}] \begin{pmatrix} \dot u_1 \\ \vdots \\ \dot u_n \end{pmatrix}.$$

Далее
$|\dot\alpha|^2 = \mathrm{I}_{u(t)}(\dot\alpha, \dot\alpha) = \langle \dot u^i(t) f_{u^i}(u(t)), \dot u^j(t) f_{u^j}(u(t))\rangle = g_{ij}(u(t))\dot u^i(t)\dot u^j(t)$, и $\ell[\alpha]|_a^b = \int_a^b \sqrt{g_{ij}(u(t))\dot u^i(t)\dot u^j(t)} dt$. Мы видим, что длина $\ell[\alpha]|_a^b$ выражается только через g_{ij} (кривая α дана, следовательно, дана и кривая $u(t) = (u^1(t), \dots, u^n(t))$) и потому является свойством внутренней геометрии поверхности f.

Общая формула

$$\ell[\alpha]|_a^b = \int_a^b \sqrt{g_{ij}\dot u^i \dot u^j} dt.$$

Теперь отдадим дань традиции: $s = \int_a^t |\dot{\alpha}(\theta)|d\theta$, $ds = |\dot{\alpha}(t)|dt$, dt — произвольное число из $\mathbb{R}$, $u(t) = (u^1(t), \ldots, u^n(t))$, $\dot{u}^i(t)dt = du^i$, $ds^2 = \sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}(u(t))du^i du^j$. ds называется *линейным элементом поверхности*. Формулу длины можно записать так (внеся dt под корень):

$$\ell[\alpha]|_a^b = \int_a^b \sqrt{\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(u(t))du^i du^j} = \int_a^b ds.$$

Пусть U — открытое подмножество в $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ — поверхность, $w : [a, b] \longrightarrow U$, $w(t) = (u(t), v(t))$ — плоская кривая, $\alpha(t) = f(w(t))$. Тогда

$$\ell[\alpha]|_a^b = \int_a^b \sqrt{g_{11}\dot{u}^2 + 2g_{12}\dot{u}\dot{v} + g_{22}\dot{v}^2}dt =$$

$$\int_a^b \sqrt{g_{11}du^2 + 2g_{12}dudv + g_{22}dv^2} = \int_a^b \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.$$

Формула для длины кривой вдоль двумерной поверхности

$$\ell[\alpha]|_a^b = \int_a^b \sqrt{Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2}.$$

Периметр криволинейного треугольника

Найти периметр криволинейного треугольника, образованного кривыми $u = \pm\dfrac{av^2}{2}$ и $v = 1$ вдоль поверхности, матрица 1-й фундаментальной формы которой имеет вид $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{pmatrix}$.

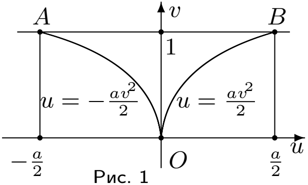

Рис. 1

Изобразим кривые в плоскости Ouv.
Отрезок AB задается параметризацией $\alpha(t) = {}^t(t, 1)$, где $-\frac{a}{2} \leq t \leq \frac{a}{2}$.
Тогда $\dot{\alpha}(t) = {}^t(1, 0)$ и $\langle \dot{\alpha}, \dot{\alpha} \rangle = (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & t^2 + a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1$. Длина

$$\ell[AB] = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \sqrt{1}dt = a.$$

Дуга OA задается параметризацией $\beta(t) = {}^t(-\dfrac{at^2}{2}, t)$, где $0 \le t \le 1$. Тогда

$\dot\beta(t) = {}^t(-at, 1)$ и $\langle \dot\beta, \dot\beta \rangle = (-at, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2(\dfrac{t^4}{4} + 1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -at \\ 1 \end{pmatrix} =$

$(-at, a^2(\dfrac{t^4}{4} + 1))\,{}^t(-at, 1) = a^2(t^2 + \dfrac{t^4}{4} + 1) = (a(1 + \dfrac{t^2}{2}))^2$. Длина

$$\ell[OA] = \int_0^1 \sqrt{\langle \dot\beta, \dot\beta \rangle}dt = a\int_0^1 (1 + \frac{t^2}{2})dt = a(t + \frac{t^3}{6})\Big|_0^1 = \frac{7}{6}a.$$

Дуга OB задается параметризацией $\gamma(t) = {}^t(\dfrac{at^2}{2}, t)$, где $0 \le t \le 1$. Тогда

$\dot\gamma(t) = {}^t(at, 1)$ и $\langle \dot\gamma, \dot\gamma \rangle = (at, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2(\dfrac{t^4}{4} + 1) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} at \\ 1 \end{pmatrix} =$

$(at, a^2(\dfrac{t^4}{4} + 1))\,{}^t(at, 1) = a^2(t^2 + \dfrac{t^4}{4} + 1) = (a(1 + \dfrac{t^2}{2}))^2$. Длина

$$\ell[OB] = \int_0^1 \sqrt{\langle \dot\gamma, \dot\gamma \rangle}dt = a\int_0^1 (1 + \frac{t^2}{2})dt = a(t + \frac{t^3}{6})\Big|_0^1 = \frac{7}{6}a.$$

Периметр равен $\ell[AB] + \ell[OA] + \ell[OB] = a + \dfrac{7}{6}a + \dfrac{7}{6}a = \dfrac{10}{3}a$.

Как известно, углом между кривыми называется угол между их касательными в точке пересечения этих кривых. Рассмотрим две кривые $\alpha_1(t) = f(u_1(t))$, $\alpha_2(\theta) = f(u_2(\theta))$ вдоль поверхности f, пересекающиеся в точке $f(p)$: $\alpha_1(t_0) = f(p) = \alpha_2(\theta_0)$, $u_1(t_0) = p = u_2(\theta_0)$. Запишем $\dot\alpha_1(t_0) = \sum\limits_{i=1}^{n} \dot u^i(t_0) f_{u^i}(p)$,$\dot\alpha_2(\theta_0) = \sum\limits_{j=1}^{n} \dot u^j(\theta_0) f_{u^j}(p)$. Вычисляем угол между векторами $\dot\alpha_1(t_0)$ и $\dot\alpha_2(\theta_0)$:

$$\cos\varphi = \frac{\langle\dot\alpha_1(t_0), \dot\alpha_2(\theta_0)\rangle}{|\dot\alpha_1(t_0)||\dot\alpha_2(\theta_0)|} = \frac{\mathrm{I}_p(\dot\alpha_1(t_0), \dot\alpha_2(\theta_0))}{\sqrt{\mathrm{I}_p(\dot\alpha_1(t_0), \dot\alpha_1(t_0))}\sqrt{\mathrm{I}_p(\dot\alpha_2(\theta_0), \dot\alpha_2(\theta_0))}} =$$

$$\frac{\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p)\dot u_1^i(t_0)\dot u_2^j}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p)\dot u_1^i(t_0)\dot u_1^j(t_0)}\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} g_{ij}(p)\dot u_2(\theta_0)^i\dot u_2^j(\theta_0)}}.$$

Формула через производные

$$\cos\varphi = \frac{g_{ij}(p)\dot u_1^i(t_0)\dot u_2^j(\theta_0)}{\sqrt{g_{ij}(p)\dot u_1^i(t_0)\dot u_1^j(t_0)}\sqrt{g_{ij}(p)\dot u_2^i(\theta_0)\dot u_2^j(\theta_0)}}.$$

Запишем снова $\dot\alpha_1(t_0)=\sum_{i=1}^n \dot u^i(t_0)f_{u^i}(p)$,$\dot\alpha_2(\theta_0)=\sum_{j=1}^n \dot u^j(\theta_0)f_{u^j}(p)$.
Умножив первое равенство на dt, а второе на $d\theta$, получим
$\dot\alpha_1(t_0)dt=\sum_{i=1}^n f_{u^i}(p)du^i(t_0)=d\alpha_1$,$\dot\alpha_2(\theta_0)d\theta=\sum_{j=1}^n f_{u^j}(p)du^j(\theta_0)=d\alpha_2$, ибо $\dot u^i(t_0)dt=du^i(t_0)$ и $\dot u^j(\theta_0)d\theta=du^j(\theta_0)$. Теперь $\cos\varphi=\dfrac{\langle d\alpha_1,d\alpha_2\rangle}{|d\alpha_1||d\alpha_2|}=$

$$\frac{\mathrm{I}_p(d\alpha_1,d\alpha_2)}{\sqrt{\mathrm{I}_p(d\alpha_1,d\alpha_1)\mathrm{I}_p(d\alpha_2,d\alpha_2)}}=\frac{\sum\limits_{i,j=1}^n g_{ij}(p)du_1^i du_2^j}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^n g_{ij}(p)du_1^i du_1^j}\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^n g_{ij}(p)du_2^i du_2^j}}.$$

Формула через дифференциалы

$$\cos\varphi=\frac{\sum\limits_{i,j=1}^n g_{ij}(p)du_1^i du_2^j}{\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^n g_{ij}(p)du_1^i du_1^j}\sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^n g_{ij}(p)du_2^i du_2^j}}.$$

Постановка задачи и определение

На сфере требуется найти кривые, пересекающие все меридианы под одним и тем же углом φ. Любая такая кривая называется *локсодромой*.

Представляет интерес случай $\varphi < \frac{\pi}{2}$, так как при $\varphi = \frac{\pi}{2}$ получаются параллели. Рассмотрим сферу $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, где $f(u,v) = {}^t(R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)$. Тогда $[df_p] = [f_u, f_v] =$
$$= \begin{pmatrix} -R\sin u\cos v & -R\cos u\sin v \\ -R\sin u\sin v & R\cos u\cos v \\ R\cos u & 0 \end{pmatrix} \text{ и } [\mathrm{I}_p] = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2 u \end{pmatrix}.$$
Пусть кривая $\alpha_1(t)$ — меридиан на сфере, т.е. $v = \mathrm{const}$ — уравнение его прообраза в области $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Тогда касательный вектор $\dot\alpha_1 = f_u$ и в касательном пространстве $\mathrm{T}_p f$ он имеет координаты $(1,0)$. Пусть $\alpha_2(\theta)$ — локсодрома на сфере и пусть $u_2(\theta) = (u(\theta), v(\theta))$ — параметрическое задание ее прообраза в области $U \subseteq \mathbb{R}^2$. Тогда в касательном пространстве $\mathrm{T}_p f$ касательный вектор $\dot\alpha_2(\theta)$ имеет координаты $(\dot u(\theta), \dot v(\theta))$. По формуле сл.9 получаем $\cos\varphi = \frac{\langle\dot\alpha_1,\dot\alpha_2\rangle}{|\dot\alpha_1|\cdot|\dot\alpha_2|} = \frac{R^2\dot u}{R^2\sqrt{\dot u^2+\dot v^2\cos^2 u}}$.

После преобразований $dv^2 = \mathrm{tg}^2\varphi\cdot\frac{du^2}{\cos^2 u}$ и $dv = \pm\mathrm{tg}\varphi\cdot\frac{du}{\cos u}$. Интегрируя, получаем $v = \pm\mathrm{tg}\varphi\cdot\ln\mathrm{tg}(\frac{\pi}{4}+\frac{u}{2}) + v_0$ — семейство интегральных кривых, расположенных в области $U \subseteq \mathbb{R}^2$.

Пример [1], стр. 246, задача 2

Углы криволинейного треугольника

Найти углы криволинейного треугольника, образованного кривыми $u = \pm\dfrac{av^2}{2}$ и $v = 1$ вдоль поверхности, матрица 1-й фундаментальной формы которой имеет вид $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2 + a^2 \end{pmatrix}$.

Ищем угол φ_O между образами кривых $\beta(t) = {}^t(-\dfrac{at^2}{2}, t)$, где $0 \le t \le 1$ и $\gamma(t) = {}^t(\dfrac{at^2}{2}, t)$, где $0 \le t \le 1$ в точке $f(O)$: $(g_{ij})(O) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$, $\dot\beta(0) = {}^t(-at, 1)(0) = {}^t(0, 1)$, $\dot\gamma(0) = {}^t(-at, 1)(0) = {}^t(0, 1)$. Далее, $\langle\dot\beta(0), \dot\gamma(0)\rangle = (0, 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a^2$; аналогично $|\dot\beta(0)| = \sqrt{\langle\dot\beta(0), \dot\beta(0)\rangle} = a$ и $|\dot\gamma(0)| = a$. Имеем $\cos\varphi_O = \dfrac{\langle\dot\beta(0), \dot\gamma(0)\rangle}{|\dot\beta(0)|\cdot|\dot\gamma(0)|} = 1$.

Ищем угол φ_A между образами кривых $\alpha(\theta) = {}^t(\theta, 1)$, где $-\frac{a}{2} \le \theta \le \frac{a}{2}$ и $\beta(t) = {}^t(\dfrac{-at^2}{2}, t)$, где $0 \le t \le 1$ в точке A (при $\theta = -\frac{a}{2}$ и $t = 1$):

$(g_{ij})(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{5a^2}{4} \end{pmatrix}$, $\dot\alpha(-\frac{a}{2}) = {}^t(1,0)(-\frac{a}{2}) = {}^t(1,0)$,

$\dot\beta(1) = {}^t(-at, 1)(1) = {}^t(-a, 1)$. Далее,

$$\langle\dot\alpha(-\tfrac{a}{2}), \dot\beta(1)\rangle = (1,0)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{5a^2}{4} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} = -a,$$

$$|\dot\alpha(-\tfrac{a}{2})| = \sqrt{\langle\dot\alpha(-\tfrac{a}{2}), \dot\alpha(-\tfrac{a}{2})\rangle} = 1,$$

$$\langle\dot\beta(1), \dot\beta(1)\rangle = (-a, 1)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{5a^2}{4} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -a \\ 1 \end{pmatrix} = (-a, \tfrac{5a^2}{4})\cdot{}^t(-a, 1) = \tfrac{9a^2}{4}$$

и $|\dot\beta(1)| = \sqrt{\langle\dot\beta(1), \dot\beta(1)\rangle} = \frac{3a}{2}$. Таким образом,

$$\cos\varphi_A = \frac{\langle\dot\alpha(-\frac{a}{2}), \dot\beta(1)\rangle}{|\dot\alpha(-\frac{a}{2})|\cdot|\dot\beta(1)|} = -\tfrac{2}{3}.$$

Окончание примера

Ищем угол φ_B между образами кривых $\alpha(\theta) = {}^t(\theta, 1)$, где $-\frac{a}{2} \le \theta \le \frac{a}{2}$ и $\gamma(t) = {}^t(\dfrac{at^2}{2}, t)$, где $0 \le t \le 1$ в точке B (при $\theta = \frac{a}{2}$ и $t = 1$):

$(g_{ij})(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{5a^2}{4} \end{pmatrix}$, $\dot\alpha(\frac{a}{2}) = {}^t(1,0)(\frac{a}{2}) = {}^t(1,0)$,

$\dot\gamma(1) = {}^t(at,1)(1) = {}^t(a,1)$. Далее,

$\langle\dot\alpha(\frac{a}{2}), \dot\gamma(1)\rangle = (1,0)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{5a^2}{4} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = a,$

$|\dot\alpha(\frac{a}{2})| = \sqrt{\langle\dot\alpha(\frac{a}{2}), \dot\alpha(\frac{a}{2})\rangle} = 1,$

$\langle\dot\gamma(1), \dot\gamma(1)\rangle = (a,1)\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{5a^2}{4} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix} = (a, \frac{5a^2}{4})\cdot{}^t(a,1) = \frac{9a^2}{4}$ и

$|\dot\gamma(1)| = \sqrt{\langle\dot\gamma(1), \dot\gamma(1)\rangle} = \frac{3a}{2}$. Таким образом, $\cos\varphi_A = \dfrac{\langle\dot\alpha(-\frac{a}{2}), \dot\gamma(1)\rangle}{|\dot\alpha(-\frac{a}{2})|\cdot|\dot\gamma(1)|} = \frac{2}{3}$.

Объем n-мерной поверхности

Пусть U — область в $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — n-мерная поверхность. Тогда для любого $p \in U$ имеем $V_n(f_{u^1}, \dots, f_{u^n}) = \sqrt{\det(g_{ij})} = \sqrt{g}$, где g — определитель матрицы первой фундаментальной формы, поскольку $g_{ij} = \langle f_{u^i}, f_{u^j} \rangle$ — метрические коэффициенты. Для инъективной поверхности f определим *объем* ее образа $V_n(f(U)) = V_n[f]$ как число

Формула для объема n-мерной поверхности

$$V_n[f] = \int_U \sqrt{g(u^1, u^2, \dots, u^n)} du^1 du^2 \cdots du^n.$$

Это свойство внутренней геометрии поверхности.

Приведем некоторые рассуждения в обоснование определения объема поверхности. Пусть множество U разбито гиперплоскостями на параллелотопы U_j на векторах $\Delta u^1 e_1$, $\Delta u^2 e_2$, $\Delta u^n e_n$. Тогда $f(U_j)$ — кусок поверхности, который мы (в соответствии с общей идеей дифференциальной геометрии) заменяем на параллелотоп в касательном пространстве $\mathrm{T}_{p_j} f$, построенный на векторах $df_{p_j}(\Delta u^1 e_1) = \Delta u^1 f_{u^1}(p_j)$, $df_{p_j}(\Delta u^2 e_2) = \Delta u^2 f_{u^2}(p_j), \ldots$, $df_{p_j}(\Delta u^n e_n) = \Delta u^n f_{u^n}(p_j)$. Обозначим этот параллелотоп через $\tilde{U}_j$. Его объем $V_n[\tilde{U}_j] = \sqrt{g(p_j)}\Delta u^1 \ldots \Delta u^n$. Объем куска поверхности $V_n[f(U_j)]$ заменяем на $V_n[\tilde{U}_j]$. Тогда объем всей поверхности $V_n[f] \approx \sum\limits_j \sqrt{g(p_j)}\Delta u^1 \ldots \Delta u^n$ — интегральная сумма для $\int_U \sqrt{g(u^1, u^2, \ldots, u^n)}du^1 du^2 \cdots du^n$.

В качестве примера рассмотрим вычисление объема графика функции $x^{n+1} = \varphi(x^1, \dots, x^n)$, где $x = (x^1, \dots, x^n) \in U$, U — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим функцию $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, полагая $f(x) = (x^1, \dots, x^n, \varphi(x^1, \dots, x^n))$. Это инъективная поверхность, ибо $f'(x) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \varphi_{x^1} & \varphi_{x^2} & \dots & \varphi_{x^n} \end{pmatrix}$ и $\mathrm{r}(f') = n$. Положим для облегчения обозначений $a_i = \varphi_{x^i}$ Вычислим коэффициенты первой фундаментальной формы: $g_{ij} = \langle f_{x^i}, f_{x^j} \rangle = \begin{cases} 1 + a_i^2, & \text{если } i = j, \\ a_i a_j, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$ Далее вычислим определитель $g = \begin{vmatrix} 1 + a_1^2 & a_1 a_2 & \dots & a_1 a_n \\ a_1 a_2 & 1 + a_2^2 & \dots & a_2 a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1 a_n & a_2 a_n & \dots & 1 + a_n^2 \end{vmatrix}$.

Обозначив его через Δ_n, имеем

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \dots & a_1a_n \\ a_1a_2 & 1+a_2^2 & \dots & a_2a_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1a_n & a_2a_n & \dots & a_n^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \dots & 0 \\ a_1a_2 & 1+a_2^2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1a_n & a_2a_n & \dots & 1 \end{vmatrix} =$$

$$a_n \begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \dots & a_1 \\ a_1a_2 & 1+a_2^2 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1a_n & a_2a_n & \dots & a_n \end{vmatrix} + \Delta_{n-1}.$$ Прибавляя в определителе

$$\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \dots & a_1 \\ a_1a_2 & 1+a_2^2 & \dots & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1a_n & a_2a_n & \dots & a_n \end{vmatrix}$$ последний столбец, умноженный на $-a_i$, к i-му столбцу при $i = 1, \dots, n-1$, приводим его матрицу к диагональному виду и убеждаемся, что указанный определитель равен a_n. Таким образом, $\Delta_n = a_n^2 + \Delta_{n-1}$, откуда по индукции легко получается $\Delta_n = 1 + a_1^2 + \ldots + a_n^2$. Таким образом, $g = 1 + \varphi_{x^1}^2 + \ldots + \varphi_{x^n}^2$ и $V_n[f] = \int_U \sqrt{1 + \varphi_{x^1}^2 + \ldots + \varphi_{x^n}^2}\, dx^1 \ldots x^n$. Получилась формула, обобщающая формулу для длины кривой.

Площадь тора-бублика

Вычислим площадь (т.е. двумерный объем) поверхности тора-бублика $f: U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, заданного параметризацией $f(u,v) = {}^t((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u)$, где $a > b$. Область $U \subset \mathbb{R}^2$ задается неравенствами $0 < u, v < 2\pi$.

Стандартный базис касательного пространства $\mathrm{T}_p f$ в произвольной точке $p(u,v) \in U$: $f_u = {}^t(-b\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, b\cos u)$; $f_v = {}^t(-(a + b\cos u)\sin v, (a + b\cos u)\cos v, 0)$. Имеем $g_{11} = \langle f_u, f_u\rangle = b^2$, $g_{12} = g_{21} = \langle f_u, f_v\rangle = 0$, $g_{22} = \langle f_v, f_v\rangle = (a + b\cos u)^2$. Матрица первой фундаментальной формы тора-бублика имеет вид $[\mathrm{I}_p] = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & (a + b\cos u)^2 \end{pmatrix}$. Тогда $g = \det(g_{ij}) = b^2(a + b\cos u)^2$ и так как $a > b$, квадратный корень извлекается: $\sqrt{g} = b(a + b\cos u)$.

Площадь поверхности тора-бублика: $V[f] = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sqrt{g}\,du\,dv =$

$$\int_0^{2\pi} dv \int_0^{2\pi} b(a + b\cos u)du = 2\pi(2\pi ba) = (2\pi a)(2\pi b).$$

Пример [1], стр. 251, пример 33.2

Площадь настоящего тора

Вычислим площадь (т.е. двумерный объем) поверхности $f : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ – настоящего тора $S^1_a \times S^1_b$, заданного параметризацией $f(u, v) = {}^t(a \cos u, a \sin u, b \cos v, b \sin v)$. Область $U \subset \mathbb{R}^2$ задается неравенствами $0 < u, v < 2\pi$.

Стандартный базис касательного пространства $\mathrm{T}_p f$ в произвольной точке $p(u, v) \in U$: $f_u = {}^t(-a \sin u, a \cos u, 0, 0)$; $f_v = {}^t(0, 0, -b \sin v, b \cos v)$. Имеем $g_{11} = \langle f_u, f_u \rangle = a^2$, $g_{12} = g_{21} = \langle f_u, f_v \rangle = 0$, $g_{22} = \langle f_v, f_v \rangle = b^2$. Матрица первой фундаментальной формы настоящего тора имеет вид $[\mathrm{I}_p] = (g_{ij}) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}$. Тогда $g = \det(g_{ij}) = a^2 b^2$ и $\sqrt{g} = ab$.

Площадь поверхности тора-бублика:

$$V[f] = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \sqrt{g} du dv = \int_0^{2\pi} dv \int_0^{2\pi} ab du = 2\pi(2\pi ab) = (2\pi a)(2\pi b).$$

Замена параметров на поверхности

Пусть $U, \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n$ — области, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\tilde{f} : \tilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — поверхности.

Определение

Будем говорить, что эти поверхности *связаны заменой параметров Φ*, если $\Phi : U \longrightarrow \tilde{U}$ — диффеоморфизм и для любого $u_0 \in U$ справедливо равенство $f(u_0) = \tilde{f}(\Phi(u_0))$, т.е. $f = \tilde{f} \circ \Phi$.

Предложение

Если поверхности f и $\tilde{f}$ связаны заменой параметров Φ, то для любой точки $u_0 \in U$ имеет место равенство $\mathrm{T}_{u_0} f = \mathrm{T}_{\Phi(u_0)} \tilde{f}$.

$\Downarrow$Из равенства $f = \tilde{f} \circ \Phi$ получаем $f'(u_0) = \tilde{f}'(\Phi(u_0))\Phi'(u_0)$ или $df_{u_0} = d\tilde{f}_{\Phi(u_0)} \cdot d\Phi_{u_0}$. Оператор $d\Phi_{u_0}$ невырожденный, поэтому $\mathrm{r}(d\Phi_{u_0}) = n$. Так как $\mathrm{T}_{u_0} f = \mathrm{Im} df_{u_0}$ и $\mathrm{T}_{\Phi(u_0)} \tilde{f} = \mathrm{Im} d\tilde{f}_{\Phi(u_0)}$, имеем $\mathrm{T}_{u_0} f \subseteq \mathrm{T}_{\Phi(u_0)} \tilde{f}$. Поскольку $\dim \mathrm{T}_{u_0} f = \dim \mathrm{T}_{\Phi(u_0)} \tilde{f}$, заключаем, что $\mathrm{T}_{u_0} f = \mathrm{T}_{\Phi(u_0)} \tilde{f}$.$\Uparrow$

Посмотрим, как изменяется матрица первой фундаментальной формы при замене параметров. Пусть поверхности $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\tilde{f} : \tilde{U} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ связаны заменой параметров $\Phi : U \longrightarrow \tilde{U}$.
Легко заметить, что справедливо равенство

$$[f_{u^1}, \ldots, f_{u^n}] = [\tilde{f}_{\tilde{u}^1}, \ldots, \tilde{f}_{\tilde{u}^n}]\Phi'(u), \qquad (1)$$

где $\Phi'(u)$ — матрица перехода.
Имеем $(g_{ij}) = {}^t f'(u) \cdot f'(u)$; $(\tilde{g}_{ij}) = {}^t\tilde{f}'(\tilde{u}) \cdot \tilde{f}'(\tilde{u})$. Так как $\Phi(u) = \tilde{u}$ и $f'(u) = \tilde{f}'(\tilde{u})\Phi'(u)$ в силу правила дифференцирования, получаем $(g_{ij}) = {}^t(\tilde{f}'(\tilde{u}) \cdot \Phi'(u)) \cdot \tilde{f}'(\tilde{u}) \cdot \Phi'(u) = {}^t\Phi'(u) \cdot ({}^t\tilde{f}'(\tilde{u}) \cdot \tilde{f}'(\tilde{u})) \cdot \Phi'(u) = {}^t\Phi'(u) \cdot (\tilde{g}_{ij}) \cdot \Phi'(u)$. Таким образом,

$$(g_{ij}) = {}^t\Phi'(u)(\tilde{g}_{ij})\Phi'(u).$$

Инвариантность свойств внутренней геометрии поверхности относительно замены параметров

Утверждение

Длины кривых вдоль поверхности, углы между кривыми и объем поверхности инвариантны относительно замены параметров, сохраняющей ориентацию (т.е. диффеоморфизма $\Phi : U \longrightarrow \tilde{U}$ такого, что $\det([d\Phi_u]) > 0$ в любой точке $u \in U$).

$\Downarrow$При замене параметров любая кривая будет перепараметризована, и по лемме сл.7 т.2 ее длина не изменится. Вектор скорости при замене параметра умножается на некоторую скалярную функцию, т.е. остается коллинеарным самому себе. Поэтому углы между кривыми инвариантны при замене параметров. Объем вычисляется с помощью определителя матрицы первой фундаментальной (билинейной) формы, а она у рассматриваемых поверхностей одна и та же, поскольку касательные пространства в каждой точке совпадают и матрицы связаны соотношением из предыдущего слайда.$\Uparrow$

Диффеоморфизм поверхностей

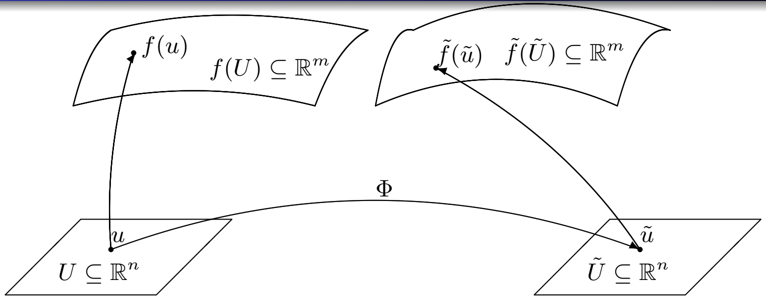

Рис. 2

Определение

Пусть $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ и $\tilde{f} : \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ – две инъективные поверхности. Произвольный диффеоморфизм $\Phi : U \longrightarrow \tilde{U}$ области U на область $\tilde{U}$ называется *диффеоморфизмом поверхности f на поверхность $\tilde{f}$*. В этом случае говорят, что поверхности f и $\tilde{f}$ *связаны диффеоморфизмом Φ* или поверхности f и $\tilde{f}$ *диффеоморфны*.

Поскольку диффеоморфные поверхности f и $\tilde{f}$ предполагаются инъективными (т.е. $f : U \longrightarrow f(U)$ и $\tilde{f} : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{f}(\tilde{U})$ являются биекциями), возникает естественное взаимно-однозначное соотвествие между их образами:

$$\phi = \tilde{f} \circ \Phi \circ f^{-1} : f(U) \longrightarrow \tilde{f}(\tilde{U}).$$

Точке $p \in f(U)$ при этом соответствует точка $q = \tilde{f}(\Phi(f^{-1}(p))) \in \tilde{f}(\tilde{U})$. Точки p и $q = \phi(p)$ называются *соответственными (при диффеоморфизме поверхностей Φ)*. При этом каждой фигуре (множеству точек) из $f(U)$ соответствует некоторая фигура на $\tilde{f}(\tilde{U})$, состоящая из соответствующих точек.

Определение

Пусть $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ и $\tilde{f} : \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ – две инъективные поверхности, связанные диффеоморфизмом $\Phi : U \longrightarrow \tilde{U}$ области U на область $\tilde{U}$. Если матрицы $(g_{ij}(u))$ и $(\tilde{g}_{ij}(\tilde{u}))$ первой фундаментальной формы этих поверхностей во всех соответствующих точках u и $\tilde{u} = \Phi(u)$ связаны соотношением

$$(g_{ij}(u)) = {}^t[d\Phi_u] \cdot (\tilde{g}_{ij}(\tilde{u})) \cdot [d\Phi_u],$$

то поверхности f и $\tilde{f}$ называются *изометричными*. Диффеоморфизм Φ называется *изометрией* поверхностей f и $\tilde{f}$.

Отображение $\phi = \tilde{f} \circ \Phi \circ f^{-1}$, осуществляющее "наложение"образа $f(U)$ на образ $\tilde{f}(\tilde{U})$, также называется *изометрией* поверхностей f и $\tilde{f}$.

Предложение

Внутренние геометрии изометричных поверхностей f и $\tilde{f}$ совпадают.

$\Downarrow$Покажем, что первые фундаментальные формы поверхностей f и $\tilde{f}$ в соответственных точках совпадают. Рассмотрим линейный оператор, который переводит стандартный базис $(f_{u^1}, f_{u^2}, \ldots, f_{u^n})$ касательного пространства $\mathrm{T}_u f$ в систему векторов $(\tilde{f}(\Phi(u))_{u^1}, \tilde{f}(\Phi(u))_{u^2}, \ldots, \tilde{f}(\Phi(u))_{u^n}) = (\tilde{f}_{\tilde{u}^1}, \tilde{f}_{\tilde{u}^2}, \ldots, \tilde{f}_{\tilde{u}^n}) \cdot d\Phi_u$. Так как Φ – диффеоморфизм, матрица $d\Phi_u$ – невырожденная, и последняя система является базисом касательного пространства $\mathrm{T}_{\tilde{u}}\tilde{f}$. Таким образом. получается невырожденный линейный оператор (изоморфизм), матрица которого относительно стандартных базисов касательных пространств $\mathrm{T}_u f$ и $\mathrm{T}_{\tilde{u}}\tilde{f}$ есть $d\Phi_u$. Матрица первой фундаментальной формы в этом базисе получается по правилу ${}^t[d\Phi_u] \cdot (\tilde{g}_{ij}(\tilde{u})) \cdot [d\Phi_u]$ и совпадает с матрицей $(g_{ij}(u))$. Это означает, что в пространствах $\mathrm{T}_u f$ и $\mathrm{T}_{\tilde{u}}\tilde{f}$ определено одно и то же скалярное произведение, т.е. наш изоморфизм является изоморфизмом евклидовых касательных пространств в соответственных точках.

Отсюда следует, что объемы, длины, углы и прочие метрические свойства соответственных фигур на изометричных поверхностях оказываются одинаковыми.$\Uparrow$

В частности, длины любых соответственных линий на изометричных поверхностях совпадают. Оказывается, верно и обратное.

Предложение

Если на диффеоморфных поверхностях длины любых соответственных кривых совпадают. то эти поверхности изометричны.

$\Downarrow$Пусть $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ и $\tilde{f} : \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ – две инъективные поверхности, связанные диффеоморфизмом $\Phi : U \longrightarrow \tilde{U}$ области U на $\tilde{U}$ и пусть $\forall a, b \in \mathbb{R}\ \forall u(t) : [a, b] \longrightarrow U : \ell[f(u(t))]|_a^b = \ell[\tilde{f}(\Phi(u(t)))]|_a^b$.

Положим $\alpha(t) = f(u(t))$ и $\beta(t) = \tilde{f}(\Phi(u(t)))$. Имеем $\ell[\alpha]|_a^b = \displaystyle\int_a^b |\dot{\alpha}(\theta)| d\theta$ и $\ell[\beta]|_a^b = \displaystyle\int_a^b |\dot{\beta}(\theta)| d\theta$. Кроме того, для любого $t \in (a, b]$ справедливо $\displaystyle\int_a^t |\dot{\alpha}(\theta)| d\theta = \int_a^t |\dot{\beta}(\theta)| d\theta$. Из этого следует, что $|\dot{\alpha}(t)| = |\dot{\beta}(t)|$, т.е. $\langle \dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t) \rangle = \langle \dot{\beta}(t), \dot{\beta}(t) \rangle$ для любого $t \in (a, b]$.

Окончание доказательства и утверждение

Положим $\tilde{u}(t) = \Phi(u(t))$. Тогда $\dot{\beta}(t) = \dfrac{d}{dt}\tilde{f}(\Phi(u(t))) = d\tilde{f}_{\tilde{u}(t)} \cdot d\Phi_{u(t)}(\dot{u}(t))$ и $\dot{\alpha}(t) = \dfrac{d}{dt}f(u(t)) = df_{u(t)}(\dot{u}(t))$. В качестве $u(t_0)$ можно взять любую точку $p \in U$, в качестве $\dot{u}(t)$ может быть взят любой вектор $x \in \mathrm{T}_pU$ (если $u(t) = p + tx$ – отрезок прямой). Тогда $\dot{\beta}(t) = d\tilde{f}_{\Phi(p)} \cdot d\Phi_p(x)$ и $\dot{\alpha}(t) = df_p(x)$. Из равенства $\langle\dot{\alpha}(t), \dot{\alpha}(t)\rangle = \langle\dot{\beta}(t), \dot{\beta}(t)\rangle$ для любого t следует ${}^t df_p \cdot df_p = {}^t(d\tilde{f}_{\Phi(p)} \cdot d\Phi_p) \cdot d\tilde{f}_{\Phi(p)} \cdot d\Phi_p = {}^t d\Phi_p \cdot {}^t d\tilde{f}_{\Phi(p)} \cdot d\tilde{f}_{\Phi(p)} \cdot d\Phi_p$, т.е. $(g_{ij}(p)) = {}^t d\Phi_p \cdot (\tilde{g}_{ij}(\Phi(p))) \cdot d\Phi_p$. Изометричность поверхностей доказана.$\Uparrow$

Так как поверхности, изометричные изометричным поверхностям, снова изометричны, справедливо следующее

Утверждение.

Две произвольные инъективные поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ и $\tilde{f} : \tilde{U} \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ изометричны тогда и только тогда, когда когда подходящей заменой параметров на одной из них ($\Psi : U \longrightarrow U_1$ или $\tilde{\Psi} : \tilde{U} \longrightarrow \tilde{U}_1$) матрицы их первой фундаментальной формы ($(g_{ij}(u))$ или $(\tilde{g}_{ij}(\tilde{u}))$) можно сделать одинаковыми с точностью до обозначения переменных (поверхностных координат).

Пример, показывающий различие вида изометричных поверхностей в окружающем пространстве

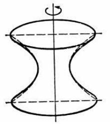

Рис. 3

Изображение взято с сайта https://ru.wikipedia.org/wiki

Катеноид

$f(u,v) = {}^t(a\operatorname{ch}(u/a)\cos v, a\operatorname{ch}(u/a)\sin v, u)$ $(u, v \in \mathbb{R})$

Катеноид – поверхность вращения, профилем которой служит цепная линия $\alpha(u) = {}^t(a\operatorname{ch}(u/a), 0, u)$ в плоскости Oxz. Вращение происходит вокруг оси Oz.

Стандартный базис касательного пространства катеноида:

$f_u = {}^t(\operatorname{sh}(u/a)\cos v, \operatorname{sh}(u/a)\sin v, 1)$,

$f_v = {}^t(-a\operatorname{ch}(u/a)\sin v, a\operatorname{ch}(u/a)\cos v, 0)$.

Матрица первой фундаментальной формы катеноида:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} \operatorname{ch}^2(u/a) & 0 \\ 0 & a^2\operatorname{ch}^2(u/a) \end{pmatrix}.$$

Продолжение примера

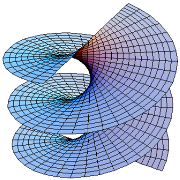

Рис. 4

Изображение взято с сайта https://ru.wikipedia.org/wiki

Прямой геликоид

$$f(u,v) = {}^t(u\cos v, u\sin v, av)\ (u,v\in\mathbb{R})$$

Стандартный базис касательного пространства геликоида:
$f_u = {}^t(\cos v, \sin v, 0),\ f_v = {}^t(-u\sin v, u\cos v, a)$.
Матрица первой фундаментальной формы геликоида:

$$(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & u^2+a^2 \end{pmatrix}.$$

Окончание примера

Определим диффеоморфизм $\Phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, полагая $\Phi(\tilde{u},\tilde{v}) = {}^t(a\,\mathrm{sh}(\tilde{u}/a),\tilde{v})$, т.е. выполним на геликоиде замену параметров $u = a\,\mathrm{sh}(\tilde{u}/a)$, $v = \tilde{v}$. Матрица Якоби отображения Φ:
$[d\Phi_{\tilde{u},\tilde{v}}] = \begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\tilde{u}/a) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Ее определитель положителен, т.е. Φ_p действительно является диффеоморфизмом. Вычислим матрицу первой фундаментальной формы геликоида после такой замены параметров:

$$(\tilde{g}_{ij}) = {}^t[d\Phi]\cdot(g_{ij})\cdot[d\Phi] =$$
$$^t\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\tilde{u}/a) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (a\,\mathrm{sh}(\tilde{u}/a))^2 + a^2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\tilde{u}/a) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$^t\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\tilde{u}/a) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^2\,\mathrm{ch}^2(\tilde{u}/a)) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} \mathrm{ch}(\tilde{u}/a) & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} \mathrm{ch}^2(\tilde{u}/a) & 0 \\ 0 & a^2\,\mathrm{ch}^2(\tilde{u}/a) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, катеноид изометричен геликоиду.

Этот пример показывает, что для описания поверхностей свойств одной внутренней геометрии недостаточно – слишком непохожие поверхности могут иметь одинаковые внутренние свойства.