Глава II. Поверхности
§ 5. Понятие поверхности

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Дифференциальная геометрия и топология
для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
III семестр

Понятие гладкого отображения

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — область, т.е. открытое связное множество, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — отображение. Для $u = (u^1, u^2, \dots, u^n) \in U$ имеем
$f(u) = (f^1(u), f^2(u), \dots, f^m(u)) =$
$= (f^1(u^1, \dots, u^n), f^2(u^1, \dots, u^n), \dots, f^m(u^1, \dots, u^n))$. Здесь $f^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, m$ – *координатные функции*.

Определения и обозначения

Отображение $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, называется *гладким*, если существуют все частные производные координатных функций
$\dfrac{\partial^k f^j}{(\partial u^{i_1})^{k_1} \dots (\partial u^{i_\ell})^{k_\ell}(u_0)}$, $k_1 + \dots + k_\ell = k$, в каждой точке $u_0 \in U$.
Частной производной от f по u^i называется

$$\frac{\partial f}{\partial u^i}(u_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(u_0^1, \dots, u_0^{i-1}, u_0^i + h, u_0^{i+1}, \dots, u_0^n) - f(u_0)}{h},$$

если последний предел существует; заметим, что при этом он является вектором из $\overrightarrow{\mathbb{R}}^m$. Будем использовать также обозначения
$\dfrac{\partial f}{\partial u^i}(u_0) = f_{u^i}(u_0) = f_i(u_0) = \partial_i f(u_0) = f_{u^i}|_{u_0}$.

Касательные векторы к отображению

Рассмотрим кривую $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$, определенную с помощью отображения f следующим образом: $\alpha(t) = f(u_0^1, \ldots, u_0^{i-1}, t, u_0^{i+1}, \ldots, u_0^n)$. Тогда кривая α проходит через точку u_0, ее образ лежит в образе $f(U)$ и очевидно, что $f_{u^i}(u_0) = \dot{\alpha}(u_0^i)$ — вектор касательной.

Определение

Учитывая сказанное выше, векторы частных производных, а также их линейные комбинации, будем называть *касательными векторами к отображению* $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Определение

Множество всех векторов пространства $\overrightarrow{\mathbb{R}}^n$, отложенных от точки $p \in \mathbb{R}^n$ называется *касательным пространством* к $\mathbb{R}^n$ в точке $p \in \mathbb{R}^n$ и обозначается через $\mathrm{T}_p\mathbb{R}^n$.

Очевидно, что $\mathrm{T}_p\mathbb{R}^n$ - центроаффинное пространство, изоморфное $\overrightarrow{\mathbb{R}}^n$.

Факт

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — область (открытое множество), $p \in U$. Касательное пространство $\mathrm{T}_p\mathbb{R}^n$ состоит из всех всех векторов, касательных в точке p к всевозможным кривым $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, проходящим через точку p.

Очевидно, что всякий касательный вектор в точке $p \in \mathbb{R}^n$ к кривой $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$ лежит в $\mathrm{T}_p\mathbb{R}^n$. Обратно, если $\vec{a} \in \mathrm{T}_p\mathbb{R}^n$, то вектор $\vec{a}$ обязательно является касательным вектором к некоторой кривой $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, проходящей через точку $p \in U$ (например, к прямой $\alpha(t) = p + t\vec{a}$).

Определение

Множество всех векторов, касательных в точке p к всевозможным кривым $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^n$, проходящим через точку p и целиком лежащих в области $U \subseteq \mathbb{R}^n$, называется *касательным пространством* к области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ в точке $p \in U$ и обозначается через T_pU.

Дифференцируемое отображение

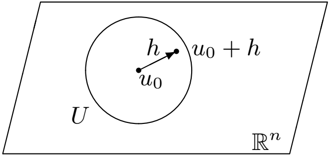

Рис. 1

Определение

Пусть U — произвольное подмножество в $\mathbb{R}^n$. Отображение $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, называется *дифференцируемым в точке* $u_0 \in U$, если u_0 — внутренняя точка множества U (см. рис. 1) и
$f(u_0 + h) - f(u_0) = \mathcal{D}(u_0)(h) + o(u_0, h)$, где $\mathcal{D}(u_0)$ — линейное отображение (из $\mathrm{T}_{u_0}\mathbb{R}^n$ в $\mathrm{T}_{f(u_0)}\mathbb{R}^m$), $o(u_0, h)$ — бесконечно малая более высокого порядка, чем h, т.е. $\lim\limits_{|h|\to 0} \dfrac{|o(u_0, h)|}{|h|} = 0$.

Определение и обозначения

Линейное отображение $\mathcal{D}(u_0)$ применяется к вектору (u_0, h) в точке u_0 и в качестве значения имеет вектор $(f(u_0), \mathcal{D}(u_0)(h))$ в точке $f(u_0)$. Оно называется *дифференциалом* отображения fв точке u_0. Дифференциал является линейным отображением $\mathcal{D}(u_0) : \mathrm{T}_{u_0}\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathrm{T}_{f(u_0)}\mathbb{R}^m$ или $\mathcal{D}(u_0) : \mathrm{T}_{u_0}U \longrightarrow \mathrm{T}_{f(u_0)}\mathbb{R}^m$ Для обозначения дифференциала используются символы $D_{u_0} = Df(u_0) = d_{u_0}f = df_{u_0}$.

Предложение

Пусть отображение $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, где $U \subseteq \mathbb{R}^n$, дифференцируемо в точке $u_0 \in U$. Тогда существуют частные производные f_{u^k} при $k = 1, \ldots, n$ и дифференциал df_{u_0} в стандартных базисах $\mathcal{E}_n$, $\mathcal{E}_m$ имеет матрицу

$$[df_{u_0}] = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f^1}{\partial u^1} & \dfrac{\partial f^1}{\partial u^2} & \ldots & \dfrac{\partial f^1}{\partial u^n} \\ \dfrac{\partial f^2}{\partial u^1} & \dfrac{\partial f^2}{\partial u^2} & \ldots & \dfrac{\partial f^2}{\partial u^n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial f^m}{\partial u^1} & \dfrac{\partial f^m}{\partial u^2} & \ldots & \dfrac{\partial f^m}{\partial u^n} \end{pmatrix},$$ которая называется *матрицей Якоби отображения* f или *производной отображения* f *в точке* u_0.

$\Downarrow$ Напомним, что через $\mathcal{E}_n$ обозначается стандартный базис векторного пространства $\overrightarrow{\mathbb{R}}^n$. Пусть $h \in \mathbb{R}$ и $h_k = he_k$ для $e_k \in \mathcal{E}_n$. Имеем $f(u_0 + h_k) - f(u_0) = df_{u_0}(h_k) + o(u_0, h_k) = df_{u_0}(he_k) + o(u_0, h_k) = hdf_{u_0}(e_k) + o(u_0, h_k)$. Таким образом, $\dfrac{1}{h}(f(u_0 + h_k) - f(u_0)) = df_{u_0}(e_k) + \dfrac{1}{h}o(u_0, h_k)$. Поскольку $df_{u_0}(e_k)$ не зависит от h, и $\frac{1}{h}o(u_0, h_k)$ стремится к $\boldsymbol{o}$ при $h \to 0$, предел $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h}(f(u_0 + h_k) - f(u_0))$ существует и равен $df_{u_0}(e_k)$. Таким образом,

$$df_{u_0}(e_k) = f_{u^k}, \quad k = 1, \dots, n. \tag{1}$$

Учитывая, что $f_{u^k} = {}^t\!\left(\dfrac{\partial f^1}{\partial u^k}, \dfrac{\partial f^2}{\partial u^k}, \dots, \dfrac{\partial f^n}{\partial u^k}\right)$, по определению матрицы линейного отображения получаем требуемое.$\Uparrow$

Мы видим, что $[df_{u_0}] = [f_{u^1}(u_0), f_{u^2}(u_0), \dots, f_{u^n}(u_0)]$.

Обозначения

Будем обозначать матрицу Якоби через $[df_{u_0}] = [D_{u_0}] = f'(u_0)$.

Назначение дифференциала

При рассмотрениях локальных свойств отображения $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$, где $U \subseteq \mathbb{R}^n$, мы будем заменять приращение отображения f в окрестности точки u_0 его дифференциалом df_{u_0}. Вместо отображения f будем изучать более простой объект — линейный оператор df_{u_0}.

Применяя отображение df_p к вектору (p, x) в точке p, где $x = (\xi^1, \dots, \xi^n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi^i e_i$, мы получаем вектор $df_p x = (f(p), y)$ в точке $f(p)$, где $y = [f_{u^1}(p), \dots, f_{u^n}(p)] \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \vdots \\ \xi^n \end{pmatrix} = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi^i f_{u^i}(p)$. Последний вектор представляет собой линейную комбинацию частных производных отображения f, т.е. столбцов его матрицы Якоби, с коэффициентами ξ^i и мы рассматриваем его как элемент касательного пространства $\mathrm{T}_{f(u_0)}\mathbb{R}^m$. В случае, когда не возникает двусмысленности, вектор (p, x) в точке p будем записывать как x.

Определение

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество, I — интервал в $\mathbb{R}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкое отображение, $\alpha(t) : I \longrightarrow U$ — произвольная гладкая кривая. Тогда композиция отображений $\beta = f \circ \alpha$ также является гладкой кривой $\beta(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$, которую будем называть *кривой вдоль отображения f*.

Лемма

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$ — открытое множество, $p \in U$, I — интервал в $\mathbb{R}$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — дифференцируемое отображение, $\alpha : I \longrightarrow U$ — гладкая кривая, причем $p = \alpha(t_0)$ для $t_0 \in I$ и $\dot{\alpha}(t_0) = x$. Если кривая $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ – кривая вдоль отображения f, т.е. $\beta = f \circ \alpha$, то $df_p x = \dot{\beta}(t_0)$.

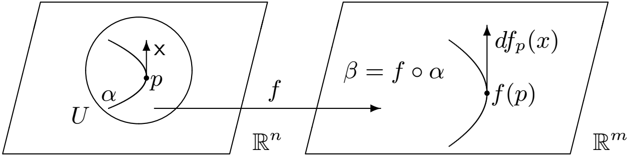

Рис. 2

Доказательство

$\Downarrow$Имеем $\beta(t_0) = f(p)$ (см. рис. 2). Так как кривая α гладкая, $\alpha(t) = \alpha(t_0) + \dot\alpha(t_0)(t - t_0) + o(t - t_0) = p + (t - t_0)x + o(t - t_0)$. Тогда $\beta(t) = f(\alpha(t)) = f(p) + [df_p][(t - t_0)x + o(t - t_0)] + o_1(t - t_0)$. Далее $\dfrac{\beta(t) - \beta(t_0)}{t - t_0} = f'(p)x + \dfrac{1}{t - t_0}[f'(p)o(t - t_0) + o_1(t - t_0)]$. Переходя к пределу при $t \to t_0$, получаем $\dot\beta(t_0) = f'(p)x = df_p x$.$\Uparrow$

Доказана следующая важная формула:

Дифференциал от касательного вектора

$$df_{\alpha(t_0)}(\dot\alpha(t_0)) = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)(t_0). \tag{2}$$

Пусть $p \in \mathbb{R}^n$, $x \in \overrightarrow{\mathbb{R}}^n$. Напомним, что кривая $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$, $\alpha(t) = p + tx$, называется прямой в аффинном пространстве $\mathbb{R}^n$, проходящей через точку p. Ясно, что $\alpha(0) = p$, $\dot{\alpha}(0) = x$.

Определение

Производной отображения f *по направлению вектора* x *в точке* p называется $\lim\limits_{t\to 0} \dfrac{f(p+tx) - f(p)}{t}$.

В силу леммы сл.9 для гладкого отображения производная по любому направлению существует в каждой точке области определения и по формуле (2) равна $\dfrac{d}{dt}(f \circ \alpha) = df_p(x)$.

1. Пусть $\mathcal{A} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — аффинное преобразование, $\mathcal{A}(q_0 + x) = \mathcal{A}q_0 + \vec{\mathcal{A}}x$, где $\vec{\mathcal{A}}$ — линейный оператор векторного пространства $\overrightarrow{\mathbb{R}}^m$. Тогда

$$d\mathcal{A}_p(v) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}(\mathcal{A}(p+tv) - \mathcal{A}(p)) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\vec{\mathcal{A}}(p+tv-p) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\vec{\mathcal{A}}(tv) = \vec{\mathcal{A}}(v).$$

Мы видим, что $d\mathcal{A}_p = \vec{\mathcal{A}}$. Отображение действует из $\mathrm{T}_p\mathbb{R}^m$ в $\mathrm{T}_{\mathcal{A}p}\mathbb{R}^m$, $(p, x) \mapsto (\mathcal{A}p, \vec{\mathcal{A}}x)$.

2. Пусть U — открытое подмножество в $\mathbb{R}^m$, $\mathrm{Id}_U : U \longrightarrow U$ — тождественное отображение, $\overrightarrow{\mathrm{Id}}_U$ — единичный оператор в $\overrightarrow{\mathbb{R}}^m$. Для любой точки $p \in U$ имеем $d(\mathrm{Id}_U)_p = \overrightarrow{\mathrm{Id}}_{\mathrm{T}_pU} = \overrightarrow{\mathrm{Id}}_{\mathrm{T}_p\mathbb{R}^m}$.

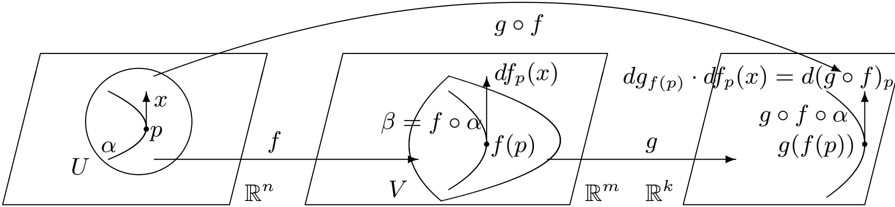

Рис. 3

Лемма

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $V \subseteq \mathbb{R}^m$ — открытые подмножества, $f : U \longrightarrow V$, $g : V \longrightarrow \mathbb{R}^k$ — гладкие отображения, $p \in U$. Тогда справедливо *цепное правило*

$$d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} \circ df_p \text{ или } (g \circ f)'(p) = g'(f(p)) \cdot f'(p).$$

Если f — обратимое отображение, причем $f^{-1} : V \longrightarrow U$ — гладкое отображение, то $m = n$ и $d(f^{-1})_{f(p)} = (df_p)^{-1}$.

⇓Легко понять, что для любой точки $p \in U$ и любого вектора $x \in \overrightarrow{\mathbb{R}}^n$ найдется гладкая кривая $\alpha : I \longrightarrow U$ такая что $\alpha(t_0) = p$ и $\dot\alpha(t_0) = x$ для некоторого $t_0 \in I$ (см. рис. 3). Применяя лемму сл.9 и равенство (2), получаем $d(g \circ f)_p(x) = d(g \circ f)_{\alpha(t_0)}(\dot\alpha(t_0)) = \frac{d}{dt}((g \circ f) \circ \alpha)(t_0) = \frac{d}{dt}(g \circ (f \circ \alpha))(t_0) = dg_{f(\alpha(t_0))}\frac{d}{dt}(f \circ \alpha) = dg_{f(\alpha(t_0))} df_{\alpha(t_0)}(\dot\alpha(t_0)) = (dg_{f(\alpha(t_0))} \cdot df_{\alpha(t_0)})x = (dg_{f(p)} df_p)x$, откуда $d(g \circ f)_p = dg_{f(p)} df_p$.
Для доказательства второго утверждения леммы запишем $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_U$ и применим первое утверждение доказываемой леммы:
$d(f^{-1})_{f(p)} \circ df_p = \overrightarrow{\mathrm{Id}}_{\mathrm{T}_p U}$. Следовательно, df_p есть гомоморфизм $\mathrm{T}_p U$ на $\mathrm{T}_{f(p)} V$, обладающий обратным отображением, т.е. df_p — изоморфизм векторных пространств, одно из которых изоморфно $\overrightarrow{\mathbb{R}}^m$, а другое — $\overrightarrow{\mathbb{R}}^n$. Таким образом, $m = n$ и $d(f^{-1})_{f(p)} = (df_p)^{-1}$.⇑

Определение и следствие

Гладкое отображение $f : U \longrightarrow V$ называется *диффеоморфизмом*, если существует отображение f^{-1}, являющееся гладким.
Если $f : U \longrightarrow V$ — диффеоморфизм, то df_p в любой точке $p \in U$ есть изоморфизм векторных пространств $\mathrm{T}_p U$ и $\mathrm{T}_{f(p)} V$, матрица Якоби является квадратной и невырожденной в каждой точке.

Из курса математического анализа известно утверждение, которое может быть сформулировано следующим образом.

Теорема

Пусть U — открытое подмножество в $\mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое отображение, $p \in U$. Если df_p — изоморфизм, т.е. $\mathrm{r}(f'(p)) = n$ или $\det(f'(p)) \neq 0$, то в U существует такая окрестность U_0 точки p, что сужение $f\,|_{U_0}$ является диффеоморфизмом. В таком случае говорят, что f является *локальным диффеоморфизмом в точке* $p \in U$.

Матрица дифференциала

Отображение $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ имеет параметризацию

$$f(u,v,w) = {}^t(u^2+v^2, u^2-v^2, 2v+w^2, uvw).$$

Найти: 1) матрицу дифференциала $[df]_p$ в произвольной точке $p \in \mathbb{R}^3$;
2) образ кривой $\alpha(t) = {}^t(a\cos t, a\sin t, bt)$ при отображении f;
3) результат действия дифференциала df_p на вектор скорости этой кривой в произвольной точке.

Возьмем точку $p = {}^t(u,v,w)$ и запишем матрицу дифференциала отображения $[df]_p = \begin{pmatrix} 2u & 2v & 0 \\ 2u & -2v & 0 \\ 0 & 2 & 2w \\ vw & uw & uv \end{pmatrix}$. Запишем образ кривой $\alpha(t)$ при отображении f: $\beta(t) = (f \circ \alpha)(t) =$
$= {}^t(a^2, a^2\cos 2t, 2a\sin t + b^2t^2, a^2bt\cos t\sin t)$.
Проверим, что $\dot\beta(t) = [df]_{\alpha(t)} \cdot \dot\alpha(t)$.

Имеем $\dot\beta(t) = {}^t(0, -2a^2\sin 2t, 2a\cos t + 2b^2 t, a^2 b(\cos t\sin t + t\cos 2t))$,

$$\dot\alpha = {}^t(-a\sin t, a\cos t, b) \text{ и } [df]_{\alpha(t)} = \begin{pmatrix} 2a\cos t & 2a\sin t & 0 \\ 2a\cos t & -2a\sin t & 0 \\ 0 & 2 & 2bt \\ abt\sin t & abt\cos t & a^2\cos t\sin t \end{pmatrix}.$$

Вычисляем

$$[df]_{\alpha(t)}\cdot\dot\alpha(t) = \begin{pmatrix} 2a\cos t & 2a\sin t & 0 \\ 2a\cos t & -2a\sin t & 0 \\ 0 & 2 & 2bt \\ abt\sin t & abt\cos t & a^2\cos t\sin t \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -a\sin t \\ a\cos t \\ b \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -2a^2\cos t\sin t + 2a^2\sin t\cos t \\ -2a^2\cos t\sin t - 2a^2\sin t\cos t \\ 2a\cos t + 2b^2 t \\ -a^2bt\sin^2 t + a^2bt\cos^2 t + a^2b\cos t\sin t \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2a^2\sin 2t \\ 2a\cos t + 2b^2 t \\ a^2 b(\cos t\sin t + t\cos 2t) \end{pmatrix}.$$

Таким образом, равенство $\dot\beta(t) = [df]_{\alpha(t)}\cdot\dot\alpha(t)$ проверено.

Определение

Пусть U — открытая связная область в $\mathbb{R}^n$. Гладкое отображение $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ называется *n-мерной (элементарной) поверхностью, вложенной в* $\mathbb{R}^m$, если в каждой точке $p \in U$ ранг матрицы Якоби $f'(p)$ равен n:

$$\mathrm{r}(f'(p)) = \mathrm{r}([df_p]) = n.$$

Поверхность (как и кривая) — *отображение*. Образ этого отображения (множество точек $f(U)$ называется *образом поверхности*. Это геометрический объект.

В том случае, когда все координатные функции $f^i : U \longrightarrow \mathbb{R}$ поверхности $(f^1(u), f^2(u), \ldots, f^m(u)) =$
$(f^1(u^1, \ldots, u^n), f^2(u^1, \ldots, u^n), \ldots, f^m(u^1, \ldots, u^n))$ указаны в явном виде, будем говорить, что имеется *параметрическое задание* или *параметризация* поверхности $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

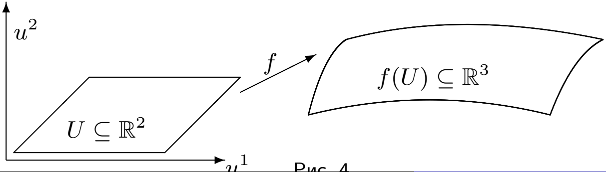

Рис. 4

Наблюдение 1

Поскольку матрица Якоби имеет размеры $m \times n$, условие $\mathrm{r}([df_p]) = n$ означает, что ранг матрицы Якоби максимально возможный. Это условие называется *условием максимальности ранга*.

Наблюдение 2

Дифференциал $[df_p]$ поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ является изоморфизмом в каждой точке $p \in U$.

Наблюдение 3

Поскольку $[df_p] = [f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}]$ и $\mathrm{r}([df_p]) = n$, по определению поверхности в каждой точке $p \in U$ частные производные отображения f линейно независимы.

Важные наблюдения 4-5

Наблюдение 4

При $n = m$ отображение $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$, удовлетворяющее условию максимальности ранга, является локальным диффеоморфизмом области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ на некоторую область в пространстве $\mathbb{R}^n$. Такое отображение называется *заменой координат* или *заменой параметров*.

Наблюдение 5

Условие максимальности ранга является неотъемлемой и существенной частью определения поверхности. Пример:
$f(u^1, u^2) = {}^t(u^1 + u^2, u^1 + u^2, u^1 + u^2)$.

Его матрица Якоби: $[df_p] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Образ этого отображения — прямая.

Касательное пространство

Пусть $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — поверхность.

Определение

Касательным пространством поверхности f в точке $p \in U$ называется $\mathrm{Im}(df_p)$ — образ дифференциала f в точке p. Обозначение: $\mathrm{T}_p f$. Векторы из касательного пространства $\mathrm{T}_p f$ называются *касательными векторами поверхности f в точке $p \in U$*.

Итак, $\mathrm{T}_p f = \mathrm{Im}(df_p) = df_p(\mathrm{T}_p U)$ — образ линейного пространства $\mathrm{T}_p U$ при линейном отображении df_p, т.е. $\mathrm{T}_p U$ — подпространство в $\mathrm{T}_{f(p)}\mathbb{R}^m$. Так как дифференциал по определению поверхности – изоморфизм, $\dim \mathrm{T}_p f = n$. Это число называется *размерностью* поверхности.

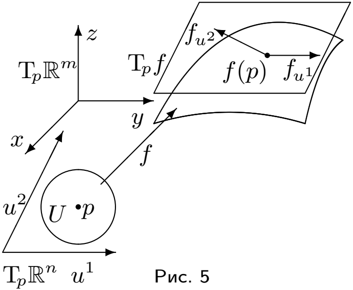

Рис. 5

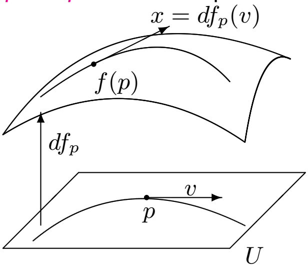

Рис. 6

Стандартный базис касательного пространства

Определение

Линейно независимые векторы частных производных (столбцы матрицы Якоби) $f_{u^i}(p) = df_p(e_i)$, $i = 1, \dots, n$ называются *стандартным базисом* касательного пространства $\mathrm{T}_p f$ (см. рис. 5).

Теорема об устройстве касательного пространства

1) Пусть U — область в $\mathbb{R}^n$, $p \in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — поверхность, $M = f(U)$ — ее образ. Тогда для любого вектора $(f(p), x) \in \mathrm{T}_p f$ существует кривая $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ такая что $\alpha(I) \subseteq M$, $\alpha(t_0) = f(p)$, $\dot\alpha(t_0) = x$.
2) Обратно, если f — инъекция, то $\dot\alpha(t_0) \in \mathrm{T}_p f$ для любой кривой $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ такой что $\alpha(I) \subseteq M$ и $\alpha(t_0) = f(p)$.

$\Downarrow$Пусть $(f(p), x)$ — произвольный вектор в точке $f(p)$ (см. рис. 6). Так как df_p — изоморфизм $\mathrm{T}_p U$ на $\mathrm{T}_p f$, для некоторого $(p, v) \in \mathrm{T}_p U$ имеем $df_p(v) = x$. Возьмем часть прямой $u(t) = p + (t - t_0)v$, где $t \in I$, $u(I) \subseteq U$. Пусть $\alpha = f \circ u$. В силу (2) имеем $\dot\alpha(t_0) = df_p(\dot u(t_0)) = df_p(v) = x$.
Докажем утверждение 2). Пусть f — инъекция, $\alpha : I \longrightarrow M$ — кривая, $\alpha(t_0) = f(p)$. Так как f есть биекция на свой образ, $\alpha(t)$ имеет прообраз $u(t) : I \longrightarrow U$ — кривую, такую что $f(u(t)) = \alpha(t)$. Отсюда согласно (2) имеем $\dot\alpha(t_0) = \dfrac{d}{dt}(f \circ u)(t_0) = df_{u(t_0)}(\dot u(t_0)) \in \mathrm{T}_p f$.$\Uparrow$

Определение

Пусть U — область в $\mathbb{R}^n$, $p \in U$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — поверхность. Рассмотрим в области $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *координатную сеть* — семейство прямых $u_i(t) = p + te_i$ $(t \in \mathbb{R})$, параллельных координатным осям, при всевозможных $p \in U$ (см. рис. 7). Образы при отображении $f : U \longrightarrow f(U)$ этих прямых называются *координатной сетью поверхности* f или *поверхностной системой координат*.

Это n семейств кривых на поверхности, где кривые i-го семейства представляют собой $f(u_i(t))$.Если $p = (u_0^1, \dots, u_0^n)$, то i-я координатная линия, проходящая через точку $f(p)$, есть $\alpha(t) = f(u_0^1, \dots, u_0^{i-1}, u_0^i + t, u_0^{i+1}, \dots, u_0^n)$. Имеем $\alpha(0) = f(p) = f(u_i(0))$, $\dot{u}_i(0) = e_i$, откуда в силу (2) выводим $\dot{\alpha}(0) = df_p(\dot{u}_i(0)) = df_p(e_i) = f_{u^i}(p)$. Итак, касательные к координатным линиям на поверхности есть векторы $f_{u^1}, f_{u^2}, \dots, f_{u^n}$ стандартного базиса в касательном пространстве $\mathrm{T}_p f$.

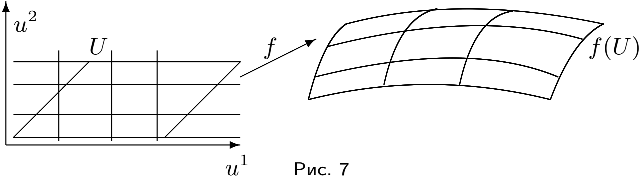

Рис. 7

Пример

Пусть U — область в $\mathbb{R}^2$, $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$ — поверхность. Выведем уравнение касательной плоскости к $f(u,v)$ в точке p. Точка $q(x,y,z)$ лежит в касательной плоскости тогда и только тогда, когда $\det([q-p, f_u, f_v]) = 0$. Пусть $f(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$, тогда в точке $p = (u_0, v_0)$ уравнение касательной плоскости имеет вид:

Уравнение касательной плоскости

$$\begin{vmatrix} x - x(u_0,v_0) & x_u(u_0,v_0) & x_v(u_0,v_0) \\ y - y(u_0,v_0) & y_u(u_0,v_0) & y_v(u_0,v_0) \\ z - z(u_0,v_0) & z_u(u_0,v_0) & z_v(u_0,v_0) \end{vmatrix} = 0.$$

Стандартный базис касательного пространства, параметризация координатных линий

Найти стандартный базис касательного пространства $\mathrm{T}_p f$ к поверхности $f(u,v,w) = {}^t(u+v, u-v, uv, u+w, uvw)$ в точке $p(1,2,3)$.
Найти параметризации координатных линий этой поверхности, проходящих через точку $f(p)$.
Составить уравнения аффинной касательной плоскости к этой поверхности в точке $f(p)$.

Вычислим частные производные от f и их значения в точке p:
$f_u = {}^t(1,1,v,1,vw)$; $f_u(p) = {}^t(1,1,2,1,6)$;
$f_v = {}^t(1,-1,u,0,uw)$; $f_v(p) = {}^t(1,-1,1,0,3)$;
$f_w = {}^t(0,0,0,1,uv)$; $f_w(p) = {}^t(0,0,0,1,2)$.
Стандартный базис касательного пространства $\mathrm{T}_p f$: $(f_u(p), f_v(p), f_w(p))$.
Параметризации координатных линий вдоль поверхности f в точке p:
$f(u(t)) = f(t+1,2,3) = {}^t(t+3, t-1, 2t+2, t+4, 6t+6)$;
$f(v(t)) = f(1,t+2,3) = {}^t(t+3, -t-1, t+2, 4, 3t+6)$;
$f(w(t)) = f(1,2,t+3) = {}^t(3, -1, 2, t+4, 2t+6)$.

Продолжение примера

Аффинная касательная плоскость проходит через точку $f(p)$ и имеет направляющее подпространство $\mathcal{L}(f_u(p), f_v(p), f_w(p))$. Найдем однородную систему линейных уравнений, задающую $\mathcal{L}(f_u(p), f_v(p), f_w(p))$. Произвольное уравнение такой системы имеет вид $\sum_{i=1}^{5} a^i x_i = 0$. Его частные решения – $f_u(p), f_v(p), f_w(p)$. Подставляя, получаем систему уравнений относительно a^i:

$$\begin{cases} a^1 + a^2 + 2a^3 + a^4 + 6a^5 = 0, \\ a^1 - a^2 + a^3 + 3a^5 = 0, \\ a^4 + 2a^5 = 0. \end{cases}$$

Ищем ее общее решение:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 6 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & -2 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^1 - 3a^2 + 2a^5 = 0, \\ 2a^2 + a^3 + a^5 = 0, \\ a^4 + 2a^5 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a^1 = 3a^2 - 2a^5 \\ a^3 = -2a^2 - a^5 \\ a^4 = -2a^5 \end{cases}.$$

Записываем фундаментальную систему решений:

$$\begin{pmatrix} a^1 & \dot{a}^2 & a^3 & a^4 & \dot{a}^5 \\ 3 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Окончание примера

Искомая о.л.с.у., задающая $\mathcal{L}$: $\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$

Точка $f(p) = {}^t(3, -1, 2, 4, 6)$. Подставляем ее координаты в левые части уравнений этой о.л.с.у., получаем с.л.у.

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 10, \end{cases}$$

задающую искомую аффинную касательную плоскость.

Пример [1], стр.209, задача 4

Касательная плоскость к поверхности, заданной координатным уравнением

Написать уравнение касательной плоскости к поверхности $x^2 - 2y^2 - 3z^2 - 4 = 0$ в точке $A(3, 1, -1)$.

Точка A лежит на части поверхности, определяемой уравнением $x = \sqrt{2y^2 + 3z^2 + 4}$. Параметризуем эту поверхность: $f(y, z) = {}^t(\sqrt{2y^2 + 3z^2 + 4}, y, z)$. Тогда $A = f(1, -1)$. Вычисляем частные производные и их значения в точке $p(1, -1)$:

$$f_y = {}^t\!\left(\frac{2y}{\sqrt{2y^2 + 3z^2 + 4}}, 1, 0\right),\ f_y(1, -1) = {}^t(2/3, 1, 0);$$

$$f_z = {}^t\!\left(\frac{3z}{\sqrt{2y^2 + 3z^2 + 4}}, 0, 1\right),\ f_z(1, -1) = {}^t(-1, 0, 1).$$

Записываем уравнение касательной плоскости: $\begin{vmatrix} x-3 & 2/3 & -1 \\ y-1 & 1 & 0 \\ z+1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0;$

$$(x-3) - \frac{2}{3}(y-1) + (z+1) = 0;\ x - \frac{2}{3}y + z - \frac{4}{3} = 0;\ 3x - 2y + 3z - 4 = 0.$$

Идея линеаризации

Мы хотим обоснованно заменить, хотя бы локально, изучение сложных и непонятных изогнутых поверхностей на изучение более простых объектов – аффинных пространств. Мы не понимаем, как проводить криволинейные "геодезические"измерения на искривленном рельефе поверхности, поэтому мы хотим заменить их легко осуществимыми измерениями в арифметическом евклидовом пространстве. Там, где есть скалярное произведение, можно легко вычислить все метрические и геометрические величины.

Основная идея

Давайте заменять поверхность в окрестности некоторой ее точки на касательное пространство в этой точке и все нужные измерения производить в удобном и понятном линейном евклидовом касательном пространстве.

Поверхность в разных местах может быть устроена (например, изогнута) по разному. Поэтому мы построим в каждой точке поверхности свое касательное пространство и будем изучать всю совокупность касательных пространств к поверхности.

Рассмотрим совокупность всевозможных касательных пространств $\mathrm{T}_p f$ поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, отложенных от всевозможных точек $f(p)$ образа поверхности $f(U)$. Чтобы различать касательные векторы из разных касательных пространств, удобно рассматривать всевозможные пары вида $(f(p), h)$, где $p \in U$, а $h \in \mathrm{T}_p f$ – соответствующий этой точке касательный вектор. Таким образом, естественно возникает множество пар

$$\mathrm{T}_U f = \{(f(p), h) | p \in U, h \in \mathrm{T}_p f\},$$

понимаемое как множество всевозможных касательных векторов к поверхности f, для каждого из которых указано, от какой точки он отложен.

Все касательные пространства $\mathrm{T}_p f$ при разных $p \in U$ изоморфны как линейные пространства одному и тому же векторному пространству $\overrightarrow{\mathbb{R}}^n$. Поэтому формально множество $\mathrm{T}_U f$ является декартовым произведением

$$\mathrm{T}_U f = f(U) \times \overrightarrow{\mathbb{R}}^n.$$

Можно считать, что каждая пара $(f(p), h) \in \mathrm{T}_U f$ формально задается столбцом чисел

$$^t(p^1, p^2, \ldots, p^n, h^1, h^2, \ldots, h^n),$$

где $p^1, p^2, \ldots, p^n$ – координаты точки $p \in U$, а $h^1, h^2, \ldots, h^n$ – координаты касательного вектора $h \in \mathrm{T}_p f$ в стандартном базисе касательного пространства $\mathrm{T}_p f$.

Указанные $2n$ чисел называются *координатами пары* $(f(p), h) \in \mathrm{T}_U f$.

Отображение $\pi : f(U) \times \overrightarrow{\mathbb{R}}^n \longrightarrow f(U)$, действующее по правилу $\pi(f(p), h) = f(p)$ – проекция пары на первую компоненту. Оно ставит в соответствие паре $(f(p), h)$ точку на поверхности, от которой отложен вектор h. Для точки $f(p)$ на образе поверхности $f(U)$ имеем $\pi^{-1}(f(p)) = \mathrm{T}_p f$, поскольку центроаффинное пространство $\mathrm{T}_p f$ приклеено к точке $f(p)$. Будем называть этот прообраз, т.е. линейное касательное пространство $\mathrm{T}_p f$, *слоем над точкой $f(p)$*.

"Определение"

Четверка $(\mathrm{T}_U f, f(U), \overrightarrow{\mathbb{R}}^n, \pi)$ называется *касательным расслоением поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$*, при этом
множество $\mathrm{T}_U f$ называется *пространством расслоения*,
множество $f(U)$ называется *базой расслоения*,
пространство $\overrightarrow{\mathbb{R}}^n \cong \mathrm{T}_p f$ называется *типовым слоем расслоения*,
отображение $\pi : \mathrm{T}_U f \longrightarrow f(U)$, действующее по правилу $\pi(f(p), h) = f(p)$, называется *проекцией* или *расслаивающим отображением*.

Можно представлять себе касательное расслоение как совокупность всех касательных пространств к поверхности, индексированных точками поверхности.

Понятие касательного расслоения дает разумное объяснение тому факту, что что разные касательные пространства $\mathrm{T}_p f$ и $\mathrm{T}_q f$ (при $p \neq q$) не пересекаются. Элементами касательного расслоения являются столбцы вида ${}^t(p^1, p^2, \ldots, p^n, h^1, h^2, \ldots, h^n)$. Разные касательные пространства не могут иметь одинаковых элементов, так как столбцы ${}^t(p^1, p^2, \ldots, p^n, h^1, h^2, \ldots, h^n)$ и ${}^t(q^1, q^2, \ldots, q^n, h^1, h^2, \ldots, h^n)$ различаются хотя бы на первых n позициях.

Примеры поверхностей: регулярная кривая, плоскость

Пример 1

Гладкая регулярная кривая $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$.

Ее матрица Якоби состоит из одного столбца и ранг этой матрицы равен 1, так как $\dot{\alpha}(t) \neq 0$. Ее касательное пространство $\mathrm{T}_p f$ (изоморфное $\overrightarrow{\mathbb{R}}^1$) есть множество всех векторов вдоль прямой — касательной в точке $\alpha(p)$.

Пример 2

Плоскость $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^m$ с параметризацией $f(u, v) = q_0 + ua + vb$, где $q_0 \in \mathbb{R}^m$, $a \in \overrightarrow{\mathbb{R}}^m$ и $b \in \overrightarrow{\mathbb{R}}^m$ — линейно независимые направляющие векторы.

Имеем $f_u = a$, $f_v = b$, откуда $r[f_u, f_v] = 2$. Таким образом, плоскость является поверхностью, и ее касательное пространство в каждой точке есть $\mathrm{T}_p f = \mathcal{L}(a, b) \cong \overrightarrow{\mathbb{R}}^2$.

Пример 3

Сфера радиуса R. Пусть $f : U \longrightarrow \mathbb{R}^3$,
$f(u,v) = {}^t(R\cos u\cos v, R\cos u\sin v, R\sin u)$, где u — широта, v — долгота (см. рис. 8, географические координаты точки).

Чтобы отображение f было инъективным, область U ограничивают величиной периода тригонометрических функций: $-\frac{\pi}{2} < u < \frac{\pi}{2}$, $-\pi < v < \pi$. Координатная сеть на сфере — образы прямых $u = \mathrm{const}$ (параллели) и $v = \mathrm{const}$(меридианы). Имеем
$f_u = R^t(-\sin u\cos v, -\sin u\sin v, \cos u)$ и
$f_v = R^t(-\cos u\sin v, \cos u\cos v, 0)$. Очевидно, что $\langle f_u, f_v\rangle = 0$ в каждой точке из U. Таким образом, выполняется условие максимальности ранга.

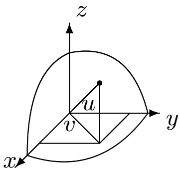

Рис. 8

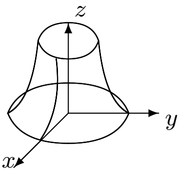

Рис. 9

Определение

Координатная сеть на поверхности $f : U \subseteq \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ называется *ортогональной*, если для любой точки $p \in U$ все координатные линии, проходящие через точку $f(p)$, попарно ортогональны.

Пусть в плоскости xOz задана кривая $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(u) = {}^t(x(u), 0, z(u))$ — *профиль поверхности вращения* (см. рис. 9). Будем вращать график $\alpha(u)$ вокруг Oz. Матрица такого поворота на угол v имеет вид $A_v = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Имеем $f(u,v) = A_v\alpha(u)$; $f(u,v) = {}^t(x(u)\cos v, x(u)\sin v, z(u))$ — параметризация поверхности вращения. Область U — открытый прямоугольник $I \times (-\pi, \pi)$. Проверим, что f — действительно поверхность. Вычисляем $f_u = {}^t(\dot{x}\cos v, \dot{x}\sin v, \dot{z})$, $f_v = {}^t(-x\sin v, x\cos v, 0)$; отсюда $f_u \times f_v = {}^t(-x\dot{z}\cos v, -x\dot{z}\sin v, x\dot{x})$ и $|f_u \times f_v|^2 = x^2(\dot{z}^2 + \dot{x}^2) = x^2|\dot{\alpha}|^2$. Таким образом, f регулярна, если кривая α регулярна и не пересекает ось Oz. Координатную сеть образуют профили ($v = \mathrm{const}$) и окружности ($u = \mathrm{const}$). Заметим, что $\langle f_u, f_v \rangle = 0$, т.е. координатная сеть у поверхности вращения ортогональна.

Определение

Геометрический образ уравнения $y^2 = x^2 z$ в прямоугольной декартовой системе координат называется зонтиком Уитни.

Исследуем поверхность методом сечений (см. рис. 10). При $z = a > 0$ получается пара пересекающихся прямых $y = \pm\sqrt{a}x$. При $z = 0$ получаем $y = 0$, в сечении — ось Ox. При $z = -a < 0$ имеем $y^2 + ax^2 = 0$, $a > 0$, откуда $x = 0$, $y = 0$. Получается точка $(0, 0 - a)$. Таким образом, получается ось Oz — "ручка"зонтика. Без "ручки"поверхность имеет параметризацию $f(u, v) = {}^t(u, uv, v^2)$, $(u, v) \neq 0$. Вычисляем $f_u = {}^t(1, v, 0)$, $f_v = {}^t(0, u, 2v)$; $f_u \times f_v = {}^t(2v^2, -2v, u)$, $|f_u \times f_v|^2 = 4v^4 + 4v^2 + u^2$. Поверхность везде регулярна, кроме начала координат. Она имеет самопересечение и не инъективна на области $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0, 0)\}$. Например, $f(0, 1) = f(0, -1)$.

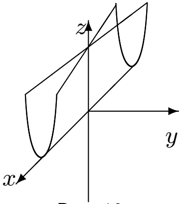

Рис. 10

Определение

В дифференциальной геометрии *тором* называется декартово произведение двух сфер произвольных размерностей.

Простейший пример тора — декартово произведение двух одномерных окружностей $S_a^1 \times S_b^1$, вложенных в $\mathbb{R}^2$ радиусов $a > 0$ и $b > 0$ соответственно. Других ограничений на радиусы не налагается.
Параметризация этого тора получается из параметризаций сфер-окружностей $S_a^1 : \alpha(u) = {}^t(a\cos u, a\sin u)$ и $S_b^1 : \beta(v) = {}^t(b\cos v, b\sin v)$: $f(u,v) = {}^t(a\cos u, a\sin u, b\cos v, b\sin v)$, где $(u,v) \in U = (-\pi,\pi) \times (-\pi,\pi)$, т.е. область U — открытый квадрат. Таким образом, тор расположен в пространстве $\mathbb{R}^4$ и в пространстве меньшей размерности находиться не может.
Частные производные $f_u = {}^t(-a\sin u, a\cos u, 0, 0)$ и $f_v = {}^t(0, 0, -b\sin v, b\cos v)$ в любой точке $(u,v) \in U$ отличны от нулевого вектора и ортогональны, так как $\langle f_u, f_v\rangle = 0$. Поэтому в каждой точке области U для f выполняется условие максимальности ранга и тор является двумерной поверхностью, вложенной в четырехмерное пространство.

Тор-"бублик"

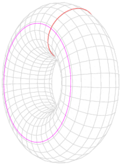

Рис.8

Изображение взято с сайта https://ru.wikipedia.org/wiki

Определение

Поверхность вращения в трехмерном пространстве, полученная вращением окружности S_b^1 так, что ее центр движется по окружности S_a^1 $(a > b)$ и плоскость окружности S_b^1 всегда перпендикулярна окружности S_a^1, называется также *тор-бублик*.

Окружность S_b^1 в плоскости Oxz имеет параметризацию $\alpha(u) = {}^t(a + b\cos u, 0, b\sin u)$ — это профиль поверхности вращения. Тогда параметризация тора-бублика:
$f(u, v) = {}^t((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u)$. Параметры (u, v) — углы соответствующих поворотов — называются *тороидальными координатами* точки $f(u, v)$.

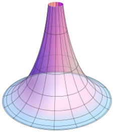
Рис. 9

Изображение взято с сайта https://ru.wikipedia.org/wiki

[1], стр.224, задача 2

Найти параметризацию поверхности, полученной вращением трактрисы $\alpha(t) = a^t(\cos t + \ln \operatorname{tg} t/2, \sin t)$ вокруг ее асимптоты.

При такой параметризации асимптотой трактрисы является ось Ox. Перепараметризуем трактрису так, чтобы она располагалась в плоскости Oxz и ось Oz была ее асимптотой: $\beta(u) = a^t(\sin u, 0, \ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u)$, $0 < u < \pi/2$. Вспомним матрицу оператора поворота на угол v относительно оси Oz: $A_v = \begin{pmatrix} \cos v & -\sin v & 0 \\ \sin v & \cos v & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Получаем параметризацию псевдосферы:
$f(u, v) = A_v \cdot \beta(u) = a^t(\sin u \cos v, \sin u \sin v, \ln \operatorname{tg}(u/2) + \cos u)$,
$0 < u < \pi/2$, $0 < v < 2\pi$.

[1], стр.224, задача 3

Прямая, лежащая на оси Ox, начинает равномерно вращаться вокруг оси Oz, оставаясь при вращении перпендикулярной к Oz и одновременно движется поступательно вдоль оси Oz. Найти параметризацию поверхности, заметаемой этой прямой (прямой геликоид).
Найти базис касательного пространства и нормальный вектор к прямому геликоиду в произвольной точке.
Найти параметризации координатных линий прямого геликоида.

Пусть b – скорость поступательного движения прямой вдоль оси Oz, ω – угловая скорость вращения этой прямой вокруг оси Oz, u – расстояние от точки M на поверхности до оси Oz, через v – угол поворота прямой относительно начального положения.

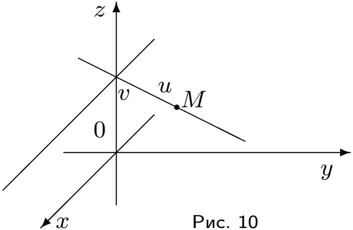

Рис. 10

Окончание примера

Тогда $v = \omega t$, $z_M = bt$. Положим $a = \frac{b}{\omega}$. Тогда $z_M = av$, $x_M = u\cos v$, $y_M = u \sin v$ и $f(u,v) = {}^t(u\cos v, u\sin v, av)$ – параметризация прямого геликоида.

Вычисляем частные производные: $f_u = {}^t(\cos v, \sin v, 0)$, $f_v = {}^t(-u\sin v, u\cos v, a)$. Это базис касательного пространства $\mathrm{T}_p f$ в точке $p(u,v)$.

Нормальный вектор

$$\vec{n} = f_u \times f_v = \begin{vmatrix} \cos v & -u\sin v & e_1 \\ \sin v & u\cos v & e_2 \\ 0 & a & e_3 \end{vmatrix} = {}^t(a\sin v, -a\cos v, u).$$

Координатные линии: $u = u_0$, $\beta(v) = {}^t(u_0\cos v, u_0\sin v, av)$ – винтовая линия. $v = v_0$, $\alpha(u) = {}^t(u\cos v_0, u\sin v_0, av_0)$ – прямая, параллельная плоскости Oxy.

Прямой геликоид

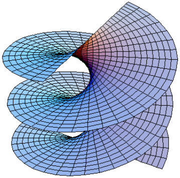

Рис. 11

Изображение взято с сайта https://ru.wikipedia.org/wiki

Цилиндр в 4-мерном пространстве

Найти параметризацию цилиндра $S_a^2 \times \mathbb{R}$, расположенного в пространстве $\mathbb{R}^4$, где S_a^2 – двумерная сфера радиуса a, расположенная в пространстве $\mathbb{R}^3$. Найти базис касательного пространства и нормальный вектор в произвольной точке этого цилиндра.

Запишем параметризацию S_a^2: $h(u,v) = {}^t(a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u)$ и параметризацию $\mathbb{R}$: $\alpha(w) = w$. Тогда параметризация цилиндра $S_a^2 \times \mathbb{R}$ имеет вид: $f(u,v,w) = {}^t(a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, a\sin u, w)$, где $-\pi/2 < u < \pi/2$, $0 < v < 2\pi$, $w \in \mathbb{R}$.
Возьмем произвольную точку $p(u,v,w)$. Базис касательного пространства $\mathrm{T}_p f$: (f_u, f_v, f_w). Вычисляем $f_u = {}^t(-a\sin u\cos v, -a\sin u\sin v, a\cos u, 0)$; $f_v = {}^t(-a\cos u\sin v, a\cos u\cos v, 0, 0)$; $f_w = {}^t(0,0,0,1)$.
Вычисляем нормальный вектор:

$$\vec{n} = f_u \times f_v \times f_w = \begin{vmatrix} -a\sin u\cos v & -a\cos u\sin v & 0 & e_1 \\ -a\sin u\sin v & a\cos u\cos v & 0 & e_2 \\ a\cos u & 0 & 0 & e_3 \\ 0 & 0 & 1 & e_4 \end{vmatrix} =$$

$$a^2\,{}^t(\cos^2 u\cos v, \cos^2 u\sin v, -\cos u\sin u, 0).$$