Глава I. Кривые
§ 4. Общая локальная теория кривых

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Дифференциальная геометрия и топология
для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
III семестр

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкая кривая.

Определения

Векторным полем вдоль кривой α называется гладкое отображение $X : I \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}}^m$. Векторное поле $X : I \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}}^m$ вдоль кривой α называется *касательным*, если в каждый момент $t \in I$ векторы $X(t)$ и $\dot\alpha(t)$ коллинеарны.

Мы считаем, что вектор $X(t)$ отложен от точки на кривой $\alpha(t)$.

Естественными примерами векторных полей вдоль гладкой кривой $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ являются ее производные $\dot\alpha(t)$, $\ddot\alpha(t)$, $\dddot\alpha(t), \ldots$.

Определения

Подвижным репером вдоль кривой $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ называется совокупность реперов $\{(\alpha(t); E_1(t), E_2(t), \ldots, E_m(t)) | t \in I\}$, где $\alpha(t)$ — начальная точка репера, соответствующая моменту $t \in I$, а $(E_1(t), E_2(t), \ldots, E_m(t))$ — такой набор векторных полей вдоль кривой $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$, что для любого $t \in I$ векторы $E_1(t), E_2(t), \ldots, E_m(t)$ линейно независимы.
Набор линейно независимых векторных полей $(E_1(t), E_2(t), \ldots, E_m(t))$ вдоль кривой $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ называется *базисом вдоль кривой* α.

Определение

Кривая $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ называется *кривой общего вида*, если для любого $t \in I$ векторы $\dot\alpha(t)$, $\ddot\alpha(t)$, …, $\alpha^{(m-1)}(t)$ линейно независимы.

Количество векторных полей-производных в этом определении на единицу меньше размерности пространства.
При $m = 2$ плоская кривая общего вида является регулярной, при $m = 3$ пространственная кривая общего вида называется *бирегулярной*.

Пример ([1], стр.130, задача 1).
Убедиться, что кривая $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4$ с параметризацией $\alpha(t) = {}^t(e^t, e^{2t}, e^{3t}, e^{4t})$ является кривой общего вида.
Имеем $\dot\alpha = {}^t(e^t, 2e^{2t}, 3e^{3t}, 4e^{4t})$, $\ddot\alpha = {}^t(e^t, 4e^{2t}, 9e^{3t}, 16e^{4t})$, $\dddot\alpha = {}^t(e^t, 8e^{2t}, 27e^{3t}, 64e^{4t})$. Поскольку
$$\begin{vmatrix} e^t & 2e^{2t} & 3e^{3t} \\ e^t & 4e^{2t} & 9e^{3t} \\ e^t & 8e^{2t} & 27e^{3t} \end{vmatrix} = e^{6t}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{vmatrix} = 12e^{6t} \neq 0,$$ система $(\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha)$ линейно независима при любом $t \in \mathbb{R}$.

Лемма

Пусть α — кривая общего вида и кривая β получается из кривой α заменой параметра или изометрией. Тогда β — кривая общего вида.

$\Downarrow$Пусть $\beta(t)=\alpha(\varphi(t))$, где $\dot\varphi(t)\neq 0$ для любого $t\in I$. Подсчитаем производные кривой β: $\dot\beta=\dot\alpha(\varphi)\dot\varphi$, $\ddot\beta=\ddot\alpha\dot\varphi^2+\dot\alpha(\varphi)\ddot\varphi$, $\beta^{(3)}=\alpha^{(3)}\dot\varphi^3+\dots$, $\beta^{(k)}=\alpha^{(k)}\dot\varphi^k+\dots$, $(k=4,\dots,m-1)$. Следовательно, $(\dot\beta,\ddot\beta,\dots,\beta^{(m-1)})=(\dot\alpha,\ddot\alpha,\dots,\alpha^{(m-1)})T$, где

$$T=\begin{pmatrix} \dot\varphi & \ddot\varphi & \dots & * \\ 0 & \dot\varphi^2 & \dots & * \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \dot\varphi^{m-1} \end{pmatrix}.$$

Так как $\dot\varphi\neq 0$, матрица T невырожденная ($\det(T)=\dot\varphi^{\frac{m(m-1)}{2}}$) и потому векторы $(\dot\beta,\ddot\beta,\dots,\beta^{(m-1)})$ линейно независимы.
Заметим, что если $\dot\varphi>0$ (кривые положительно эквивалентны), то ориентация системы $(\dot\beta,\ddot\beta,\dots,\beta^{(m-1)})$ совпадает с ориентацией системы $(\dot\alpha,\ddot\alpha,\dots,\alpha^{(m-1)})$.
Пусть $\mathcal{A}$ — изометрия аффинного пространства $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{A}p=p_0+\vec{\mathcal{A}}X$, где $x=p-p_0$, $\vec{\mathcal{A}}$ — ортогональный оператор. Пусть $\beta(t)=\mathcal{A}\alpha(t)$. Тогда, как показано в доказательстве леммы сл.7 т.2 (см. сл.8 т.2), $\dot\beta=\vec{\mathcal{A}}\dot\alpha$, и аналогично $\ddot\beta=\vec{\mathcal{A}}\ddot\alpha$, ..., $\beta^{(m-1)}=\vec{\mathcal{A}}\alpha^{(m-1)}$. Так как $\vec{\mathcal{A}}$ — ортогональный оператор и векторы $\dot\alpha,\ddot\alpha,\dots,\alpha^{(m-1)}$ линейно независимы, векторы $\dot\beta,\ddot\beta,\dots,\beta^{(m-1)}$ также линейно независимы.$\Uparrow$

Репер Френе кривой общего вида

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — кривая общего вида.

Определение

Репером Френе кривой $\alpha(t)$ называется подвижный репер $\{(\alpha(t); E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t)) | t \in I\}$ вдоль α такой, что
1) в любой момент $t \in I$ векторы $E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t)$ образуют ортонормированный базис;
2) в любой момент $t \in I$ векторы $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{(m-1)}$ и $E_1(t), E_2(t), \dots, E_{m-1}(t)$ порождают один и тот же орфлаг;
3) в любой момент $t \in I$ базис $E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t)$ положительно ориентирован.

Теорема Френе

Для любой кривой общего вида $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ существует единственный репер Френе.

Доказательство теоремы Френе

$\Downarrow$Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — кривая общего вида. Положим $E_1 = \dfrac{\dot\alpha}{|\dot\alpha|}$. Далее рассуждаем по индукции. Предположим, что векторы $E_1, \dots, E_{k-1}$ уже построены для $k < m$. Применяем процесс ортогонализации Грама–Шмидта. Положим $B_k = \alpha^{(k)} - \sum\limits_{j=1}^{k-1} \langle \alpha^{(k)}, E_j \rangle E_j$. Тогда вектор B_k ортогонален к векторам $E_1, \dots, E_{k-1}$. Так как $B_k \neq \vec{0}$, полагаем $E_k = \dfrac{B_k}{|B_k|}$. Очевидно, что это гладкая функция. Получаем единственную систему $E_1, E_2, \dots, E_{m-1}$, порождающую тот же орфлаг, что и $\dot\alpha, \ddot\alpha, \dots, \alpha^{(m-1)}$. С помощью леммы сл.39 т.1 находим единственный вектор E_m, дополняющий систему $E_1, E_2, \dots, E_{m-1}$ до положительно ориентированного ортонормированного базиса: $E_m = E_1 \times E_2 \times \dots \times E_{m-1}$.$\Uparrow$

Репер Френе кривой в трехмерном пространстве

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ — кривая общего вида, т.е. бирегулярная. Векторы репера Френе традиционно обозначаются так: $E_1 = \vec{\tau}$ (*вектор касательной*), $E_2 = \vec{\nu}$ (*вектор нормали*), $E_3 = \vec{\beta}$ (*вектор бинормали*).

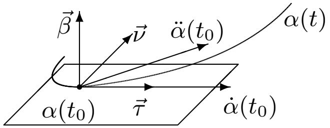

Рис. 1

Для построения репера Френе заметим, что $\mathcal{L}(\vec{\tau}, \vec{\nu}) = \mathcal{L}(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$ и в этом подпространстве базисы $(\vec{\tau}, \vec{\nu})$ и $(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$ имеют одинаковую ориентацию (см. рис. 1). Поэтому можно применить процесс ортогонализации Грама–Шмидта к системе $(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$. Однако проще оказывается поступить следующим образом. Из условия $\vec{\beta} \perp \mathcal{L}(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha})$ следует, что в качестве $\vec{\beta}$ можно взять орт векторного произведения $\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}$, т.е. $\vec{\beta} = \dfrac{\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}}{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|}$.

Положим $\vec{\nu} = \vec{\beta} \times \vec{\tau}$. Тогда тройка $\vec{\tau}, \vec{\nu}, \vec{\beta}$ будет положительно ориентированной, как и тройка $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \vec{\beta}$.

Координатные плоскости репера Френе кривой в трехмерном пространстве

Определения

Сам репер Френе бирегулярной кривой $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ часто называют *подвижным трехгранником* кривой $\alpha(t)$ или *естественным трехгранником*. Координатные плоскости репера Френе, проходящие через точку $\alpha(t)$, называются соответственно *соприкасающейся* (определяется векторами $\vec{\tau}$ и $\vec{\nu}$), *нормальной* (определяется векторами $\vec{\nu}$ и $\vec{\beta}$) и *спрямляющей* (определяется векторами $\vec{\tau}$ и $\vec{\beta}$).

Упражнение. Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ — бирегулярная кривая, $t_0, t_1, t_2 \in I$. Через три точки $\alpha(t_0)$, $\alpha(t_1)$, $\alpha(t_2)$ проведем "секущую" плоскость. Докажите, что соприкасающаяся плоскость в точке $\alpha(t_0)$ есть предельное положение этой секущей плоскости при $t_1 \to t_0$ и $t_2 \to t_0$.

Последний вектор базиса Френе

Найти последний вектор базиса Френе кривой
$\alpha(t) = {}^t(t^3, t^2, 2t^2 + t, t^3 + t^2 - 1)$.

Вычислим $\dot\alpha = {}^t(3t^2, 2t, 4t + 1, 3t^2 + 2t)$, $\ddot\alpha = {}^t(6t, 2, 4, 6t + 2)$,
$\dddot\alpha = {}^t(6, 0, 0, 6)$.
Так как базисы $(\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha)$ и (E_1, E_2, E_3) одинаково ориентированы и порождают одно и то же подпространство, последний вектор E_4 базиса Френе кривой $\alpha(t)$ получается нормированием обобщенного векторного произведения $\dot\alpha \times \ddot\alpha \times \dddot\alpha$. Вычисляем $\begin{vmatrix} 3t^2 & 6t & 6 & e_1 \\ 2t & 2 & 0 & e_2 \\ 4t+1 & 4 & 0 & e_3 \\ 3t^2+2t & 6t+2 & 6 & e_4 \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} 3t^2 & 6t & 6 & e_1 \\ 2t & 2 & 0 & e_2 \\ 4t+1 & 4 & 0 & e_3 \\ 2t & 2 & 0 & e_4 - e_1 \end{vmatrix} = 6\begin{vmatrix} 2t & 2 & e_2 \\ 4t+1 & 4 & e_3 \\ 2t & 2 & e_4 - e_1 \end{vmatrix} =$$

$$-12\begin{vmatrix} 1 & 2t & e_2 \\ 2 & 4t+1 & e_3 \\ 1 & 2t & e_4 - e_1 \end{vmatrix} = -12\begin{vmatrix} 1 & 2t & e_2 \\ 0 & 1 & e_3 - 2e_2 \\ 0 & 0 & e_4 - e_1 - e_2 \end{vmatrix} =$$

$-12(e_4 - e_1 - e_2) = -12\,{}^t(-1, -1, 0, 1) = 12\,{}^t(1, 1, 0, -1)$.

Окончание решения примера

Таким образом, $E_4 = \frac{1}{\sqrt{3}}\,{}^t(1,1,0,-1)$.

Из этого следует, что $\alpha(\mathbb{R})$ содержится в некоторой гиперплоскости, ортогональной к E_4. Действительно, интегрируя тождество $\langle\dot\alpha, E_4\rangle \equiv 0$, получаем $\left\langle \int_{t_0}^{t} \dot\alpha(\theta)d\theta, E_4 \right\rangle = \mathrm{const}$ или $\langle\alpha(t)-\alpha(t_0), E_4\rangle = \mathrm{const}$. Это тождество справедливо для всех $t \in \mathbb{R}$, в частности для $t = t_0$. Следовательно, $\mathrm{const} = 0$ и $\alpha(\mathbb{R})$ содержится в гиперплоскости $\langle p-\alpha(t_0), E_4\rangle = 0$. Если $\alpha(t_0) = {}^t(x_0, y_0, z_0, u_0)$, то уравнение этой гиперплоскости можно записать в виде $(x-x_0)+(y-y_0)-(u-u_0) = 0$. Положим $t_0 = 0$. Тогда $\alpha(0) = {}^t(0,0,0,-1)$ и уравнение гиперплоскости принимает окончательный вид $x+y-u-1 = 0$.

Каковы скорости (т.е. производные) базисных векторов репера Френе при движении репера вдоль кривой?

Теорема

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — кривая общего вида, $\{(\alpha(t); E_1(t), E_2(t), \dots, E_m(t)) | t \in I\}$ — ее репер Френе. Тогда существует гладкие скалярные функции $k_1, \dots, k_{m-1} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ такие что при всех $t \in I$ выполнены следующие условия:

$$1) \begin{cases} \dot{\alpha} = |\dot{\alpha}| E_1, \\ \dot{E}_1 = |\dot{\alpha}| k_1 E_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{E}_i = |\dot{\alpha}|(-k_{i-1}E_{i-1} + k_i E_{i+1}) \ (i = 2, \dots, m-1), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{E}_m = -|\dot{\alpha}| k_{m-1} E_{m-1}. \end{cases}$$

и

2) $k_1(t) > 0,\ k_2(t) > 0, \dots, k_{m-2}(t) > 0.$

Определения

Выписанные только что формулы 1) называются *формулами Френе*. Функции $k_1, \dots, k_{m-1}$ называются *кривизнами* кривой α.

В матричной записи формулы Френе выглядят так:

$$(\dot{E}_1, \dot{E}_2, \ldots, \dot{E}_m) = \tag{1}$$

$$= |\dot{\alpha}|(E_1, E_2, \ldots, E_m) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -k_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & k_{m-1} & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= |\dot{\alpha}|(E_1, E_2, \ldots, E_m) \cdot \overline{\boldsymbol{\omega}}(t).$$

Определение

Матрица $\overline{\boldsymbol{\omega}}(t)$ называется *матрицей кривизн*.

Матрица кривизн является матрицей перехода от ортонормированного базиса $(E_1(t), E_2(t), \ldots, E_m(t))$ к системе векторов производных $(\dot{E}_1(t), \dot{E}_2(t), \ldots, \dot{E}_m(t))$ (которая не обязана быть базисом). Матрица кривизн является кососимметрической матрицей.

⇓По определению репера Френе имеем $\dot{\alpha} = |\dot{\alpha}| E_1$. Так как $E_1(t), \dots, E_m(t)$ — базис $\overrightarrow{\mathbb{R}}^m$, разложим $\dot{E}_j(t)$ по этому базису: $\dot{E}_j(t) = \sum_{i=1}^{m} \omega^i_j(t) E_i(t)$.

Найдем матрицу $\boldsymbol{\omega}(t) = (\omega^i_j(t))$ (i —номер строки, j — номер столбца). Положим $X(t) = [E_1(t), \dots, E_m(t)]$ — квадратная матрица порядка m. Имеем $\dot{X} = X\boldsymbol{\omega}(t)$, т.е.

$$[\dot{E}_1(t), \dots, \dot{E}_m(t)] = [E_1(t), \dots, E_m(t)] \begin{pmatrix} \omega^1_1(t) & \omega^1_2(t) & \dots & \omega^1_m(t) \\ \omega^2_1(t) & \omega^2_2(t) & \dots & \omega^2_m(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega^m_1(t) & \omega^m_2(t) & \dots & \omega^m_m(t) \end{pmatrix}.$$

Так как базис $E_1(t), \dots, E_m(t)$ — ортонормированный, имеем $\omega^i_j(t) = \langle \dot{E}_j, E_i \rangle$. Следовательно, $\omega^i_j(t)$ — гладкая функция. Матрица X является ортогональной, так как ее столбцы образуют ортонормированный базис. Таким образом,

$$^t X \cdot X = \mathbb{I}_m. \tag{2}$$

Дифференцируя равенство (2) по t и принимая во внимание, что $^t\dot{X} = {}^t\boldsymbol{\omega} \cdot {}^tX$, получаем
$O_m = {}^t\dot{X} \cdot X + {}^tX \cdot \dot{X} = {}^t\boldsymbol{\omega} \cdot {}^tX \cdot X + {}^tX \cdot X \cdot \boldsymbol{\omega} = {}^t\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega}$. Таким образом, матрица $\boldsymbol{\omega}$ кососимметрическая, т.е.

$$\omega^i_j = -\omega^j_i, \;\; \omega^i_i = 0. \tag{3}$$

Положим $V_j = \mathcal{L}(\dot\alpha, \ddot\alpha, \ldots, \alpha^{(j)})$. По определению репера Френе $V_j = \mathcal{L}(E_1, E_2, \ldots, E_j)$ и $E_j \in V_j$, т.е. $E_j = \xi_1\dot\alpha + \ldots + \xi_j\alpha^{(j)}$. Следовательно, $\dot E_j = \eta_1\dot\alpha + \ldots + \eta_{j+1}\alpha^{(j+1)}$, т.е. $\dot E_j \in V_{j+1}$ и E_{j+2}, …, E_m не входят в разложение $\dot E_j$ по базису Френе. Отсюда $\omega^i_j = 0$ при $i > j+1$ и из (3) получаем $\omega^j_i = 0$ при $i > j+1$, и $\omega^i_i = 0$. Таким образом, матрица

$\boldsymbol{\omega}(t)$ принимает вид $\begin{pmatrix} 0 & -\omega^2_1(t) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \omega^2_1(t) & 0 & -\omega^3_2(t) & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \omega^3_2(t) & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & -\omega^m_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \omega^m_{m-1} & 0 \end{pmatrix}$.

Положим $k_i(t) = \dfrac{1}{|\dot\alpha(t)|}\omega^{i+1}_i(t)$ $(i = 1, \ldots, m-1)$. Ясно, что $k_i(t)$ — гладкие функции. Теперь утверждение 1) доказано.

Докажем, утверждение 2): $k_i(t) > 0$ при $i = 1, \dots, m-2$. Учитывая определение $k_i(t)$, для это достаточно убедиться, что $\omega_i^{i+1} > 0$. По построению $\omega_i^{i+1} = \langle \dot{E}_i, E_{i+1} \rangle$. Вспомнив определение вектора E_j с помощью процесса ортогонализации Грама–Шмидта, получаем

$$b_j E_j = \alpha^{(j)} + b_j v_{j-1}, \text{ где } b_j > 0, v_{j-1} \in V_{j-1}, j < m. \tag{4}$$

Тогда $E_j = \dfrac{1}{b_j}\alpha^{(j)} + v_{j-1}$, откуда $\dot{E}_j = \dfrac{1}{b_j}\alpha^{(j+1)} + w_j$ для некоторого $w_j \in V_j$. При $j = i$ имеем $\dot{E}_i = \dfrac{1}{b_i}\alpha^{(i+1)} + w_i$. Из (4) при $j = i+1$ выводим $\alpha^{(i+1)} = b_{i+1}(E_{i+1} - v_i)$, где $v_i \in V_i$. Отсюда

$\dot{E}_i = \dfrac{1}{b_i}(b_{i+1}(E_{i+1} - v_i)) + w_i = \dfrac{b_{i+1}}{b_i}E_{i+1} - \dfrac{b_{i+1}}{b_i}v_i + w_i$ и

$\omega_i^{i+1} = \langle \dot{E}_i, E_{i+1} \rangle = \langle \dfrac{b_{i+1}}{b_i}E_{i+1}, E_{i+1} \rangle = \dfrac{b_{i+1}}{b_i} > 0$, так как $E_{i+1} \perp v_i, w_i$.

Это верно для всех i таких что $i < m-1$. Утверждение 2) доказано.$\Uparrow$

Заметим, что при $i = m-1$ про кривизну k_{m-1} ничего сказать нельзя, так как вектор E_m получается не с помощью процесса ортогонализации.

Формулы для кривизн кривой общего вида

$$k_i(t) = \frac{\langle \dot{E}_i(t), E_{i+1}(t) \rangle}{|\dot{\alpha}(t)|}, \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Вычислить векторы репера Френе и кривизны кривой $\alpha : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^4$, имеющей параметризацию $\alpha(t) = {}^t(\sin t, \cos t, \frac{1}{2}\sin 2t, \frac{1}{2}\cos 2t)$.

$\dot\alpha(t) = {}^t(\cos t, -\sin t, \cos 2t, -\sin 2t)$;
$E_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t(\cos t, -\sin t, \cos 2t, -\sin 2t)$;
$\ddot\alpha(t) = {}^t(-\sin t, -\cos t, -2\sin 2t, -2\cos 2t)$; $\langle \ddot\alpha(t), E_1(t)\rangle = 0$;
$E_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{5}}{}^t(\sin t, \cos t, 2\sin 2t, 2\cos 2t)$;
$\dddot\alpha(t) = {}^t(-\cos t, \sin t, -4\cos 2t, 4\sin 2t)$; $\langle \dddot\alpha(t), E_1(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1-4) = -\frac{5}{\sqrt{2}}$;
$\langle \dddot\alpha(t), E_2(t)\rangle = 0$; $b_3 = \dddot\alpha(t) - \langle \dddot\alpha(t), E_1(t)\rangle E_1(t) =$
${}^t(-\cos t, \sin t, -4\cos 2t, 4\sin 2t) + \frac{5}{2}{}^t(\cos t, -\sin t, \cos 2t, -\sin 2t) =$
${}^t(\frac{3}{2}\cos t, -\frac{3}{2}\sin t, -\frac{3}{2}\cos 2t, \frac{3}{2}\sin 2t) = \frac{3}{2}{}^t(\cos t, -\sin t, -\cos 2t, \sin 2t)$;
$E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t(\cos t, -\sin t, -\cos 2t, \sin 2t)$;

$$E_4(t) = E_1(t) \times E_2(t) \times E_3(t) = -\frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{vmatrix} \cos t & \sin t & \cos t & e_1 \\ -\sin t & \cos t & -\sin t & e_2 \\ \cos 2t & 2\sin 2t & -\cos 2t & e_3 \\ -\sin 2t & 2\cos 2t & \sin 2t & e_4 \end{vmatrix}.$$

$$-\begin{vmatrix} -\sin t & \cos t & -\sin t \\ \cos 2t & 2\sin 2t & -\cos 2t \\ -\sin 2t & 2\cos 2t & \sin 2t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\sin 2t & -\cos 2t \\ 2\cos 2t & \sin 2t \end{vmatrix} \sin t + \begin{vmatrix} 2\cos 2t & -\cos 2t \\ -2\sin 2t & \sin 2t \end{vmatrix} \cos t + \begin{vmatrix} \cos 2t & 2\sin 2t \\ -\sin 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix} \sin t = 2\sin t + 2\sin t = 4\sin t;$$

$$\begin{vmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ \cos 2t & 2\sin 2t & -\cos 2t \\ -\sin 2t & 2\cos 2t & \sin 2t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\sin 2t & -\cos 2t \\ 2\cos 2t & \sin 2t \end{vmatrix} \cos t - \begin{vmatrix} \cos 2t & -\cos 2t \\ -\sin 2t & \sin 2t \end{vmatrix} \sin t + \begin{vmatrix} \cos 2t & 2\sin 2t \\ -\sin 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix} \cos t = 2\cos t + 2\cos t = 4\cos t;$$

$$-\begin{vmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \\ -\sin 2t & 2\cos 2t & \sin 2t \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ 2\cos 2t & \sin 2t \end{vmatrix} \cos t + \begin{vmatrix} -\sin t & -\sin t \\ -\sin 2t & \sin 2t \end{vmatrix} \sin t - \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ -\sin 2t & 2\cos 2t \end{vmatrix} \cos t = -(\cos t \sin 2t + 2\sin t \cos 2t)\cos t - 2\sin^2 t \sin 2t - (-2\sin t \cos 2t + \sin 2t \cos t)\cos t = -2(\cos^2 t + \sin^2 t)\sin 2t = -2\sin 2t;$$

$$\begin{vmatrix} \cos t & \sin t & \cos t \\ -\sin t & \cos t & -\sin t \\ \cos 2t & 2\sin 2t & -\cos 2t \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos t & -\sin t \\ 2\sin 2t & -\cos 2t \end{vmatrix} \cos t - \begin{vmatrix} -\sin t & -\sin t \\ \cos 2t & -\cos 2t \end{vmatrix} \sin t + \begin{vmatrix} -\sin t & \cos t \\ \cos 2t & 2\sin 2t \end{vmatrix} \cos t = (-\cos t\cos 2t +$$
$$2\sin t\sin 2t)\cos t - 2\sin^2 t\cos 2t + (-2\sin t\sin 2t - \cos 2t\cos t)\cos t =$$
$$-2(\cos^2 t + \sin^2 t)\cos 2t = -2\cos 2t;$$
$$E_4(t) = -\frac{1}{2\sqrt{5}}{}^t(4\sin t, 4\cos t, -2\sin 2t, -2\cos 2t) =$$
$$\frac{1}{\sqrt{5}}{}^t(-2\sin t, -2\cos t, \sin 2t, \cos 2t).$$

Находим кривизны. $\dot{E}_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t(-\sin t, -\cos t, -2\sin 2t, -2\cos 2t);$
$E_2(t) = -\frac{1}{\sqrt{5}}{}^t(\sin t, \cos t, 2\sin 2t, 2\cos 2t);$
$\langle \dot{E}_1(t), E_2(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(1+2) = \frac{3}{\sqrt{10}}$; $|\dot{\alpha}(t)| = \sqrt{2}$; $k_1(t) = \frac{3}{\sqrt{10}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$;
$\dot{E}_2(t) = \frac{1}{\sqrt{5}}{}^t(-\cos t, \sin t, -4\cos 2t, 4\sin 2t);$
$E_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t(\cos t, -\sin t, -\cos 2t, \sin 2t)$; $\langle \dot{E}_2(t), E_3(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(-1+4) = \frac{3}{\sqrt{10}}$;
$k_2(t) = \frac{3}{\sqrt{10}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{5}}$; $\dot{E}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}{}^t(-\sin t, -\cos t, 2\sin 2t, 2\cos 2t)$;
$\langle \dot{E}_3(t), E_4(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{10}}(2+2) = \frac{4}{\sqrt{10}}$; $k_3(t) = \frac{4}{\sqrt{10}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ — кривая общего вида. Ее кривизны обозначаются через $k_1 = k$ (*кривизна*) и $k_2 = \kappa$ (*кручение*). Запишем формулы Френе:
$\dot\alpha = |\dot\alpha|\vec\tau$, $\dot{\vec\tau} = |\dot\alpha|k\vec\nu$, $\dot{\vec\nu} = |\dot\alpha|(-k\vec\tau + \kappa\vec\beta)$, $\dot{\vec\beta} = |\dot\alpha|(-\kappa\vec\nu)$.
Выведем формулы для вычисления кривизны и кручения.
Продифференцируем равенство $\dot\alpha = |\dot\alpha|\vec\tau$, получим $\ddot\alpha = |\dot\alpha|^{\cdot}\vec\tau + |\dot\alpha|^2 k\vec\nu$.
Продифференцируем полученное равенство: $\dddot\alpha = (\ldots)\vec\tau + (\ldots)\vec\nu + |\dot\alpha|^3 k\kappa\vec\beta$, где многоточием обозначены коэффициенты, точные выражения для которых не важны для вычислений. Запишем векторное произведение $\dot\alpha \times \ddot\alpha = |\dot\alpha|^3 k(\vec\tau \times \vec\nu) = |\dot\alpha|^3 k\vec\beta$. Так как $k > 0$, приравнивая длины векторов, получаем $k = \dfrac{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|}{|\dot\alpha|^3}$. Получилась та же формула, что и в случае $m = 2$. Чтобы найти кручение, вычислим смешанное произведение $\dot\alpha\ddot\alpha\dddot\alpha = \langle\dot\alpha \times \ddot\alpha, \dddot\alpha\rangle = |\dot\alpha|^6 k^2\kappa$. Отсюда $\kappa = \dfrac{\dot\alpha\ddot\alpha\dddot\alpha}{|\dot\alpha|^6 k^2} = \dfrac{\dot\alpha\ddot\alpha\dddot\alpha}{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|^2}$.

Вычислительные формулы для кривизны и кручения

$$k = \frac{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|}{|\dot\alpha|^3}, \quad \kappa = \frac{\dot\alpha\ddot\alpha\dddot\alpha}{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|^2}.$$

Предложение

Пусть $\alpha(s) : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ — кривая единичной скорости. Тогда
$E_1(s) = \dot{\alpha}(s)$, $E_2(s) = \dfrac{\ddot{\alpha}(s)}{|\ddot{\alpha}(s)|}$, $E_3 = \dfrac{\dot{\alpha}(s) \times \ddot{\alpha}(s)}{|\ddot{\alpha}(s)|}$
и $k(s) = |\ddot{\alpha}(s)|$, $\kappa(s) = \dfrac{\dot{\alpha}(s)\ddot{\alpha}(s)\dddot{\alpha}(s)}{\ddot{\alpha}(s)^2}$.

$\Downarrow$Так как $|\dot{\alpha}(s)| \equiv 1$, $E_1(s) = \dot{\alpha}(s)$ и $|\ddot{\alpha}(s)| \perp \dot{\alpha}(s)$, поэтому $E_2(s) = \dfrac{\ddot{\alpha}(s)}{|\ddot{\alpha}(s)|}$ и $|\dot{\alpha}(s) \times \ddot{\alpha}(s)| = |\ddot{\alpha}(s)|$. По определению $E_3(s) = E_1(s) \times E_2(s)$, следовательно $E_3 = \dfrac{\dot{\alpha}(s) \times \ddot{\alpha}(s)}{|\ddot{\alpha}(s)|}$.

По определению $\dot{E}_1(s) = k(s)E_2(s)$, поэтому $k(s) = |\ddot{\alpha}(s)|$. По формуле с предыдущего слайда $\kappa(s) = \dfrac{\dot{\alpha}\ddot{\alpha}\dddot{\alpha}}{|\dot{\alpha} \times \ddot{\alpha}|^2} = \dfrac{\dot{\alpha}(s)\ddot{\alpha}(s)\dddot{\alpha}(s)}{\ddot{\alpha}(s)^2}$.$\Uparrow$

Базис Френе, кривизна и кручение винтовой линии

Найти базис Френе, кривизну и кручение винтовой линии

$$\alpha(t) = {}^t(a\cos t, a\sin t, bt).$$

Составить уравнения координатных прямых и координатных плоскостей репера Френе.
Проверить, что главная нормаль пересекает ось винтовой линии под прямым углом, а бинормаль образует с ней постоянный угол.
При каком значении b кручение винтовой линии максимально, если $a = \mathrm{const}$?

Вычисляем производные: $\dot\alpha(t) = {}^t(-a\sin t, a\cos t, b)$, $\ddot\alpha(t) = {}^t(-a\cos t, -a\sin t, 0)$ и векторное произведение

$$\dot\alpha \times \ddot\alpha = \begin{vmatrix} -a\sin t & -a\cos t & e_1 \\ a\cos t & -a\sin t & e_2 \\ b & 0 & e_3 \end{vmatrix} = {}^t(ab\sin t, -ab\cos t, a^2).$$ Тогда

$$E_1 = \vec\tau = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,{}^t(-a\sin t, a\cos t, b),$$

$$E_3 = \vec\beta = \frac{\dot\alpha \times \ddot\alpha}{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\,{}^t(b\sin t, -b\cos t, a).$$

Далее находим $E_2=\vec{\nu}=E_3\times E_1=\dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{vmatrix} b\sin t & -a\sin t & e_1\\ -b\cos t & a\cos t & e_2\\ a & b & e_3\end{vmatrix}=$

$\dfrac{1}{a^2+b^2}{}^t(-(a^2+b^2)\cos t,-(a^2+b^2)\sin t,0)={}^t(-\cos t,-\sin t,0)$.

Теперь ясно, что $E_2\perp e_3$, откуда следует, что главная нормаль перпендикулярна к оси винтовой линии (оси Oz). Поскольку $\cos\left(\widehat{E_3,e_3}\right)=\langle E_3,e_3\rangle=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ не зависит от t, бинормаль образует с осью Oz постоянный угол.

Репер Френе: $(\alpha(t);\vec{\tau},\vec{\nu},\vec{\beta})$. Касательная: $x=a\cos t-\dfrac{a\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}}u$, $y=a\sin t+\dfrac{a\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}u$, $z=bt+\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}u$. Нормаль: $x=a\cos t-u\cos t$, $y=a\sin t-u\sin t$, $z=bt$. Бинормаль: $x=a\cos t+\dfrac{b\sin t}{\sqrt{a^2+b^2}}u$, $y=a\sin t-\dfrac{b\cos t}{\sqrt{a^2+b^2}}u$, $z=bt+\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}u$.

Соприкасающаяся плоскость (проходит через точку $\alpha(t)$ перпендикулярно E_3): $b(x-a\cos t)\sin t-b(y-a\sin t)\cos t+a(z-bt)=0$ или $xb\sin t-yb\cos t+za-abt=0$.

Окончание примера

Нормальная плоскость (проходит через точку $\alpha(t)$ перпендикулярно E_1):
$-a(x-a\cos t)\sin t + a(y-a\sin t)\cos t + b(z-bt) = 0$ или
$xa\cos t - ya\sin t - zb + b^2t = 0$.
Спрямляющаяся плоскость (проходит через точку $\alpha(t)$ перпендикулярно E_2): $-(x-a\cos t)\cos t - (y-a\sin t)\sin t = 0$ или $x\cos t + y\sin t - a = 0$.
Находим кривизну: $k(t) = \dfrac{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|}{|\dot\alpha|^3} = \dfrac{\sqrt{a^2b^2+a^4}}{(a^2+b^2)\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{a}{a^2+b^2}$.
Чтобы найти кручение, вычислим $\dddot\alpha(t) = {}^t(a\sin t, -a\cos t, 0)$ и смешанное произведение $\dot\alpha\ddot\alpha\dddot\alpha = \begin{vmatrix} -a\sin t & -a\cos t & a\sin t \\ a\cos t & -a\sin t & -a\cos t \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix} = ba^2$. Тогда
$\kappa(t) = \dfrac{\dot\alpha\ddot\alpha\dddot\alpha}{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|^2} = \dfrac{a^2b}{a^2b^2+a^4} = \dfrac{b}{a^2+b^2}$.
Мы видим, что кривизна и кручение винтовой линии от t не зависят.
При постоянном a кручение $\kappa(b) = \dfrac{b}{a^2+b^2}$ принимает максимальное значение при $b=a$. В самом деле, $\kappa'(b) = \dfrac{a^2+b^2-2b^2}{a^2+b^2} = \dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.
Производная обращается в нуль при $b=a$ и меняет знак при переходе через a с плюса на минус, т.е. при $b=a$ кручение максимально.

Кривизна и кручение конкретной кривой

Найти кривизну и кручение кривой $\alpha(t) = {}^t(2t, \ln t, t^2)$.

Кривая определена при всех $t > 0$. Считаем производные:
$\dot\alpha(t) = {}^t(2, \frac{1}{t}, 2t)$, $\ddot\alpha(t) = {}^t(0, -\frac{1}{t^2}, 2)$, $\dddot\alpha(t) = {}^t(0, \frac{2}{t^3}, 0)$. Длина
$|\dot\alpha| = \sqrt{4 + \frac{1}{t^2} + 4t^2} = \sqrt{(2t + \frac{1}{t})^2} = 2t + \frac{1}{t} = \frac{2t^2+1}{t}$. Найдем

$$\dot\alpha \times \ddot\alpha = \begin{vmatrix} 2 & 0 & e_1 \\ 1/t & -1/t^2 & e_2 \\ 2t & 2 & e_3 \end{vmatrix} = {}^t(\frac{4}{t}, -4, -\frac{2}{t^2}) \text{ и}$$

$$|\dot\alpha \times \ddot\alpha| = \sqrt{\frac{16}{t^2} + 16 + \frac{4}{t^4}} = 2(2 + \frac{1}{t^2}) = \frac{2(2t^2+1)}{t^2},$$

$$\dot\alpha\ddot\alpha\dddot\alpha = \langle \dot\alpha \times \ddot\alpha, \dddot\alpha \rangle = -\frac{8}{t^3}.$$

Теперь находим кривизну $k(t) = \frac{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|}{|\dot\alpha|^3} = \frac{2(2t^2+1)t^3}{t^2(2t^2+1)^3} = \frac{2t}{(2t^2+1)^2}$ и

кручение $\varkappa(t) = \frac{\dot\alpha\ddot\alpha\dddot\alpha}{|\dot\alpha \times \ddot\alpha|^2} = -\frac{8t^4}{4t^3(2t^2+1)^2} = -\frac{2t}{(2t^2+1)^2}$.

Поведение кривой в окрестности точки

Исследуем поведение бирегулярной кривой в окрестности некоторой точки. Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ — натурально параметризованная кривая, т.е. $|\dot\alpha| \equiv 1$ и $s_0 \in I$. Тогда имеем $\dot\alpha = \vec\tau$, $\ddot\alpha = \dot{\vec\tau} = k\vec\nu$,
$\dddot\alpha = (k\vec\nu)^{\cdot} = k\dot{\vec\nu} + \dot k\vec\nu = k(-k\vec\tau + \varkappa\vec\beta) + \dot k\vec\nu = -k^2\vec\tau + \dot k\vec\nu + k\varkappa\vec\beta$.
Вычислим $\alpha(s) - \alpha(s_0)$ по формуле Тейлора:
$\alpha(s) - \alpha(s_0) = \dot\alpha(s_0)(s - s_0) + \dfrac{1}{2}\ddot\alpha(s_0)(s - s_0)^2 + \dfrac{1}{6}\dddot\alpha(s_0)(s - s_0)^3 + R$, где $R \longrightarrow 0$ при $s \longrightarrow s_0$. Положим $\sigma = s - s_0$ и подставим вместо значений производных $\dot\alpha(s_0), \ddot\alpha(s_0), \dddot\alpha(s_0)$ выражения для них:

$$\alpha(s) - \alpha(s_0) = \sigma\vec\tau + \frac{1}{2}k\sigma^2\vec\nu + \frac{1}{6}(-k^2\vec\tau + \dot k\vec\nu + k\varkappa\vec\beta)\sigma^3 + R =$$
$$(\sigma - \frac{k^2}{6}\sigma^3)\vec\tau + (\frac{k}{2}\sigma^2 + \frac{\dot k}{6}\sigma^3)\vec\nu + \frac{k\varkappa}{6}\sigma^3\vec\beta + R.$$

Рассмотрим проекции $\alpha(s)$ на координатные плоскости репера Френе в точке $\alpha(s_0)$. В проекции на соприкасающуюся плоскость (см. рис. 2) при $\sigma > 0$ проекция $\alpha(s)$ лежит в первой четверти, а при $\sigma < 0$ — во второй.

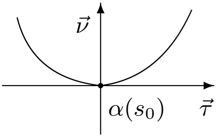

Рис. 2

$$\alpha(s) - \alpha(s_0) = (\sigma - \frac{k^2}{6}\sigma^3)\vec{\tau} + (\frac{k}{2}\sigma^2 + \frac{\dot{k}}{6}\sigma^3)\vec{\nu} + \frac{k\kappa}{6}\sigma^3\vec{\beta} + R.$$

При проектировании на спрямляющую плоскость необходимо рассмотреть два случая. Если $\kappa > 0$, то (см. рис. 3) при $\sigma > 0$ проекция $\alpha(s)$ лежит в первой четверти, а при $\sigma < 0$ — в третьей. Если $\kappa < 0$, то (см. рис. 4) при $\sigma > 0$ проекция $\alpha(s)$ лежит в четвертой четверти, а при $\sigma < 0$ — во второй.

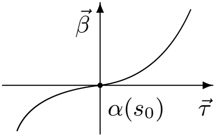

Рис. 3

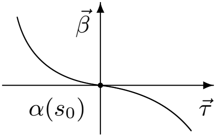

Рис. 4

$$\alpha(s)-\alpha(s_0)=(\sigma-\frac{k^2}{6}\sigma^3)\vec{\tau}+(\frac{k}{2}\sigma^2+\frac{\dot{k}}{6}\sigma^3)\vec{\nu}+\frac{k\kappa}{6}\sigma^3\vec{\beta}+R.$$

При проектировании на нормальную плоскость также необходимо рассмотреть два случая. Если $\kappa>0$, то (см. рис. 5) при $\sigma>0$ проекция $\alpha(s)$ лежит в первой четверти, а при $\sigma<0$ — в четвертой. Если $\kappa<0$, то при $\sigma>0$ проекция $\alpha(s)$ лежит в четвертой четверти, а при $\sigma<0$ — в первой. Мы видим, что в проекции на нормальную плоскость точка $\alpha(s_0)$ всегда особая (возврат первого рода).

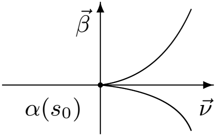

Рис. 5

Теорема об инвариантности кривизн относительно замены параметра

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — кривая общего вида, E_1, E_2, $\ldots$, E_m — базис Френе, k_1, k_2, $\ldots$, k_{m-1} — кривизны α. Если $\varphi : J \longrightarrow I$ — замена параметра, сохраняющая ориентацию ($\dot{\varphi}(\theta) > 0$ при всех $\theta \in J$), то $\beta = \alpha(\varphi(\theta))$ – кривая общего вида и базис Френе кривой β имеет вид $\tilde{E}_1 = E_1(\varphi(\theta))$, $\tilde{E}_2 = E_2(\varphi(\theta))$, $\ldots$, $\tilde{E}_m = E_m(\varphi(\theta))$, а ее кривизны равны соответственно $\tilde{k}_1 = k_1(\varphi(\theta))$, $\tilde{k}_2 = k_2(\varphi(\theta))$,$\ldots$, $\tilde{k}_{m-1} = k_{m-1}(\varphi(\theta))$.

$\Downarrow$Так как $[\dot{\beta}, \ddot{\beta}, \ldots, \beta^{(m-1)}] = [\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ldots, \alpha^{(m-1)}] \begin{pmatrix} \dot{\varphi} & & & * \\ & \dot{\varphi}^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \dot{\varphi}^{m-1} \end{pmatrix}$,

векторы $[\dot{\beta}, \ddot{\beta}, \ldots, \beta^{(m-1)}]$ в момент θ и $[\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ldots, \alpha^{(m-1)}]$ в момент $t = \varphi(\theta)$ определяют один и тот же орфлаг. Поскольку первые $m-1$ векторов базиса Френе представляют собой ортонормированную систему, порождающую этот орфлаг, и такая система единственна, заключаем, что $\tilde{E}_1 = E_1(\varphi(\theta))$, $\tilde{E}_2 = E_2(\varphi(\theta))$, $\ldots$, $\tilde{E}_{m-1} = E_{m-1}(\varphi(\theta))$. Следовательно, $\tilde{E}_m = E_m(\varphi(\theta))$.

Окончание доказательства теоремы об инвариантности кривизн относительно замены параметра

Так как $\dot{\varphi}(\theta) > 0$, на основании формул Френе имеем $\tilde{k}_i(\theta) = \dfrac{\langle \dot{\tilde{E}}_i, \tilde{E}_{i+1} \rangle}{|\dot{\beta}(\theta)|} =$
$\dfrac{\langle \dot{E}_i(\varphi(\theta))\dot{\varphi}(\theta), E_{i+1}(\varphi(\theta)) \rangle}{|\dot{\alpha}(\varphi(\theta))\dot{\varphi}(\theta)|} = \dfrac{\dot{\varphi}(\theta)}{\dot{\varphi}(\theta)} \dfrac{\langle \dot{E}_i(\varphi(\theta)), E_{i+1}(\varphi(\theta)) \rangle}{|\dot{\alpha}(\varphi(\theta))|} = k_i(\varphi(\theta))$
$(i = 1, 2, \ldots, m-1)$.$\Uparrow$

Теорема об инвариантности кривизн относительно движения

Пусть $\mathcal{A}$ — движение в $\mathbb{R}^m$, $\mathcal{A}p = p_0 + \vec{\mathcal{A}}(p - p_0)$, $\det(\vec{\mathcal{A}}) = 1$, $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — кривая общего вида, $\tilde{\alpha} = \mathcal{A}\alpha$. Доказать, что $\tilde{\alpha}$ также является кривой общего вида, $\tilde{E}_i = \vec{\mathcal{A}}E_i$, $\tilde{k}_i = k_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

Доказательство предлагается провести самостоятельно.

Теорема об изометричности кривых с одинаковыми кривизнами и абсолютными скоростями

Пусть $\alpha, \tilde{\alpha} : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — две кривые общего вида, $|\dot{\alpha}| = |\dot{\tilde{\alpha}}|$, $\tilde{k}_i = k_i$, $i = 1, \dots, m-1$. Тогда существует такое движение $\mathcal{A}$ аффинного пространства $\mathbb{R}^m$, что $\tilde{\alpha} = \mathcal{A}\alpha$.

$\Downarrow$Используем обозначения из доказательства теоремы Френе-Жордана, для $\tilde{\alpha}$ снабжаем их тильдой. По условию $\tilde{\omega} = \omega$. Матрицы $\tilde{X}(t) = [\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_m]$ и $X(t) = [E_1, \dots, E_m]$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\dot{Z} = Z\omega. \tag{5}$$

Зафиксируем $t_0 \in I$. Существует такая матрица $Q(t)$ что $\tilde{X}(t) = Q(t)X(t)$. Положим $Q_0 = Q(t_0)$ и рассмотрим векторное поле $Y(t) = Q_0 X(t)$. Покажем, что $Y(t)$ является решением уравнения (5). Имеем $\dot{Y}(t) = Q_0\dot{X}(t) = Q_0 X(t)\omega(t) = Y(t)\omega(t)$. Далее, $Y(t_0) = Q_0 X(t_0) = \tilde{X}(t_0)$. В силу единственности решения задачи Коши для дифференциального уравнения (5) имеем $Y(t) = \tilde{X}(t)$, т.е. $\tilde{X}(t) = Q_0 X(t)$. Мы видим, что матрица Q_0 годится для любого $t \in I$. Так как базисы $E_1, \dots, E_m$ и $\tilde{E}_1, \dots, \tilde{E}_m$ положительно ориентированы, будучи базисами Френе, имеем $\det(Q_0) = 1$.

Теперь из равенств $\dot{\tilde{\alpha}}(t) = |\dot{\tilde{\alpha}}(t)|\tilde{E}_1$ и $\tilde{E}_1 = Q_0 E_1$ выводим $\tilde{\alpha}(t) - \tilde{\alpha}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \dot{\tilde{\alpha}}(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} |\dot{\tilde{\alpha}}(\tau)|\tilde{E}_1(\tau)d\tau = \int_{t_0}^{t} |\dot{\alpha}(\tau)|Q_0 E_1(\tau)d\tau =$ $Q_0 \int_{t_0}^{t} |\dot{\alpha}(\tau)|E_1(\tau)d\tau = Q_0 \int_{t_0}^{t} \dot{\alpha}(\tau)d\tau = Q_0(\alpha(t) - \alpha(t_0))$. Таким образом, $\tilde{\alpha}(t) - \tilde{\alpha}(t_0) = Q_0(\alpha(t) - \alpha(t_0))$. Рассмотрим движение $\mathcal{A}$, полагая $\mathcal{A}q = p_0 + \vec{\mathcal{A}}(q - p_0)$, где $p_0 = \tilde{\alpha}(t_0)$ и $\vec{\mathcal{A}}$ — ортогональный оператор, заданный в стандартном базисе матрицей Q_0. Мы доказали, что $\tilde{\alpha}(t) = \mathcal{A}\alpha(t)$.$\Uparrow$

Если у двух кривых абсолютные скорости и кривизны одинаковы, то эти кривые отличаются друг от друга только расположением в пространстве. Можно ли сказать, что кривизны и модуль скорости задают кривую с точностью до расположения в пространстве? Для этого нужно быть уверенным, что кривая с заданными набором кривизн и абсолютной скоростью *существует*.

Эта теорема — фундамент локальной теории кривых. Она фактически утверждает, что репер Френе кривой общего вида содержит в себе абсолютно всю информацию об исходной кривой.
Требуется доказать существование и единственность кривой общего вида $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ с заданными кривизнами и абсолютной скоростью.
Используем следующие начальные условия для этой задачи:
1) $0 \in I$ (замена параметра),
2) $\alpha(0) = {}^t(0, 0, \ldots, 0)$ (параллельный перенос в $\mathbb{R}^m$),
3) $(E_1(0), E_2(0), \ldots, E_m(0)) = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$ (поворот в $\mathbb{R}^m$),
4) $|\alpha(t)| \equiv 1$ (замена параметра — натуральная параметризация).

Теорема

Пусть I — интервал в $\mathbb{R}$, $0 \in I$, $k_1, \ldots, k_{m-1} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ — гладкие функции, причем $k_1(s) > 0, \ldots, k_{m-2}(s) > 0$ для любого $s \in I$. Тогда существует единственная кривая общего вида единичной скорости $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ такая что $\alpha(0) = (0, 0, \ldots, 0)$, $(E_1(0), E_2(0), \ldots, E_m(0)) = (E_1, E_2, \ldots, E_m)$, $k_1, \ldots, k_{m-1}$ — кривизны кривой α.

Определение

Уравнения $k_i = k_i(s)$, $i = 1, \ldots, m-1$ называются *натуральными уравнениями кривой* α.

$\Downarrow$ Предположим, что искомая кривая α построена и $E_1, \dots, E_m$ — ее базис Френе. Тогда $\alpha(s)$ является решением задачи A:

$$\dot{\alpha}(s) = E_1(s),\ \alpha(0) = (0, 0, \dots, 0). \tag{6}$$

Матрица $X = [E_1, \dots, E_m]$ является решением задачи B:

$$\dot{X} = X \cdot \omega,\ X(0) = (E_1, \dots, E_m), \tag{7}$$

$$\omega(s) = \begin{pmatrix} 0 & -k_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ k_1 & 0 & -k_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -k_{m-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & k_{m-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Решим сначала задачу B. Из курса дифференциальных уравнений известно, что она имеет единственное решение $X = X(s)$. Тогда имеем $(X \cdot {}^tX)^\bullet = \dot{X} \cdot {}^tX + X \cdot {}^t\dot{X} = X \cdot \omega \cdot {}^tX + X \cdot {}^t\omega \cdot {}^tX = X \cdot (\omega + {}^t\omega) \cdot {}^tX \equiv O$, так как ω — кососимметрическая матрица. Таким образом, $X \cdot {}^tX$ – постоянная матрица. Так как $X(0) \cdot {}^tX(0) = \mathbb{I}_m$ — единичная матрица, заключаем, что матрица X ортогональна, и ее столбцы $E_1(s), \dots, E_m(s)$ образуют ортонормированный базис.

Теперь решаем задачу A. Так как $\dot{\alpha}(s) = E_1(s)$, $\alpha(s) = \displaystyle\int_0^s E_1(\sigma)d\sigma$ — ее решение, поскольку $\alpha(0) = (0, 0, \dots, 0)$. Это решение единственно в силу единственности решения задачи Коши.

Проверим, что для $\alpha(s)$ выполнены все условия теоремы. Заметим, что $|\dot{\alpha}(s)| = |E_1(s)| \equiv 1$. Докажем, что α — кривая общего вида. Вычислим производные от α. По построению α имеем $\dot{\alpha}(s) = E_1(s)$. С помощью (7) заключаем, что $\ddot{\alpha}(s) = \dot{E}_1(s) = k_1(s)E_2(s)$. Дифференцируя равенство $\ddot{\alpha} = k_1E_2$ и применяя (7), получаем $\dddot{\alpha} = k_1\dot{E}_2 + \dot{k}_1E_2 = k_1k_2E_3 - k_1^2E_1 + {}$ $+\dot{k}_1E_2$. Дифференцируя равенство $\dddot{\alpha} = k_1k_2E_3 + \gamma_{31}E_1 + \gamma_{32}E_2$, получим $\alpha^{(4)} = k_1k_2k_3E_4 + \gamma_{41}E_1 + \gamma_{42}E_2 + \gamma_{43}E_3$ для некоторых функций $\gamma_{41}, \gamma_{42}, \gamma_{43}$. Продолжая этот процесс, получаем $(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{m-1}) = (E_1, E_2, \dots, E_{m-1})T$, где

$$T = \begin{pmatrix} 1 & & & & * \\ & k_1 & & & \\ & & k_1k_2 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & k_1k_2\cdots k_{m-2} \end{pmatrix}.$$

Так как все k_i при $i = 1, \dots, m-2$ положительны, система $(\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \dots, \alpha^{m-1})$ порождает тот же орфлаг, что и система $(E_1, E_2, \dots, E_{m-1})$. Поэтому последняя совпадает с системой первых $m-1$ векторов базиса Френе кривой α. Так как $\det(X(0)) = 1$ и $\det(X(s))$ — непрерывная функция, имеем $\det(X(s)) \equiv 1$. Следовательно, базис $(E_1, E_2, \dots, E_m)$ положительно ориентирован и совпадает с базисом Френе для $\alpha(s)$. Из (7) заключаем, что $k_1, k_2, \dots, k_{m-1}$ — кривизны $\alpha(s)$.$\Uparrow$

Восстановление параметризации кривой по натуральным уравнениям

Найти параметризацию кривой с натуральными уравнениями $k = a$, $\kappa = b$, где $a > 0$, $b \neq 0$ – постоянные.

Пусть $X = [E_1, E_2, E_3]$ – матрица из векторов базиса Френе искомой кривой. Тогда $\dot{X} = X \cdot \omega$, где $\omega = \begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ -a & 0 & b \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix}$ – матрица кривизн.

Транспонируя обе части, получаем ${}^t\dot{X} = {}^t(X \cdot \omega) = {}^t\omega \cdot {}^tX$, или ${}^t\dot{X} = {}^t\omega \cdot {}^tX$. Пусть $(x(t), y(t), z(t))$ – строка матрицы X. Тогда в матрице ${}^tX$ это будет столбец и для него справедливо равенство

$$\begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \\ \dot{z}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & -b \\ 0 & b & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}.$$

Это равенство является однородной системой линейных дифференциальных уравнений (с.д.у) с постоянными коэффициентами.

Чтобы решить эту систему, возьмем (постоянный) собственный вектор-столбец v матрицы ${}^t\omega$, относящийся к ее собственому значению λ. Тогда ${}^t\omega \cdot v = \lambda v$ и столбец $u = e^{\lambda t} v$ будет частным решением нашей с.д.у. В самом деле, $\dot{u} = \lambda e^{\lambda t} v$ и ${}^t\omega \cdot e^{\lambda t} v = e^{\lambda t}({}^t\omega \cdot v) = \lambda e^{\lambda t} v$.

Любое частное решение такой с.д.у. является линейной комбинацией трех фиксированных линейно независимых частных решений.
Найдем собственные значения матрицы ${}^t\omega$. Запишем для нее характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} -\lambda & a & 0 \\ -a & -\lambda & b \\ 0 & -b & -\lambda \end{vmatrix} = 0$. Тогда $-\lambda^3 - \lambda(a^2+b^2) = 0$. Собственные значения: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_{2,3} = \pm ic$, где $c = \sqrt{a^2+b^2}$.
Находим собственный вектор для λ_1:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & 0 & -b \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -a & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a & 0 & -b \\ \frac{b}{a} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

$v_1 = {}^t(b, 0, a)$.
Находим собственные векторы для $\lambda_{2,3}$. Они содержатся в $\mathcal{L}({}^t(0, -a, 0), {}^t(a, 0, -b))$. Находим образы порождающих векторов при действии ${}^t\omega + ci\mathbb{I}_3$:

$$\begin{pmatrix} 0 & -a & 0 \\ a & 0 & -b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} ci & -a & 0 \\ a & ci & -b \\ 0 & b & ci \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a^2 & -aci & ab \\ aci & -c^2 & -bci \end{pmatrix}.$$

Теперь находим собственный вектор для $\lambda_3 = -ci$:
$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -a & 0 & -a^2 & -aci & ab \\ a & 0 & -b & aci & -c^2 & -bci \end{array}\right) \to$ (умножаем 1-ю строку на $\frac{ci}{a}$ и прибавляем к 2-й) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -a & 0 & -a^2 & -aci & ab \\ a & -ci & -b & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$; $v_3 = {}^t(a, -ci, -b)$.
Наконец, $v_2 = {}^t(-a, -ci, b)$.
С.д.у. имеет постоянное решение $v_1 = {}^t(b, 0, a)$ и два линейно независимых решения, а именно, действительную и мнимую часть функции
$e^{-cit}\ {}^t(a, -ci, -b)$. Вычисляем, вспоминая, что
$e^{-cit} = \cos(-ct) + i\sin(-ct) = \cos(ct) - i\sin(ct)$:
$e^{-cit}\ {}^t(a, -ci, -b) = (\cos(ct) - i\sin(ct))^t(a, -ci, -b) =$
${}^t(a\cos(ct) - ia\sin(ct), -c\sin(ct) - ic\cos(ct), -b\cos(ct) + ib\sin(ct) =$
${}^t(a\cos(ct), -c\sin(ct), -b\cos(ct)) + i^t(-a\sin(ct) - c\cos(ct) + b\sin(ct))$.
Положим $u(t) =^t (-a\sin(ct) - c\cos(ct) + b\sin(ct))$,
$w(t) =^t (a\cos(ct), -c\sin(ct), -b\cos(ct))$. Так как $c^2 = a^2 + b^2$, легко видеть, что $|u(t)| = |v(t)| = |v_1| = c$. Нормируем эти решения и составим из них

матрицу ${}^tX = \begin{pmatrix} -\frac{a}{c}\sin(ct) & \frac{a}{c}\cos(ct) & \frac{b}{c} \\ -\cos(ct) & -\sin(ct) & 0 \\ \frac{b}{c}\sin(ct) & -\frac{b}{c}\cos(ct) & \frac{a}{c} \end{pmatrix}$. Непосредственно проверяется, что матрица ${}^tX$ ортогональна.

Следовательно, вектор $E_1(t) = {}^t\left(-\frac{a}{c}\sin(ct), \frac{a}{c}\cos(ct), \frac{b}{c}\right)$ находится в первой строке матрицы ${}^tX$.
Интегрированием находим
$\alpha(t) = \int_0^t E_1(\tau)d\tau = {}^t\left(-\int_0^t \frac{a}{c}\sin(c\tau)d\tau, \int_0^t \frac{a}{c}\cos(c\tau)d\tau, \int_0^t \frac{b}{c}d\tau\right) =$
${}^t\left(\frac{a}{c^2}\cos(ct) - \frac{a}{c^2}, \frac{a}{c^2}\sin(ct), \frac{b}{c}t\right)$. Таким образом, $\alpha(t)$ – винтовая линия.

Следствие из доказательства основной теоремы

Следствие

Пусть $\alpha(s)$ — кривая единичной скорости, $k_1, k_2, \ldots, k_{m-1}$ — ее кривизны. Тогда $\det([\dot\alpha, \ddot\alpha, \ldots, \alpha^{(m)}]) = k_1^{m-1} k_2^{m-2} \cdots k_{m-1}$.

$\Downarrow$В доказательстве теоремы сл.23 было установлено, что $\alpha^{(\ell)} = k_1 \cdots k_{\ell-1} E_\ell + \gamma_{\ell 1} E_1 + \ldots + \gamma_{\ell,\ell-1} E_{\ell-1}$. С помощью свойств определителей получаем
$\det([\dot\alpha, \ddot\alpha, \ldots, \alpha^{(m)}]) = \det([E_1, k_1 E_2, \ldots, k_1 \cdots k_{m-1} E_m]) =$
$k_1^{m-1} k_2^{m-2} \cdots k_{m-1} \det([E_1, E_2, \ldots, E_m])$.$\Uparrow$
Если α — кривая общего вида, то
$\alpha^{(\ell)} = |\dot\alpha|^\ell k_1 \cdots k_{\ell-1} E_\ell + \delta_{\ell 1} E_1 + \ldots + \delta_{\ell,\ell-1} E_{\ell-1}$. Следовательно,

$$\det([\dot\alpha, \ddot\alpha, \ldots, \alpha^{(m)}]) = |\dot\alpha|^{\frac{m(m+1)}{2}} k_1^{m-1} k_2^{m-2} \cdots k_{m-1}. \tag{8}$$

Теорема

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — кривая общего вида. Тогда следующие условия эквивалентны:
(1) образ α лежит в некоторой гиперплоскости;
(2) $\det[\dot\alpha, \ddot\alpha, \dots, \alpha^{(m)}] \equiv 0$;
(3) $k_{m-1} \equiv 0$.

$\Downarrow$Докажем, что из (1) следует (2). Пусть $\langle q - p_0, n\rangle = 0$ — уравнение гиперплоскости, содержащей образ кривой α. В качестве p_0 может быть взята любая точка гиперплоскости. Пусть $p_0 = \alpha(t_0)$ для некоторого $t_0 \in I$. Имеем $\langle \alpha(t) - \alpha(t_0), n\rangle \equiv 0$. Дифференцируем это равенство: $\langle \dot\alpha, n\rangle \equiv 0$, $\langle \ddot\alpha, n\rangle \equiv 0$, $\dots$, $\langle \alpha^{(m)}, n\rangle \equiv 0$. Следовательно, $\dot\alpha, \ddot\alpha, \dots, \alpha^{(m)} \in n^\perp$. Так как $\dim n^\perp = m - 1$, векторы $\dot\alpha, \ddot\alpha, \dots, \alpha^{(m)}$ линейно зависимы и потому $\det([\dot\alpha, \ddot\alpha, \dots, \alpha^{(m)}]) \equiv 0$.
Из (2) следует (3) в силу равенства (8) и условия $k_1 > 0, \dots, k_{m-2} > 0$.
Докажем, что из (3) следует (1). Из последнего уравнения Френе $\dot E_m = -|\dot\alpha| k_{m-1} E_{m-1}$ в силу условия $k_{m-1} \equiv 0$ получаем $\dot E_m \equiv 0$, т.е. $E_m(t) = \mathrm{const}$. Имеем $\dot\alpha \parallel E_1$, поэтому $\langle \dot\alpha, E_m\rangle = 0$. Интегрируя, получаем $\langle \alpha(t) - \alpha(t_0), E_m\rangle = \mathrm{const}$. При $t = t_0$ скалярное произведение равно 0. Следовательно, образ кривой α лежит в гиперплоскости $\langle p - \alpha(t_0), E_m\rangle = 0$.$\Uparrow$

Когда кривая является плоской

Найти все функции $f(t)$ такие, что кривая $\alpha(t) =^t (a\cos t, a\sin t, f(t))$ является плоской.

Вычислим производные: $\dot\alpha(t) =^t (-a\sin t, a\cos t, \dot f(t))$, $\ddot\alpha(t) =^t (-a\cos t, -a\sin t, \ddot f(t))$, $\dddot\alpha(t) =^t (a\sin t, -a\cos t, \dddot f(t))$. Кривая $\alpha(t)$ является плоской тогда и только тогда, когда $\det[\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha] \equiv 0$. Запишем

$$\det[\dot\alpha, \ddot\alpha, \dddot\alpha] = \begin{vmatrix} -a\sin t & -a\cos t & a\sin t \\ a\cos t & -a\sin t & -a\cos t \\ \dot f(t) & \ddot f(t) & \dddot f(t) \end{vmatrix} =$$

$$a^2 \begin{vmatrix} -\sin t & -\cos t & \sin t \\ \cos t & -\sin t & -\cos t \\ \dot f(t) & \ddot f(t) & \dddot f(t) \end{vmatrix} = a^2(\dot f(t) + \dddot f(t)).$$ Следовательно, $\dot f(t) + \dddot f(t) \equiv 0$. Решаем дифференциальное уравнение. Положим $u(t) = \dot f(t)$. Тогда $u + \ddot u = 0$. Два линейно независимых решения: $u_1 = \cos t$, $u_2 = \sin t$. Общий вид функции $f(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + C_3$.