Глава I. Кривые
§ 3. Плоские кривые

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Дифференциальная геометрия и топология
для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
III семестр

Определение

Линией на плоскости (*гладкой жордановой линией*) называется образ $\alpha(I)$ некоторой гладкой кривой $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$.

Условие гладкости кривой нельзя заменить непрерывностью (см. п.11 [1]). График дифференцируемой функции $y = f(x)$ является линией, так как множество точек $\Gamma = \{(x, y)|y = f(x)\}$ является образом кривой $\alpha(t) = {}^t(t, f(t))$. Эта кривая всегда регулярна, поскольку функция $f(x)$ дифференцируема на области определения и $\dot{\alpha} = {}^t(1, f'(t)) \neq \vec{0}$. Геометрический образ уравнения $F(x, y) = 0$ является линией при выполнении следующего условия. Пусть $F(x, y)$ — гладкая функция.

Определение

Вектор $\operatorname{grad} F(x_0, y_0) = {}^t(F_x(x_0, y_0), F_y(x_0, y_0))$, где $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$, называется *градиентом* функции $F(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

В силу теоремы о неявной функции, чтобы уравнение $F(x, y) = 0$ задавало линию на плоскости, достаточно, чтобы в точках множества $M = F^{-1}(0)$ (геометрического образа) градиент функции F был отличен от нуля.

В зависимости от способа задания линии на плоскости систематизируем виды уравнений касательной.

1. Линия — образ $\alpha(I)$ гладкой регулярной кривой $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, заданной явной параметризацией $\alpha(t) = {}^t(x(t), y(t))$. Тогда $\dot{\alpha}(t) = {}^t(\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ — направляющий вектор касательной и уравнение касательной в момент t_0: $p(u) = \alpha(t_0) + u\dot{\alpha}(t_0)$ или $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} \dot{x}(t_0) \\ \dot{y}(t_0) \end{pmatrix}$.

2. Линия — график гладкой функции $y = f(x)$, т.е. образ кривой $\alpha(t) = (t, f(t))$. Тогда $\dot{\alpha}(t_0) = {}^t(1, f'(t_0))$ — направляющий вектор касательной и уравнение касательной в момент t_0: $x = x_0 + u$, $y = y_0 + uf'(x_0)$, откуда получаем известное уравнение

$$y = y_0 + f'(x_0)(x - x_0).$$

Виды уравнений касательной 1

3. Линия — образ уравнения $F(x,y)=0$, где $F(x,y)$ — гладкая функция, градиент функции которой в точках множества $F^{-1}(0)$ отличен от нуля. Пусть точка $p_0(x_0,y_0)\in F^{-1}(0)$. Тогда, по теореме о неявной функции, в некоторой окрестности точки p_0 линия является образом некоторой кривой $\alpha(t)=(x(t),y(t))$, причем $\alpha(t_0)=p_0$. В рассматриваемой окрестности $\alpha(t)\in F^{-1}(0)$, т.е. для любого t справедливо $F(x(t),y(t))=0$. Дифференцируем тождество по t: $F_x\dot{x}+F_y\dot{y}\equiv 0$. Следовательно, скалярное произведение $\langle \operatorname{grad} F(\alpha(t)),\dot{\alpha}(t)\rangle\equiv 0$. Градиент в любой момент t перпендикулярен касательной и направлен по нормали к кривой. Вспомнив формулы из аналитической геометрии, записываем уравнение касательной

$$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

и нормали

$$-F_y(x_0,y_0)(x-x_0)+F_x(x_0,y_0)(y-y_0)=0.$$

Характеризации окружности и сферы

Доказать, что если все нормали плоской линии проходят через фиксированную точку, то эта линия есть окружность или ее часть. Обобщить эти утверждения для кривых в $\mathbb{R}^m$.

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ — кривая, $A(x_0, y_0)$ – фиксированная точка, через которую проходят все ее нормали. Нормаль в точке $\alpha(t)$ проходит через точку A и перпендикулярна касательной с направляющим вектором $\dot{\alpha}(t)$. Поэтому $\forall t \in I$ $\langle A - \alpha(t), \dot{\alpha}(t)\rangle = 0$, т.е. $\langle A - \alpha(t), \dot{\alpha}(t)\rangle \equiv 0$. Так как $(A - \alpha(t))^{\cdot} = -\dot{\alpha}(t)$, заключаем, что $\langle A - \alpha(t), -(A - \alpha(t))^{\cdot}\rangle \equiv 0$ и $\langle A - \alpha(t), (A - \alpha(t))^{\cdot}\rangle \equiv 0$. Поскольку $(A - \alpha(t))^2 = \langle A - \alpha(t), A - \alpha(t)\rangle$, имеем $((A - \alpha(t))^2)^{\cdot} = \langle A - \alpha(t), A - \alpha(t)\rangle^{\cdot} = 2\langle A - \alpha(t), (A - \alpha(t)^{\cdot}\rangle \equiv 0$ и $(A - \alpha(t))^2 = \mathrm{const}$. Следовательно, $|A - \alpha(t)| = \mathrm{const}$. Поэтому образ кривой $\alpha(t)$ лежит на окружности с центром в точке A.
Обобщение на $\mathbb{R}^m$. Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$. В точке $\alpha(t)$ нормальная гиперплоскость имеет уравнение $\langle p - \alpha(t), \dot{\alpha}(t)\rangle = 0$, где p – любая точка гиперплоскости. Если все нормальные гиперплоскости кривой $\alpha(t)$ проходят через фиксированную точку, то образ этой кривой расположен на сфере в пространстве $\mathbb{R}^m$. Уравнение такой сферы $|x - a| = r$. Доказательство проходит дословно.

Касание линий

Определение

Говорят, что две линии *касаются в некоторой точке*, если они имеют в этой точке общую касательную прямую.

Кривые $\alpha(t)$ и $\beta(\theta)$ касаются, если для некоторых значений параметров t_0, θ_0 выполнены два условия: 1) $\alpha(t_0) = \beta(\theta_0)$ ("кривые пересекаются") и 2) $\dot{\alpha}(t_0) \parallel \dot{\beta}(\theta_0)$ (касательные векторы в точке пересечения коллинеарны).

Приведем условие касания двух линий на плоскости в случае, когда одна из них задана как образ уравнения $F(x, y) = 0$, а другая — как образ некоторой кривой $\alpha(t)$.

Лемма (условие касания)

Кривые $\alpha(t)$ и $F(x, y) = 0$ касаются в точке $\alpha(t_0) = (x_0, y_0)$ тогда и только тогда, когда $F(\alpha(t_0)) = F(x_0, y_0) = 0$ и $\langle \operatorname{grad} F(x_0, y_0), \dot{\alpha}(t_0) \rangle = 0$.

Утверждение леммы непосредственно следует из результатов слайда 4.

Пусть имеются гладкая кривая $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, и кривая $F(x, y) = 0$. Рассмотрим вспомогательную функцию $f(t) = F(\alpha(t)) = F(x(t), y(t))$. Если $f(t_0) = 0$ при некотором $t_0 \in I$, то кривые пересекаются, так как точка $\alpha(t_0)$ лежит на кривой $F(x, y) = 0$. Если еще и $\dot{f}(t_0) = 0$, то кривые касаются, так как $\dot{f}(t_0) = F_x(\alpha(t_0))\dot{x}(t_0) + F_y(\alpha(t_0))\dot{y}(t_0)$, откуда $\operatorname{grad} F(\alpha(t_0)) \perp \dot{\alpha}(t_0)$ и кривые имеют коллинеарные касательные векторы в точке $\alpha(t_0)$.

Определение

Говорят, что кривая $\alpha(t)$ в момент t_0 имеет с линией $F(x, y) = 0$ *касание порядка* k, если для функции $f(t) = F(\alpha(t))$ выполнены условия:

$$
\begin{array}{rl}
0. & f(t_0) = 0. \\
1. & \dot{f}(t_0) = 0. \\
2. & \ddot{f}(t_0) = 0. \\
3. & \dddot{f}(t_0) = 0. \\
 & \vdots \\
k. & f^{(k)}(t_0) = 0. \\
k+1. & f^{(k+1)}(t_0) \neq 0.
\end{array}
$$

Это равносильно условию $f(t) = o((t - t_0)^k)$.

Соприкасающаяся окружность

Определения

Окружность, имеющая в некоторой точке $\alpha(t_0)$ с кривой $\alpha(t)$ порядок касания не ниже второго, называется *соприкасающейся*. Радиус соприкасающейся окружности называется *радиусом кривизны кривой* в точке касания $\alpha(t_0)$. Центр соприкасающейся окружности называется *центром кривизны кривой* в точке касания $\alpha(t_0)$.

В окрестности точки касания соприкасающаяся окружность очень "похожа"на саму кривую.

Порядок касания многочлена и графика функции

Найти многочлен $y = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ степени n, имеющий с линией $y = f(x)$ в точке $A(0, f(0))$ касание n-го порядка.

Положим $F(x,y) = f(x) - y$, $\alpha(t) = {}^t(t, a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n)$, $\varphi(t) = F(\alpha(t)) = f(t) - a_0 - a_1 t - \ldots - a_n t^n$. Запишем условия, обеспечивающие касание n-го порядка (сл.7).

$\varphi(0) = 0 \Longrightarrow a_0 = f(0);$

$\dot{\varphi}(0) = 0 \Longrightarrow a_1 = f'(0);$

$\ddot{\varphi}(0) = 0 \Longrightarrow a_2 = \dfrac{1}{2} f''(0); \ldots$

$\varphi^{(k)}(0) = 0 \Longrightarrow a_k = \dfrac{1}{k!} f^{(k)}(0); \ldots$

$\varphi^{(n)}(0) = 0 \Longrightarrow a_n = \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(0).$

Таким образом,

$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = f(0) + f'(0)x + \dfrac{1}{2} f''(0)x^2 + \ldots + \dfrac{1}{n!} f^{(n)}(0)x^n$ – многочлен Тейлора для функции $y = f(x)$ в точке 0.

Огибающая

Пусть на плоскости задано семейство линий $\mathcal{C}_t$, $t \in I$ (при каждом t одна линия).

Определение

Линия $\mathcal{L}$ называется *огибающей семейства* $\mathcal{C}_t$, если в каждой своей точке кривая $\mathcal{L}$ касается одной из линий $\mathcal{C}_t$.

Очевидно, всякая регулярная кривая является огибающей семейства своих касательных.

Пусть семейство $\mathcal{C}_t$ задается уравнением $F(x, y, t) = 0$, $\operatorname{grad} F \neq \vec{0}$.

Огибающая $\mathcal{L}$ имеет по одной общей точке с каждой кривой из $\mathcal{C}_t$. Пусть $\mathcal{L}$ — образ кривой $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Тогда $F(x(t), y(t), t) \equiv 0$.

Продифференцируем это тождество по t: $F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_t \equiv 0$. По условию касания $F_x\dot{x} + F_y\dot{y} = \langle \operatorname{grad} F, \dot{\alpha} \rangle \equiv 0$, отсюда $F_t \equiv 0$. Все точки огибающей удовлетворяют системе уравнений

$$F(x, y, t) = 0, \quad F_t(x, y, t) = 0. \tag{1}$$

Нахождение огибающей

Определение

Множество точек (x, y), удовлетворяющих системе (1), называется *дискриминантой* семейства $\mathcal{C}_t$.

Предложение

Если частные производные F_x, F_y ограничены в точках решения системы (1) и по крайней мере одна из них отлична от 0, то система (1) определяет только огибающую.

$\Downarrow$Предположим для определенности, что $F_y(x(t), y(t)) \neq 0$.
Дифференцируя по t первое уравнение системы (1), получаем $F_x\dot{x} + F_y\dot{y} + F_t = 0$. Из второго уравнения системы $F_t = 0$ получаем $\langle \operatorname{grad} F, \dot{\alpha} \rangle = 0$, т.е. $\operatorname{grad} F \perp \dot{\alpha}$ — условие касания.$\Uparrow$

Огибающая

Прямая вращается с постоянной угловой скоростью вокруг точки, равномерно движущейся по второй прямой. Найти огибающую этого семейства прямых.

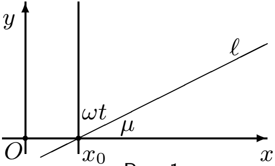

Рис. 1

Пусть начальное положение первой прямой – ось Oy; эта прямая вращается по часовой стрелке с угловой скоростью ω вокруг точки, движущейся по оси Ox в положительном направлении со скоростью v. Уравнение первой прямой в момент t: $y = k(x - x_0)$, $x_0 = vt$, $k = \operatorname{tg}\mu$, $\mu = \pi/2 - \omega t$. Семейство прямых $\mathcal{L}_t : y = (\operatorname{ctg}\omega t)(x - vt)$.
Функция $F(x, y, t) = (x - vt)\operatorname{ctg}\omega t - y$, а ее градиент $\operatorname{grad} F = (\operatorname{ctg}\omega t, -1) \neq \vec{0}$. Поэтому система уравнений $F(x, y, t) = 0$, $F(x, y, t)_t = 0$ дает только огибающую.

Окончание примера

Вычислим $F(x,y,t)_t = -v\operatorname{ctg}\omega t - \dfrac{\omega}{\sin^2\omega t}(x - vt)$. Из $F(x,y,t)_t = 0$ получаем $x - vt = -\dfrac{v}{\omega}\operatorname{ctg}\omega t\sin^2\omega t = -\dfrac{v}{\omega}\cos\omega t\sin\omega t = -\dfrac{v}{2\omega}\sin 2\omega t$.

Выразим x и y из системы $\begin{cases} (x - vt)\operatorname{ctg}\omega t - y = 0; \\ x - vt = -\dfrac{v}{2\omega}\sin 2\omega t. \end{cases}$ Имеем

$x = vt - \dfrac{v}{2\omega}\sin 2\omega t = \dfrac{v}{2\omega}(2\omega t - \sin 2\omega t)$;

$y = (x - vt)\operatorname{ctg}\omega t = -\dfrac{v}{\omega}\cos^2\omega t = -\dfrac{v}{2\omega}(1 + \cos 2\omega t) = -\dfrac{v}{\omega} + \dfrac{v}{2\omega}(1 - \cos 2\omega t)$.

Получилась циклоида $\begin{cases} x = \dfrac{v}{2\omega}(2\omega t - \sin 2\omega t); \\ y = -\dfrac{v}{\omega} + \dfrac{v}{2\omega}(1 - \cos 2\omega t), \end{cases}$ сдвинутая вниз на два радиуса $\dfrac{v}{2\omega}$.

Репер Френе регулярной плоской кривой

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ — произвольная регулярная кривая. От каждой точки кривой $\alpha(t)$ можно отложить два вектора — *единичный вектор касательной* $\vec{\tau}(t)$ и *единичный вектор нормали* $\vec{\nu}(t)$ к кривой $\alpha(t)$. Пара $(\vec{\tau}(t), \vec{\nu}(t))$ — это пара гладких функций из I в $\overrightarrow{\mathbb{R}}^2$.

Определение

Репер $(\alpha(t); \vec{\tau}(t), \vec{\nu}(t))$ называется *репером Френе* плоской регулярной кривой $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, если выполнены следующие 3 условия:

1. в любой момент $t \in I$ справедливо $|\vec{\tau}(t)| = |\vec{\nu}(t)| = 1$ и $\langle \vec{\tau}(t), \vec{\nu}(t) \rangle = 0$;
2. в любой момент $t \in I$ вектор $\vec{\tau}(t)$ сонаправлен с вектором скорости $\dot{\alpha}(t)$;
3. в любой момент $t \in I$ пара векторов $(\vec{\tau}(t), \vec{\nu}(t))$ имеет положительную ориентацию.

Репер Френе регулярной плоской кривой единичной скорости

Пусть $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ — параметризация кривой единичной скорости. Тогда $\vec{\tau}(s) = \dot{\alpha}(s)$, и $\vec{\tau}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$, $\vec{\nu}(s) = (-\dot{y}(s), \dot{x}(s))$ — параметризации векторов касательной и нормали. В самом деле, $|\vec{\tau}| \equiv |\vec{\nu}| \equiv 1$, $\vec{\tau} \perp \vec{\nu}$ и $\det([\vec{\tau}, \vec{\nu}]) = \begin{vmatrix} \dot{x}(s) & -\dot{y}(s) \\ \dot{y}(s) & \dot{x}(s) \end{vmatrix} = \dot{x}(s)^2 + \dot{y}(s)^2 \equiv 1 > 0$.

Теорема Френе-Серре

Пусть $\alpha(s) : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ — кривая единичной скорости. Тогда существует гладкая скалярная функция $k(s) : I \longrightarrow \mathbb{R}$ такая что в любой момент $s \in I$ выполнены следующие условия:

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(s) = \vec{\tau}(s), \\ \dot{\vec{\tau}}(s) = k(s) \cdot \vec{\nu}(s), \\ \dot{\vec{\nu}}(s) = -k(s) \cdot \vec{\tau}(s). \end{cases}$$

Приведенные условия называются *уравнениями Френе*, а функция $k(s)$ — *кривизной* кривой $\alpha(s)$.

$\Downarrow$Из $|\vec{\tau}| \equiv 1$ согласно факту сл.10 т.1 следует $\vec{\tau} \perp \dot{\vec{\tau}}$. Значит, $\dot{\vec{\tau}} \| \vec{\nu}$ и существует скалярная функция $k(s)$ такая, что $\dot{\vec{\tau}}(s) = k(s)\vec{\nu}(s)$. Умножим это равенство скалярно на $\vec{\nu}(s)$: $\langle \dot{\vec{\tau}}(s), \vec{\nu}(s) \rangle = k(s) \langle \vec{\nu}(s), \vec{\nu}(s) \rangle = k(s)$. Таким образом, $k(s)$ — гладкая функция, как скалярное произведение гладких функций.
Из $|\vec{\nu}| \equiv 1$ следует $\vec{\nu} \perp \dot{\vec{\nu}}$ и существует скалярная функция $m(s)$ такая что $\dot{\vec{\nu}}(s) = m(s)\vec{\tau}(s)$. Дифференцируя тождество $\langle \vec{\tau}, \vec{\nu} \rangle \equiv 0$, получаем $\langle \dot{\vec{\tau}}, \vec{\nu} \rangle + \langle \vec{\tau}, \dot{\vec{\nu}} \rangle \equiv 0$. Подставив в последнее тождество выражения для $\dot{\vec{\tau}}(s)$ и $\dot{\vec{\nu}}(s)$, получаем $\langle k(s)\vec{\nu}, \vec{\nu} \rangle + \langle \vec{\tau}, m(s)\vec{\tau} \rangle \equiv 0$, далее $k(s)\langle \vec{\nu}, \vec{\nu} \rangle + m(s)\langle \vec{\tau}, \vec{\tau} \rangle \equiv 0$ и, так как $\langle \vec{\tau}, \vec{\tau} \rangle \equiv \langle \vec{\nu}, \vec{\nu} \rangle \equiv 1$, имеем $k(s) + m(s) \equiv 0$, т.е. $m(s) \equiv -k(s)$.$\Uparrow$

1. Легко запомнить уравнения Френе в матричной форме:
$[\dot{\vec{\tau}}, \dot{\vec{\nu}}] = [\vec{\tau}, \vec{\nu}] \cdot \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}$. Матрица $\omega = \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}$, связывающая совокупности векторов $[\dot{\vec{\tau}}, \dot{\vec{\nu}}]$ и $[\vec{\tau}, \vec{\nu}]$, является кососимметрической.

2. С точки зрения линейной алгебры уравнения Френе есть разложения скоростей (т.е. производных) базисных векторов по базису Френе.

3. Так как $\dot{\vec{\tau}}(s) = k(s) \cdot \vec{\nu}(s)$, $|\dot{\vec{\tau}}(s)| = |k(s)|$. Поскольку $|\vec{\tau}| \equiv 1$, производная $\dot{\vec{\tau}}$ есть *скорость поворота* вектора касательной вокруг точки касания. Таким образом, кривизну можно представлять себе как *величину скорости*

Чем больше кривизна, тем более изогнута линия в окрестности рассматриваемой точки.

Теорема (характеризация прямой и окружности)

Пусть $\alpha(s) : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ — кривая единичной скорости, $k(s)$ — ее кривизна, $M = \alpha(I)$ — образ кривой $\alpha(s)$ на плоскости $\mathbb{R}^2$. Тогда:
1) $k \equiv 0 \Longleftrightarrow M$ — прямая или ее часть,
2) $k \equiv \mathrm{const} \neq 0 \Longleftrightarrow M$ — окружность радиуса $R = \frac{1}{|k|}$ или ее часть.

$\Downarrow$1. Имеем $\ddot{\alpha} = \dot{\vec{\tau}} = k\vec{\nu}$, поэтому $k \equiv 0 \Longleftrightarrow \ddot{\alpha} \equiv \vec{0}$ (т.к. $\vec{\nu} \neq \vec{0}$).
Пусть $\ddot{\alpha} \equiv \vec{0}$. Интегрируя это тождество, получаем $\dot{\alpha}(s) - \dot{\alpha}(s_0) \equiv \vec{0}$. Еще раз интегрируем: $\displaystyle\int_{s_0}^{s} \dot{\alpha}(s_0)d\sigma = \dot{\alpha}(s_0)(s - s_0)$,
$\displaystyle\int_{s_0}^{s} \dot{\alpha}(s_0)d\sigma = \int_{s_0}^{s} \dot{\alpha}(\sigma)d\sigma = \alpha(s) - \alpha(s_0)$. Таким образом,
$\alpha(s) - \alpha(s_0) = \dot{\alpha}(s_0)(s - s_0)$, т.е. $\alpha(s) = \alpha(s_0) + \dot{\alpha}(s_0)(s - s_0)$ — прямая с начальной точкой $\alpha(s_0)$ и направляющим вектором $\dot{\alpha}(s_0)$.
Обратное утверждение очевидно: если $\alpha(s) = \alpha(s_0) + \dot{\alpha}(s_0)(s - s_0)$ — прямая, то $\ddot{\alpha} \equiv \vec{0}$, откуда $k \equiv 0$.

2. Возьмем кривую $\alpha(s)$, у которой $k \equiv \mathrm{const} \neq 0$. Положим

$$p(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k}\vec{\nu}(s).$$

Вычислим производную $\dot{p}(s)$, используя формулы Френе:
$\dot{p}(s) = \vec{\tau}(s) + \frac{1}{k}\dot{\vec{\nu}}(s) = \vec{\tau}(s) + \frac{1}{k}(-k\vec{\tau}(s)) \equiv 0$. Следовательно, $p(s) = p_0$ — постоянная точка. Имеем $\alpha(s) - p_0 = \frac{1}{k}\vec{\nu}(s)$. Значит,
$|\alpha(s) - p_0| = \left|\frac{1}{k}\vec{\nu}(s)\right| = \left|\frac{1}{k}\right|$, так как $|\vec{\nu}| \equiv 1$. Таким образом, множество M расположено на окружности радиуса $\left|\frac{1}{k}\right|$ с центром в точке p_0.

Обратно, пусть $\alpha(s) = p_0 + R\vec{\nu}(s)$ — окружность радиуса R. Тогда $\ddot{\alpha}(s) = R\ddot{\vec{\nu}}(s) = R(-k\vec{\tau})^{\cdot} = -R\dot{k}\vec{\tau} - Rk^2\vec{\nu}$. Вспоминая, что $\ddot{\alpha} = \dot{\vec{\tau}} = k\vec{\nu}$ (см. начало доказательства), получаем $\dot{k} \equiv 0$ и $k = -Rk^2$, откуда $R = \left|\frac{1}{k}\right|$.⇑

Предложение

Радиус кривизны плоской кривой $\alpha(s)$ единичной скорости в произвольной точке s_0 равен $|\frac{1}{k(s_0)}|$.

$\Downarrow$Запишем уравнение соприкасающейся окружности радиуса R с центром в точке p: $\langle z-p, z-p\rangle = R^2$, где z — текущая точка. Окружность является образом уравнения $F(z) = \langle z-p, z-p\rangle - R^2 = 0$. Вспомогательная функция $f(s) = F(\alpha(s)) = \langle \alpha(s)-p, \alpha(s)-p\rangle - R^2$. Соприкасающаяся окружность имеет порядок касания не ниже второго, т.е. должны выполняться условия $f(s_0)=0$, $f'(s_0)=0$, $f''(s_0)=0$, откуда можно будет определить R и p.
Из $f(s_0)=0$ получаем $\langle \alpha(s_0)-p, \alpha(s_0)-p\rangle - R^2 = 0$, т.е. точка $\alpha(s_0)$ лежит на соприкасающейся окружности. Найдем производную $f'(s) = \langle \dot{\alpha}(s), \alpha(s)-p\rangle + \langle \alpha(s)-p, \dot{\alpha}(s)\rangle = 2\langle \vec{\tau}(s), \alpha(s)-p\rangle$. Из $f'(s_0)=0$ следует $\langle \vec{\tau}(s_0), \alpha(s_0)-p\rangle = 0$, т.е. радиус, проведенный в точку касания, перпендикулярен касательной: $\alpha(s_0)-p = \lambda\vec{\nu}$ и $R=|\lambda|$.
Найдем вторую производную $f''(s_0) = (2\langle \vec{\tau}(s), \alpha(s)-p\rangle)' = 2\langle \dot{\vec{\tau}}(s), \alpha(s)-p\rangle + 2\langle \vec{\tau}(s), \vec{\tau}(s)\rangle = 2\langle k(s)\vec{\nu}, \alpha(s)-p\rangle + 2$. Из $f''(s_0)=0$ следует $2\langle k(s_0)\vec{\nu}, \alpha(s_0)-p\rangle + 2 = 0$, т.е. $\langle k(s_0)\vec{\nu}, \alpha(s_0)-p\rangle = -1$. Таким образом, $k(s_0)\langle \vec{\nu}, \lambda\vec{\nu}\rangle = -1$ и $k(s_0)\lambda = -1$. Следовательно, $R = |\frac{1}{k(s_0)}|$. $\Uparrow$

Центр и радиус кривизны плоской кривой единичной скорости

Из равенств $\alpha(s_0) - p = \lambda\vec{\nu}$ и $k(s_0)\lambda = -1$ предыдущего слайда получаем $p = \alpha(s_0) + \dfrac{1}{k(s_0)}\vec{\nu}$ — центр кривизны кривой $\alpha(s)$ в точке s_0.

Формулы для центра и радиуса кривизны

Для плоской кривой $\alpha(s)$ единичной скорости в произвольной точке s_0 центр кривизны находится в точке $p = \alpha(s_0) + \dfrac{1}{k(s_0)}\vec{\nu}$, радиус кривизны равен $R = \left|\dfrac{1}{k(s_0)}\right|$.

Плоская натурально параметризованная кривая полностью определяется некоторой начальной точкой, направлением движения из этой точки и своей функцией кривизны.
Пусть $\alpha(s) : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ — кривая единичной скорости. Зафиксируем момент $s_0 \in I$: $\alpha(s_0) = (x(s_0), y(s_0)) = (x_0, y_0)$ —это начальная точка на кривой; угол θ_0 — это угол между базисным вектором $\vec{e}_1$ (на оси Ox) и вектором касательной $\vec{\tau}_0 = \vec{\tau}(s_0)$ — начальный угол.

Утверждение

По функции кривизны $k(s)$ и начальным условиям $(x_0, y_0); \theta_0$ кривая единичной скорости $\alpha(s)$ в окрестности момента s_0 восстанавливается однозначно.

Предположим, что кривая $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ существует и $\vec{\tau}(s) =$ $= (\dot{x}(s), \dot{y}(s))$ — ее (неизвестный) касательный вектор. Тогда его можно представить как $\vec{\tau}(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$ для некоторой функции $\theta(s)$.
Имеем $\dot{\vec{\tau}}(s) = (-\dot{\theta}(s)\sin\theta(s), \dot{\theta}(s)\cos\theta(s)) = \dot{\theta}(s)(-\sin\theta(s), \cos\theta(s)) =$ $= \dot{\theta}(s)\vec{\nu}(s)$. Из уравнений Френе $\dot{\vec{\tau}}(s) = k(s)\vec{\nu}(s)$. Таким образом, $\dot{\theta}(s) = k(s)$. Используя начальные условия, находим $\theta(s) = \theta_0 + \displaystyle\int_{s_0}^{s} k(\sigma)d\sigma$.

Так как $\vec{\tau}(s) = (\dot{x}(s), \dot{y}(s)) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s))$, получаем $x(s) = x_0 + \int_{s_0}^{s} \cos\theta(\sigma)d\sigma$, $y(s) = y_0 + \int_{s_0}^{s} \sin\theta(\sigma)d\sigma$.

Определение

Уравнение $k = k(s)$ или равносильные ему уравнения $k = k(t)$, $s = s(t)$ называются *натуральными уравнениями* кривой $\alpha(s)$.

Параметризация кривой по натуральным уравнениям

$$\theta(s) = \theta_0 + \int_{s_0}^{s} k(\sigma)d\sigma;$$

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^{s} \cos\theta(\sigma)d\sigma;$$

$$y(s) = y_0 + \int_{s_0}^{s} \sin\theta(\sigma)d\sigma.$$

Восстановление кривой по натуральным уравнениям

Какая кривая задается натуральным уравнением $\dfrac{1}{k} = as$ $(a > 0)$?

Имеем $k = \dfrac{1}{as}$; $\theta(s) = \displaystyle\int_1^s \frac{d\sigma}{a\sigma} = \frac{1}{a}\ln s$; $x(s) = \displaystyle\int_1^s \cos\left(\frac{\ln\sigma}{a}\right) d\sigma =$
$\left| u = \cos\dfrac{\ln\sigma}{a}, dv = d\sigma, du = -\dfrac{d\sigma}{a\sigma}\sin\dfrac{\ln\sigma}{a}, v = \sigma \right| =$
$\sigma\cos\dfrac{\ln\sigma}{a}\Bigg|_1^s + \displaystyle\int_1^s \frac{d\sigma}{a\sigma}\sin\left(\frac{\ln\sigma}{a}\right)\sigma = s\cos\frac{\ln s}{a} + \frac{1}{a}\int_1^s \sin\left(\frac{\ln\sigma}{a}\right) d\sigma.$
Аналогично $\displaystyle\int_1^s \sin\left(\frac{\ln\sigma}{a}\right) d\sigma = s\sin\frac{\ln s}{a} - \frac{1}{a}\int_1^s \cos\left(\frac{\ln\sigma}{a}\right) d\sigma$. Следовательно, $\displaystyle\int_1^s \cos\left(\frac{\ln\sigma}{a}\right) d\sigma = s\cos\frac{\ln s}{a} + \frac{1}{a}\left(s\sin\frac{\ln s}{a} - \frac{1}{a}\int_1^s \cos\frac{\ln\sigma}{a} d\sigma\right) =$
$s\cos\dfrac{\ln s}{a} + \dfrac{s}{a}\sin\dfrac{\ln s}{a} - \dfrac{1}{a^2}\displaystyle\int_1^s \cos\left(\frac{\ln\sigma}{a}\right) d\sigma$, откуда
$\left(1 + \dfrac{1}{a^2}\right)\displaystyle\int_1^s \cos\left(\frac{\ln\sigma}{a}\right) d\sigma = s\cos\frac{\ln s}{a} + \frac{s}{a}\sin\frac{\ln s}{a}.$
Таким образом, $\displaystyle\int_1^s \cos\left(\frac{\ln\sigma}{a}\right) d\sigma = \frac{as}{1+a^2}\left(a\cos\frac{\ln s}{a} + \sin\frac{\ln s}{a}\right).$

Аналогично $\displaystyle\int_1^s \sin\left(\frac{\ln\sigma}{a}\right) d\sigma = \frac{as}{1+a^2}\left(a\sin\frac{\ln s}{a} + \cos\frac{\ln s}{a}\right)$.
Итак, параметризация данной кривой имеет вид

$$x(s) = \frac{as}{1+a^2}\left(a\cos\frac{\ln s}{a} + \sin\frac{\ln s}{a}\right), y(s) = \frac{as}{1+a^2}\left(a\sin\frac{\ln s}{a} + \cos\frac{\ln s}{a}\right).$$

Пусть $\alpha(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ — регулярная кривая. Ее единичный вектор касательной получается нормированием вектора скорости:
$\vec{\tau}(t) = \frac{1}{|\dot{\alpha}(t)|}\dot{\alpha}(t)$. Пусть $\alpha(t) = (x(t), y(t))$. Тогда $\vec{\tau}(t) = \dfrac{(\dot{x}(t), \dot{y}(t))}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}$.
Следовательно, единичный вектор нормали $\vec{\nu}(t) = \dfrac{(-\dot{y}(t), \dot{x}(t))}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}$.
Чтобы найти кривизну, запишем $\alpha(t) = \beta(s(t))$, где $\beta(s)$ — кривая единичной скорости. Так как $s(t) = \int_{t_0}^{t} |\dot{\alpha}(t)|dt$, имеем $\dot{s}(t) = \frac{ds}{dt} = |\dot{\alpha}(t)|$.
Вычислим производные: $\dot{\alpha}(t) = \beta'(s(t))\dot{s}(t) = \dot{\beta}(s)|\dot{\alpha}(t)| = \vec{\tau}(s(t))|\dot{\alpha}(t)|$,
$\ddot{\alpha}(t) = \dfrac{d|\dot{\alpha}(t)|}{dt}\vec{\tau} + |\dot{\alpha}(t)|\vec{\tau}'(s(t))\dot{s}(t) = \dfrac{d|\dot{\alpha}|(t)}{dt}\vec{\tau} + |\dot{\alpha}(t)|^2 k(s(t))\vec{\nu}$.
Вычислим определитель $\det[\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)] = \det[|\dot{\alpha}|\vec{\tau}, |\dot{\alpha}|^{\cdot}\vec{\tau} + |\dot{\alpha}|^2 k(t)\vec{\nu}] = \det[|\dot{\alpha}|\vec{\tau}, |\dot{\alpha}|^2 k(t)\vec{\nu}] = |\dot{\alpha}|^3 k(t)\det[\vec{\tau}, \vec{\nu}] = |\dot{\alpha}|^3 k(t)$. Отсюда находим кривизну

$$k(t) = \frac{\det[\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)]}{|\dot{\alpha}(t)|^3}.$$

Кривизна в прямоугольной декартовой системе координат

$$k(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Пусть $\alpha(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ — регулярная кривая и $\beta(s)$ — положительно эквивалентная ей кривая единичной скорости, т.е. $\alpha(t) = \beta(s(t))$. Пусть нижний индекс у вектора репера Френе обозначает кривую, к которой этот вектор относится. Тогда в любой момент $t \in I$ $\vec{\tau}_\alpha(t) = \vec{\tau}_\beta(s(t))$, $\vec{\nu}_\alpha(t) = \vec{\nu}_\beta(s(t))$. Находим производные $\dot{\vec{\tau}}_\alpha(t) = \dot{\vec{\tau}}_\beta(s(t))\dot{s}(t)$, $\dot{\vec{\nu}}_\alpha(t) = \dot{\vec{\nu}}_\beta(s(t))\dot{s}(t)$. Так как $\dot{s}(t) = |\dot{\alpha}(t)|$, используя уравнения Френе для кривой единичной скорости (см. сл.11), получаем следующие

Уравнения Френе для произвольной регулярной плоской кривой

$$\begin{cases} \dot{\alpha}(t) = |\dot{\alpha}(t)|\vec{\tau}(t), \\ \dot{\vec{\tau}}(t) = |\dot{\alpha}(t)|k(t) \cdot \vec{\nu}(t), \\ \dot{\vec{\nu}}(t) = |\dot{\alpha}(t)|(-k(t)) \cdot \vec{\tau}(t). \end{cases}$$

Уравнения Френе в матричной форме:

$$[\dot{\vec{\tau}}, \dot{\vec{\nu}}] = |\dot{\alpha}|[\vec{\tau}, \vec{\nu}] \cdot \begin{pmatrix} 0 & -k \\ k & 0 \end{pmatrix}.$$

Репер Френе для циклоиды

Найти векторы репера Френе и кривизну циклоиды $\alpha(t) = {}^t(a(t - \sin t), a(1 - \cos t))$. Записать уравнения Френе.

Вычислим $\dot\alpha(t) = {}^t(a(1 - \cos t), a \sin t)$,

$|\dot\alpha(t)| = a\sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = a\sqrt{2(1 - \cos t)} = 2a \sin \dfrac{t}{2}$ $(0 < t < 2\pi)$.

Далее, $\vec\tau = \dfrac{\dot\alpha(t)}{|\dot\alpha(t)|} = {}^t\left(\dfrac{a(1 - \cos t)}{2a \sin \frac{t}{2}}, \dfrac{a \sin t}{2a \sin \frac{t}{2}}\right) = {}^t(\sin \dfrac{t}{2}, \cos \dfrac{t}{2})$ и

$\vec\nu = {}^t(-\cos \frac{t}{2}, \sin \frac{t}{2})$. Вычислим $\ddot\alpha(t) = {}^t(a \sin t, a \cos t)$ и

$$\det[\dot\alpha(t), \ddot\alpha(t)] = a^2 \begin{vmatrix} 1 - \cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = a^2(\cos t - 1) = -2a^2 \sin^2 \tfrac{t}{2}.$$

Значит, кривизна циклоиды

$$k(t) = \frac{\det[\dot\alpha(t), \ddot\alpha(t)]}{|\dot\alpha(t)|^3} = -\frac{2a^2 \sin^2 \frac{t}{2}}{(2a \sin \frac{t}{2})^3} = -\frac{1}{4a \sin \frac{t}{2}}.$$

Итак, $\vec{\tau} = {}^t(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2})$, $\vec{\nu} = {}^t(-\cos\frac{t}{2}, \sin\frac{t}{2})$, $k(t) = -\frac{1}{4a\sin\frac{t}{2}}$.

Запишем уравнения Френе. $\vec{\tau} = \frac{\dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|} = {}^t(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2})$ – очевидно.

$\dot{\vec{\tau}} = |\dot{\alpha}(t)|k(t)\vec{\nu}$. Проверяем: $\dot{\vec{\tau}} = \frac{1}{2}{}^t(\cos\frac{t}{2}, -\sin\frac{t}{2})$,

$|\dot{\alpha}(t)|k(t)\vec{\nu} = 2a\sin\frac{t}{2}(-\frac{1}{4a\sin\frac{t}{2}}){}^t(-\cos\frac{t}{2}, \sin\frac{t}{2}) = \frac{1}{2}{}^t(\cos\frac{t}{2}, -\sin\frac{t}{2})$ – выполняется.

$\dot{\vec{\nu}} = -|\dot{\alpha}(t)|k(t)\vec{\tau}$. Проверяем: $\dot{\vec{\nu}} = \frac{1}{2}{}^t(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2})$,

$-|\dot{\alpha}(t)|k(t)\vec{\tau} = -2a\sin\frac{t}{2}(-\frac{1}{4a\sin\frac{t}{2}}){}^t(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2}) = \frac{1}{2}{}^t(\sin\frac{t}{2}, \cos\frac{t}{2})$ – выполняется.

Эволюта

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ — регулярная кривая.

Определения

Эволютой кривой $\alpha(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ называется множество всех точек, которые являются центрами кривизны кривой $\alpha(t)$, т.е. множество центров всех ее соприкасающихся окружностей.
Кривая $\beta(t)$, образом которой является множество центров кривизны кривой $\alpha(t)$, также называется *эволютой*.

Уравнение эволюты

$$\beta(t) = \alpha(t) + \frac{1}{k(t)} \vec{\nu}(t).$$

Эволюта гладкой кривой, у которой кривизна не обращается в нуль, — гладкая кривая. Эволюта окружности — ее центр. Прямая не имеет эволюты.

Определение

Кривая $\alpha(t) : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ называется *бирегулярной*, если в любой момент $t \in I$ векторы $\dot{\alpha}(t)$ и $\ddot{\alpha}(t)$ неколлинеарны, т.е. $\det([\dot{\alpha}(t), \ddot{\alpha}(t)]) \neq 0$.

У бирегулярной кривой $k(t) \neq 0$ в любой момент $t \in I$, поэтому у нее всегда существует гладкая эволюта. Пусть $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ — параметризация бирегулярной кривой. Тогда параметризация ее эволюты получается с помощью формул $k(t) = \dfrac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{\frac{3}{2}}}$ и $\vec{\nu}(t) = \dfrac{(-\dot{y}(t), \dot{x}(t))}{\sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}}$ (сл. 19):

Параметризация эволюты бирегулярной кривой

$$\beta(t) = \left(x - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}\dot{y}, y + \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}\dot{x} \right).$$

Теорема

Пусть $\alpha(t)$ — бирегулярная кривая и $\dot{k}(t) \neq 0$ в любой момент $t \in I$. Тогда
1) кривая α имеет регулярную эволюту $\beta(t)$, которая является огибающей семейства нормалей кривой $\alpha(t)$ и
2) длина дуги эволюты равна разности длин касательных к ней в концевых точках (длина касательной — длина от точки касания эволюты до точки пересечения ее с кривой $\alpha(t)$).

$\Downarrow$Для доказательства утверждения 1), продифференцировав равенство $\beta(t) = \alpha(t) + \dfrac{1}{k(t)}\vec{\nu}(t)$, найдем $\dot{\beta}(t) = \dot{\alpha}(t) + \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{k(t)}\right)\vec{\nu}(t) + \dfrac{1}{k(t)}\dot{\vec{\nu}}(t) = \dot{\alpha}(t) - \dfrac{\dot{k}(t)}{k(t)^2}\vec{\nu}(t) - \dfrac{1}{k(t)}k(t)\dot{\alpha}(t) = -\dfrac{\dot{k}(t)}{k(t)^2}\vec{\nu}(t) \neq \vec{0}$. Мы видим, что эволюта регулярна и вектор скорости $\dot{\beta}(t)$ коллинеарен $\vec{\nu}(t)$. Таким образом, касательная к эволюте направлена по нормали к кривой α в момент t и потому эволюта является огибающей семейства нормалей α. Кроме того, касательная к эволюте пересекает кривую α в точке $\alpha(t)$. Длину касательной находим с помощью определения эволюты; она равна $\dfrac{1}{|k(t)|}$.

Для доказательства утверждения 2) заметим, что, так как $\dot{k}(t)$ не обращается в нуль на промежутке $[t_1, t_2]$, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{1}{k(t)}\right) = -\dfrac{\dot{k}(t)}{k^2(t)}$ сохраняет знак. При $\dot{k}(t) > 0$ имеем $\ell[\beta]|_{t_1}^{t_2} = \displaystyle\int_{t_1}^{t_2} |\dot{\beta}(t)|dt = \int_{t_1}^{t_2} |(\frac{1}{k(t)})^{\cdot}|dt =$
$\displaystyle\int_{t_1}^{t_2} (\frac{1}{k(t)})^{\cdot} dt = \frac{1}{k(t_2)} - \frac{1}{k(t_1)} = R(t_2) - R(t_1).$
При $\dot{k} < 0$ аналогично получаем $\ell[\beta]|_{t_1}^{t_2} = \dfrac{1}{k(t_1)} - \dfrac{1}{k(t_2)} = R(t_1) - R(t_2).\Uparrow$

Эволюта циклоиды

Доказать, что эволюта циклоиды – снова циклоида, изометричная данной.

Рассмотрим циклоиду $\alpha(t) = {}^t(a(t-\sin t), a(1-\cos t))$. Тогда $x(t) = a(t-\sin t)$, $y(t) = a(1-\cos t)$, $\dot{x}(t) = a(1-\cos t)$, $\dot{y}(t) = a\sin t$ и $\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2 = |\dot{\alpha}(t)|^2 = a^2((1-\cos t)^2+\sin^2 t) = a^2(2(1-\cos t)) = 4a^2\sin^2\dfrac{t}{2}$, $\ddot{\alpha}(t) = {}^t(a\sin t, a\cos t)$. Далее,

$$\det[\dot{\alpha}(t),\ddot{\alpha}(t)] = a^2\begin{vmatrix} 1-\cos t & \sin t \\ \sin t & \cos t \end{vmatrix} = a^2(\cos t - 1) = -2a^2\sin^2\tfrac{t}{2} \neq 0,$$

поэтому кривая бирегулярна. Имеем $\dfrac{\dot{x}(t)^2+\dot{y}(t)^2}{\det[\dot{\alpha}(t),\ddot{\alpha}(t)]} = -2$. Запишем параметризацию эволюты циклоиды:

$\tilde{x}(t) = x(t) + 2\dot{y}(t) = a(t-\sin t) + 2a\sin t = a(t+\sin t)$,

$\tilde{y}(t) = y(t) - 2\dot{x}(t) = a(1-\cos t) - 2a(1-\cos t) = -a(1-\cos t)$.

Сделаем замену $t = \theta - \pi$: $\tilde{x}(\theta) = a(\theta - \pi + \sin(\theta-\pi)) = a(\theta - \sin\theta) - a\pi$; $\tilde{y}(\theta) = -a(1-\cos(\theta-\pi)) = -a + a\cos(\pi-\theta) = a(1-\cos\theta) - 2a$. Эта циклоида получается из исходной сдвигом на вектор $\vec{a} = {}^t(-a\pi, -2a)$.

Определение

Кривая $\alpha(t)$ называется *эвольвентой* для кривой $\beta(t)$, если $\beta(t)$ — эволюта кривой $\alpha(t)$.

Покажем, как найти эвольвенту данной бирегулярной кривой β. Пусть $\beta : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ и $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ — эвольвента для β, т.е. β — эволюта для α. Имеем $\beta(t) = \alpha(t) + \dfrac{1}{k(t)}\vec{\nu}_\alpha(t)$. Так как $\vec{\nu}_\alpha(t) \parallel \vec{\tau}_\beta(t)$, получаем $\alpha(t) = \beta(t) + \lambda(t)\vec{\tau}_\beta(t)$. Дифференцируя последнее равенство, имеем $\dot{\alpha} = \dot{\beta} + \dot{\lambda}\vec{\tau}_\beta + \lambda\dot{\vec{\tau}}_\beta = |\dot{\beta}|\vec{\tau}_\beta + \dot{\lambda}\vec{\tau}_\beta + \lambda k_\beta|\dot{\beta}|\vec{\nu}_\beta = (|\dot{\beta}| + \dot{\lambda})\vec{\tau}_\beta + (\lambda k_\beta|\dot{\beta}|)\vec{\nu}_\beta$. Поскольку $\dot{\alpha} \perp \vec{\tau}_\beta$, умножая обе части равенства $\dot{\alpha} = (|\dot{\beta}| + \dot{\lambda})\vec{\tau}_\beta + (\lambda k_\beta|\dot{\beta}|)\vec{\nu}_\beta$ скалярно на $\vec{\tau}_\beta$, заключаем, что $|\dot{\beta}| + \dot{\lambda} = 0$. Отсюда $\dot{\lambda} = -|\dot{\beta}|$ и $\lambda(t) = C - \displaystyle\int_{t_0}^{t} |\dot{\beta}(\theta)|d\theta$. Записываем уравнение эвольвенты для кривой β:

$$\alpha(t) = \beta(t) + \left(C - \int_{t_0}^{t} |\dot{\beta}(\theta)|d\theta\right)\vec{\tau}_\beta(t).$$

Если β — кривая единичной скорости, то уравнение эвольвенты принимает вид $\alpha(s) = \beta(s) + (C - s)\vec{\tau}_\beta(s)$. Во всех уравнениях C — произвольная постоянная.

Механический образ эвольвенты

Факт

Если на дуге эволюты закрепить нерастяжимую нить и натянуть ее, то дуга эвольвенты описывается концом натянутой нити, сматываемой с эволюты.

Натянутая нить в каждый момент направлена вдоль касательной к эволюте.
Факт иллюстрируется рис.2 на следующем слайде.

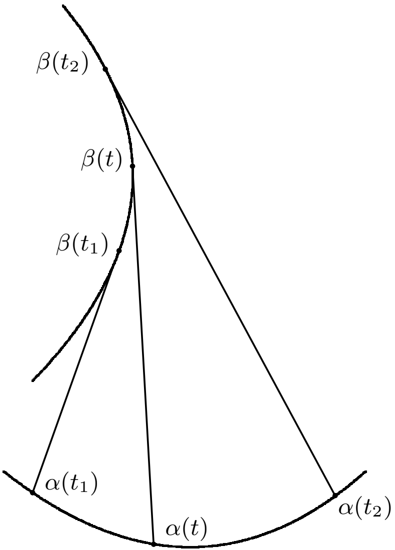

Рис. 2

Эвольвента параболы

Найти параметризацию эвольвенты параболы $\alpha(t) = {}^t(t, t^2/4)$, проходящей через ее вершину. Сделать чертеж.

Эвольвента имеет параметризацию $\beta(t) = \alpha(t) - \lambda(t)\vec{\tau}_\alpha(t)$, где $\lambda(t) = \int_0^t |\dot{\alpha}(\theta)|d\theta$. Вычисляем $\dot{\alpha}(t) = {}^t(1, t/2)$; $|\dot{\alpha}(t)| = \sqrt{1 + t^2/4}$;
$\vec{\tau}_\alpha(t) = \dfrac{\dot{\alpha}(t)}{|\dot{\alpha}(t)|} = {}^t\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+t^2/4}}, \dfrac{t}{\sqrt{4+t^2}}\right)$. Теперь находим
$\lambda(t) = \int_0^t \sqrt{1+\theta^2/4}d\theta = |u = \theta/2, d\theta = 2du| = 2\int_0^{t/2} \sqrt{1+u^2}du =$
$2(u\sqrt{1+u^2} + \ln|u + \sqrt{1+u^2}|)|_0^{t/2} = t\sqrt{1+t^2/4} + 2\ln|t/2 + \sqrt{1+t^2/4}|$.
Выписываем параметризацию эвольвенты:

$$x_\beta(t) = t - \frac{t\sqrt{1+t^2/4} + 2\ln|t/2+\sqrt{1+t^2/4}|}{\sqrt{1+t^2/4}} = -\frac{2\ln|t/2+\sqrt{1+t^2/4}|}{\sqrt{1+t^2/4}};$$

$$y_\beta(t) = t^2/4 - \frac{t^2\sqrt{1+t^2/4} + 2t\ln|t/2+\sqrt{1+t^2/4}|}{\sqrt{4+t^2}} =$$

$$-t^2/4 - \frac{2t\ln|t/2+\sqrt{1+t^2/4}|}{\sqrt{4+t^2}}.$$

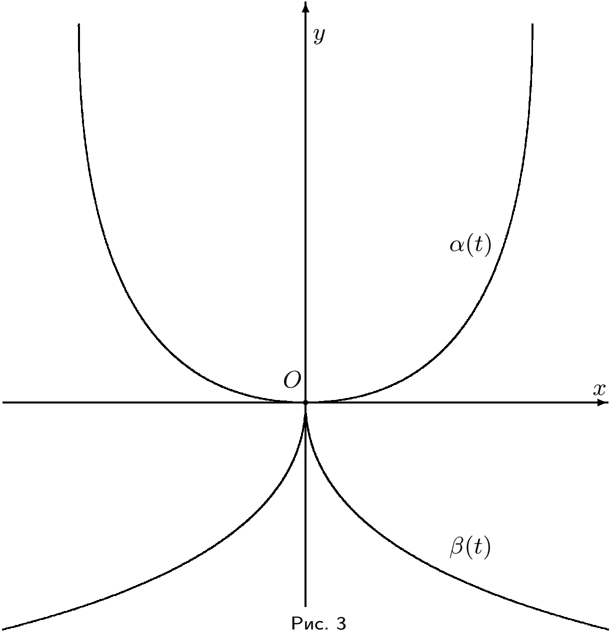

Рис. 3

Типы точек плоской кривой

Выясним, как ведет себя гладкая кривая $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ вблизи каждой своей точки.

Определения

Точка $t_0 \in I$ называется *особой точкой*, если $\dot{\alpha}(t_0) = \vec{0}$ (в особой точке происходит нарушение и регулярности, и бирегулярности);
t_0 называется *точкой распрямления*, если $\dot{\alpha}(t_0) \neq \vec{0}$, но $\dot{\alpha} \parallel \ddot{\alpha}$ (в точке распрямления происходит нарушение бирегулярности);
t_0 называется *бирегулярной точкой*, если $\dot{\alpha} \nparallel \ddot{\alpha}$ (в бирегулярной точке кривая имеет ненулевую кривизну).

Вектор касательной в особой точке

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ — гладкая кривая. Зафиксируем $t_0 \in I$. Проследим за вектором секущей $\alpha(t) - \alpha(t_0)$. Считаем, что предельное положение секущей, при $t \to t_0$, есть касательная к кривой в точке $\alpha(t_0)$. Запишем $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ по формуле Тейлора:

$$\alpha(t) - \alpha(t_0) = \dot{\alpha}\frac{t-t_0}{1!} + \ddot{\alpha}\frac{(t-t_0)^2}{2!} + \alpha^{(3)}\frac{(t-t_0)^3}{3!} + \ldots + \alpha^{(n)}\frac{(t-t_0)^n}{n!} + R, \quad (2)$$

где $\dot{\alpha}, \ddot{\alpha}, \ldots, \alpha^{(n)}$ — все производные от α в точке t_0, R — остаточный член. Обозначим через p порядок первой отличной от нуля в точке t_0 производной от α: $\alpha^{(p)}(t_0) \neq \vec{0}$, а через q порядок первой следующей за $\alpha^{(p)}$ производной такой что $\alpha^{(q)}(t_0) \nparallel \alpha^{(p)}(t_0)$. В этом случае говорим, что *t_0 — точка типа (p, q)*. Из (2) выводим

$$\alpha(t) - \alpha(t_0) = \alpha^{(p)}(t_0)\frac{(t-t_0)^p}{p!} + \ldots + \alpha^{(q)}(t_0)\frac{(t-t_0)^q}{q!} + \ldots + R. \quad (3)$$

Отсюда $\dfrac{p!}{(t-t_0)^p}(\alpha(t) - \alpha(t_0)) = \alpha^{(p)}(t_0) + R_1$, где $R_1 \to \vec{0}$ при $t \to t_0$.

Таким образом, $\alpha^{(p)}(t_0)$ — направляющий вектор касательной.

Положим $\vec{a} = \alpha^{(p)}(t_0)$, $\vec{b} = \alpha^{(q)}(t_0)$, $u = t - t_0$. Напомним, что $q > p$. Векторы $\vec{a}, \vec{b}$ образуют базис в $\overrightarrow{\mathbb{R}}^2$. Разложим по этому базису все векторы, входящие в формулу (3) и приведем подобные члены:

$$\alpha(t) - \alpha(t_0) = (\frac{1}{p!}u^p + \xi_1 u^{p+1} + \ldots + \xi_{q-p-1}u^{q-1})\vec{a} + (\frac{1}{q!}u^q + \ldots)\vec{b} + R_1 = \\ = u^p \xi \vec{a} + u^q \eta \vec{b} + R_1, \quad (4)$$

где $\xi, \eta > 0$. Таким образом, знак коэффициентов при $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется знаком приращения u. Рассмотрим возможные случаи, которые определяются четностью чисел p и q.

1. p, q нечетны. Тогда при $u > 0$, т.е. при $t > t_0$, вектор $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ направлен в первую четверть, а при $t < t_0$ вектор $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ направлен в третью четверть. Кривая переходит через касательную (см. рис. 4). Точка $\alpha(t_0)$ называется *точкой перегиба*.

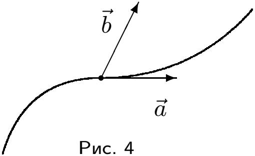

Рис. 4

2. p нечетно, q четно. При $t > t_0$ вектор $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ направлен в первую четверть, а при $t < t_0$ вектор $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ направлен во вторую четверть (см. рис. 5). Точка $\alpha(t_0)$ называется *точкой изгиба*.

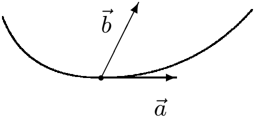

Рис. 5

3. p четно, q нечетно. При $t > t_0$ вектор $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ направлен в первую четверть, а при $t < t_0$ вектор $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ направлен в четвертую четверть (см. рис. 6). Точка $\alpha(t_0)$ называется *точкой возврата 1-го рода*.

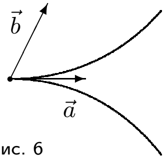

Рис. 6

4. p четно, q четно. При $t > t_0$ вектор $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ направлен в первую четверть, и при $t < t_0$ вектор $\alpha(t) - \alpha(t_0)$ также направлен в первую четверть (см. рис. 7). Точка $\alpha(t_0)$ называется *точкой возврата 2-го рода*.

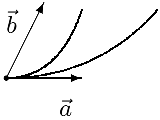

Рис. 7

Типы точек плоской кривой

Подводя итог, получаем следующее утверждение.

Теорема

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$ — гладкая кривая, $t_0 \in I$ и пусть α имеет тип (p, q) в точке t_0. Тогда если t_0 — бирегулярная точка, то $\alpha(t_0)$ — точка изгиба и $k(t_0) \neq 0$; если t_0 — точка распрямления, то $k(t_0) = 0$ и в этой точке может быть изгиб или перегиб; если t_0 — особая точка, то в точке $\alpha(t_0)$ может быть изгиб, перегиб, возврат 1-го или 2-го рода в зависимости от четности чисел p и q.

Образ кривой

Построить образ кривой $\alpha(t) = {}^t(t^2, t^4 + t^5)$.

Имеем $\dot\alpha(t) = {}^t(2t, 4t^3 + 5t^4)$, $\ddot\alpha(t) = {}^t(2; 12t^2 + 20t^3)$, $\dddot\alpha(t) = {}^t(0; 24t + 60t^2)$, $\alpha^{(iv)}(t) = {}^t(0; 24 + 120t)$. Вычислим $\det[\dot\alpha(t), \ddot\alpha(t)] =$

$$\begin{vmatrix} 2t & 2 \\ 4t^3 + 5t^4 & 12t^2 + 20t^3 \end{vmatrix} = 2(12t^3 + 20t^4 - 4t^3 - 5t^4) = 2t^3(8 + 15t).$$

Особые точки $t_0 = 0$, $t_1 = -\frac{8}{15}$. Тип точки t_0 – $(2,4)$, тип точки t_1 – $(1,3)$. Таким образом, $\alpha(t_0) = {}^t(0,0)$ – точка возврата 2-го рода, а точка $\alpha(t_1) = {}^t(\frac{64}{225}, \frac{28672}{759375}) \approx {}^t(0.284; 0.038)$ – точка перегиба. $\dot\alpha(t) \parallel \vec{e}_1$ при $t_2 = -\frac{4}{5}$; при этом $\alpha(t_2) = {}^t(\frac{16}{25}, \frac{256}{3125}) \approx {}^t(0.64; 0.082)$ – точка максимума, поскольку $\alpha(0) = {}^t(0,0)$, $\alpha(-1) = {}^t(1,0)$ и $t^4 + t^5 < 0$ при $t < -1$.

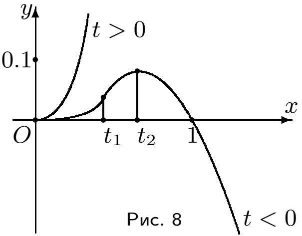

Рис. 8