Глава I. Кривые
§ 2. Общие сведения о кривых

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Дифференциальная геометрия и топология
для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
III семестр

Зафиксируем в аффинном пространстве $\mathbb{R}^m$ стандартный репер $(o; e_1, e_2, \ldots, e_m)$. Пусть $\alpha(t) : I \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}}^m$ – произвольная вектор-функция, определенная на интервале I.

Определение

Будем называть *значением вектор-функции $\alpha(t)$ (в момент t) в аффинном пространстве $\mathbb{R}^m$* ту точку, радиус-вектор которой в стандартном репере суть $\alpha(t)$. Обозначать указанную точку $o + \alpha(t)$ будем просто $\alpha(t)$.

Определения

Гладкой кривой в аффинном пространстве $\mathbb{R}^m$ называется гладкая вектор-функция $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ со значениями в аффинном пространстве $\mathbb{R}^m$.

Множество $\alpha(I) = \{\alpha(t) | t \in I\}$ называется *образом гладкой кривой $\alpha(t)$* в аффинном пространстве $\mathbb{R}^m$.

Говорят, что кривая $\alpha(t)$ *задана параметрически*, если явно указаны все ее координатные функции: $\alpha(t) = {}^t(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^m(t))$.

Если $\alpha : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$, то кривая α называется *гладкой*, если координатные функции имеют производные всех порядков на интервале (a, b) и односторонние производные всех порядков в точках a и b.

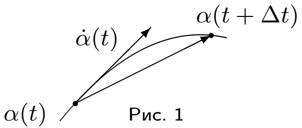

Рис. 1

На рис.1 изображен вектор секущей $\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t)$ (разность двух точек аффинного пространства есть вектор). Значит, и производная кривой α в точке t $\dot\alpha(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}(\alpha(t+\Delta t)-\alpha(t))$ – тоже вектор.

Определение

Это *вектор скорости* или *направляющий вектор касательной* в точке $t\in I$ (см. рис.1).

Мы считаем, что вектор скорости $\dot\alpha(t)$ отложен от точки $\alpha(t)$, т.е. он принадлежит центроаффинному пространству $\mathrm{T}_{\alpha(t)}\mathbb{R}^m$. Если вектор скорости ненулевой (в противном случае определение касательной теряет смысл), то *касательной* к кривой $\alpha(t)$ в точке $t\in I$ называется прямая в $\mathbb{R}^m$, задаваемая уравнением $p=\alpha(t)+u\dot\alpha(t)$, $u\in\mathbb{R}$.

Рассмотрим пример. Пусть $\alpha(t) = {}^t(t^2, t^3)$, $t \in \mathbb{R}$ — *полукубическая парабола* ($x^3 = y^2$, см. рис.2). Имеем $\dot{\alpha}(t) = {}^t(2t, 3t^2)$ и $\dot{\alpha}(0) = (0, 0)$.

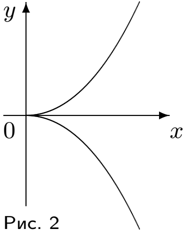

Рис. 2

Определения

Кривая $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ называется *регулярной в точке* t, если $\dot{\alpha}(t) \neq \vec{o}$.
Кривая $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ называется *регулярной на* I, если она регулярна в любой точке из I.

Будем также называть *регулярной* и функцию $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, которая является непрерывно дифференцируемой на I и ее производная не обращается в нуль на всем промежутке I.

Трактриса

Найти параметризацию кривой, у которой длина отрезка касательной от точки касания $M(x, y)$ до точки пересечения касательной с осью Ox есть постоянная величина a.

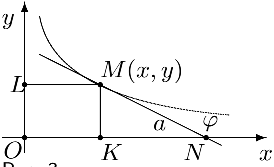

Рис. 3

Ищем параметризацию этой кривой в виде $x = x(\varphi)$, $y = y(\varphi)$, где φ – угол, образованный касательной к данной кривой в точке $M(x, y)$ с осью Ox. Из $\triangle MKN$ получаем $MK = MN \cdot \sin(\pi - \varphi) = a \cdot \sin\varphi$. Так как $|MK| = |OL|$, заключаем. что $y = a\sin\varphi$. Из того, что прямая (MN) – касательная к кривой в точке $M(x, y)$, получаем $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{a\cos\varphi}{\dot{x}(\varphi)}$.

Следовательно, $\dfrac{a\cos\varphi}{\dot{x}(\varphi)} = \operatorname{tg}\varphi$, откуда $\dot{x}(\varphi) = \dfrac{a\cos^2\varphi}{\sin\varphi}$ или $\dfrac{dx}{d\varphi} = \dfrac{a\cos^2\varphi}{\sin\varphi}$.

Окончание примера

Решаем дифференциальное уравнение $dx = \dfrac{a\cos^2\varphi}{\sin\varphi}d\varphi$, интегрируя обе части.

$$x(\varphi) = a\int\frac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi}d\varphi = a\int\frac{\cos^2\varphi}{\sin^2\varphi}(\sin\varphi d\varphi) =$$
$$= |u = \cos\varphi, du = -\sin\varphi d\varphi| =$$
$$= a\int\frac{-u^2}{1-u^2}du = a\int\left(1+\frac{1}{u^2-1}\right)du = a\left(u + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|\right) + C =$$
$$= a\left(\cos\varphi + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}\right|\right) + C = a\left(\cos\varphi + \frac{1}{2}\ln\left|\frac{2\sin^2(\varphi/2)}{2\cos^2(\varphi/2)}\right|\right) + C =$$
$$a(\cos\varphi + \ln|\operatorname{tg}\varphi/2| + C).$$

Параметризация трактрисы

$$\alpha(\varphi) = a^t(\cos\varphi + \ln|\operatorname{tg}\varphi/2| + C, \quad \sin\varphi)$$

Длина кривой

Пусть $I = [a, b]$, $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — кривая.

Определение

Длиной кривой α называется число $\ell[\alpha] = \int_a^b |\dot\alpha(t)| dt$.

Так как кривая — гладкая функция, соответствующий интеграл существует.

Если отрезок $[c, d]$ включается в отрезок $[a, b]$, то определяем *длину дуги кривой* α на отрезке $[c, d]$ как $\ell[\alpha]|_c^d = \int_c^d |\dot\alpha(t)| dt$.

Тот факт, что длину кривой естественно определять именно так, можно проиллюстрировать следующими “наводящими соображениями".
Рассмотрим разбиение σ отрезка $[a, b]$ диаметра $d(\sigma)$ и заменим кривую ломаной, составленной из отрезков в $\mathbb{R}^m$ с концами в точках $\alpha(t_i)$, $t_i \in \sigma$.
Длина ломаной будет равна
$\sum\limits_{t_i \in \sigma} |\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)| = \sum\limits_{t_i \in \sigma} \dfrac{|\alpha(t_{i+1}) - \alpha(t_i)|}{\Delta t_i} \Delta t_i$. Последняя сумма может быть преобразована к интегральной сумме для $\displaystyle\int_a^b |\dot{\alpha}(t)| dt$. В частности, на плоскости получается известная из математического анализа формула: если $\alpha(t) = {}^t(x(t), y(t))$ на отрезке $[a, b]$, то $|\dot{\alpha}(t)| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}$ и $\ell[\alpha] = \displaystyle\int_a^b \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} dt$.

Длина первого витка спирали Архимеда

Найти длину первого витка спирали Архимеда $\rho = a\varphi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

Из связи прямоугольной декартовой и полярной систем координат получаем $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.
Параметризация спирали Архимеда: $\alpha(\varphi) = a^t(\varphi\cos\varphi, \varphi\sin\varphi)$.
Вычисляем $\dot\alpha(\varphi) = a^t(\cos\varphi - \varphi\sin\varphi, \sin\varphi + \varphi\cos\varphi)$ и
$|\dot\alpha(\varphi)| = a\sqrt{(\cos\varphi - \varphi\sin\varphi)^2 + (\sin\varphi + \varphi\cos\varphi)^2} =$
$a\sqrt{\cos^2\varphi - 2\varphi\cos\varphi\sin\varphi + \varphi^2\sin^2\varphi + \sin^2\varphi + 2\varphi\cos\varphi\sin\varphi + \varphi^2\cos^2\varphi} =$
$a\sqrt{1+\varphi^2}$.

Длина первого витка спирали Архимеда: $\ell[\alpha]|_0^{2\pi} = \displaystyle\int_0^{2\pi} a\sqrt{1+\varphi^2}d\varphi =$

$$a\int_0^{2\pi}\sqrt{1+\varphi^2}d\varphi = \frac{a}{2}\left(\varphi\sqrt{1+\varphi^2} + \ln|\varphi + \sqrt{1+\varphi^2}|\right)\Big|_0^{2\pi} =$$

$$a\left(\pi\sqrt{1+4\pi^2} + \frac{1}{2}\ln\left(2\pi + \sqrt{1+4\pi^2}\right)\right).$$

Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^m$ – две гладкие кривые, определенные на интервалах I и J соответственно.

Определения

Говорят, что кривая β получается из кривой α *заменой параметра* φ, если существует такая гладкая биекция $\varphi : J \longrightarrow I$, что $\dot{\varphi}(\theta) \neq 0$ и $\alpha(\varphi(\theta)) = \beta(\theta)$ для любого $\theta \in J$. Кривые α и β называются *эквивалентными*, если β получается из α заменой параметра. Если при этом $\dot{\varphi}(\theta) > 0$ для любого $\theta \in J$, то α и β называются *положительно эквивалентными*.

Докажем, что каждое из введенных отношений является отношением эквивалентности на множестве всех гладких кривых.
Очевидно, что две одинаковые кривые получаются одна из другой тождественной заменой параметра, производная которой тождественно равна 1. Значит, отношение эквивалентности кривых рефлексивно.
Пусть кривая $\beta(\theta)$ получается из кривой $\alpha(t)$ заменой параметра φ. Так как $\dot{\varphi}(\theta) \neq 0$, функция φ монотонна на промежутке J, т.е. является биекцией. Поэтому существует обратная функция φ^{-1}, производная которой равна $\frac{1}{\dot{\varphi}}$ и потому сохраняет знак на I. Следовательно, отношение эквивалентности кривых симметрично.
Пусть кривая $\beta(\theta)$ получается из кривой $\alpha(t)$ заменой параметра $\varphi(\theta)$, а кривая $\gamma(\tau)$ получается из кривой $\beta(\theta)$ заменой параметра $\psi(\tau)$. Тогда $\alpha(\varphi(\psi(\tau))) = \beta(\psi(\tau)) = \gamma(\tau)$, т.е. $\gamma(\tau)$ получается из $\alpha(t)$ заменой параметра $\varphi \circ \psi$, и $(\varphi \circ \psi)^{\cdot} = \dot{\varphi}_\theta \cdot \dot{\psi}_\tau \neq 0$. Итак, отношение эквивалентности кривых транзитивно, т.е. действительно является отношением эквивалентности.
В силу этого название этого отношения корректно.
Для отношения положительной эквивалентности доказательство проводится точно так же.
Понятие отрицательной эквивалентности некорректно, так как соответствующее отношение не рефлексивно и не транзитивно.

Приведем примеры. Пусть $I = J = K = (0,1)$. Рассмотрим кривые

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \alpha(t) = {}^t(t,t);$$
$$\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \beta(\theta) = {}^t(\theta^3,\theta^3);$$
$$\gamma : K \longrightarrow \mathbb{R}^2,\ \gamma(u) = {}^t(1-u, 1-u).$$

Все кривые регулярны, α положительно эквивалентна β $(t = \theta^3)$ и не является положительно эквивалентной γ $(t = 1-u)$. Образ у всех кривых один – диагональ квадрата $(0,1)\times(0,1)$.
Понятие положительной эквивалентности кривых позволяет ухватить направление движения точки по образу кривой. $\alpha(t)$ и $\beta(\theta)$ перемещаются по диагонали в одну сторону, а $\gamma(u)$ – в противоположную.
"При положительной эквивалентности направление обхода кривой сохраняется".

Лемма

Свойство быть регулярной и длина кривой инвариантны относительно замены параметра и изометрии.

$\Downarrow$ Сначала рассмотрим замену параметра. Пусть кривая β получается из кривой α с помощью замены параметра $\varphi(\theta)$ и α регулярна. Тогда $\alpha(\varphi(\theta)) = \beta(\theta)$, откуда $\dot{\beta}(\theta) = \dot{\alpha}(\varphi(\theta))\dot{\varphi}(\theta)$. Так как $\dot{\varphi}(\theta) \neq 0$, $\dot{\alpha} \neq 0$, ясно, что $\dot{\beta}(\theta) \neq 0$, т.е. β регулярна.
Пусть $\alpha : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\beta : [c,d] \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\varphi : [c,d] \longrightarrow [a,b]$, без ограничения общности можно считать φ монотонным отображением. При $\dot{\varphi}(\theta) > 0$ имеем $\ell[\beta] = \int_c^d |\dot{\beta}(\theta)| d\theta = \int_c^d |\alpha(\varphi(\theta))^{\boldsymbol{\cdot}}| d\theta = \int_c^d |\dot{\alpha}(\varphi(\theta))\dot{\varphi}(\theta)| d\theta =$
$\int_c^d |\dot{\alpha}(\varphi(\theta))| \dot{\varphi}(\theta) d\theta = |t = \varphi(\theta), dt = \dot{\varphi}(\theta)d\theta, a = \varphi(c), b = \varphi(d)|$
$= \int_a^b |\dot{\alpha}(t)| dt = \ell[\alpha]$. При $\dot{\varphi}(\theta) < 0$ имеем $\varphi(c) > \varphi(d)$, т.е. $\varphi(c) = b$, $\varphi(d) = a$ и $\int_c^d |\dot{\alpha}(\varphi(\theta))\dot{\varphi}(\theta)| d\theta = -\int_c^d |\dot{\alpha}(\varphi(\theta))| \dot{\varphi}(\theta) d\theta = -\int_b^a |\dot{\alpha}(t)| dt =$
$\int_a^b |\dot{\alpha}(t)| dt = \ell[\alpha]$.

Рассмотрим изометрию $\mathcal{A}x = p_0 + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}$, где $\vec{\mathcal{A}}$ — ортогональный оператор, $\vec{x} = x - p_0$. Пусть $\beta(t) = \mathcal{A}(\alpha(t))$ для всех $t \in I$. Вычислим

$$\dot\beta(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[\beta(t+\Delta t) - \beta(t)] = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[\mathcal{A}\alpha(t+\Delta t) - \mathcal{A}(\alpha(t))] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{1}{\Delta t}[p_0 + \vec{\mathcal{A}}(\alpha(t+\Delta t) - p_0) - p_0 - \vec{\mathcal{A}}(\alpha(t) - p_0)] =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} \vec{\mathcal{A}}\frac{\alpha(t+\Delta t) - \alpha(t)}{\Delta t} = \vec{\mathcal{A}}\dot\alpha(t).$$

Следовательно, $\dot\beta(t) \neq 0$, так как $\vec{\mathcal{A}}$ не изменяет длин векторов. В частности, $|\vec{\mathcal{A}}\dot\alpha(t)| = |\dot\alpha(t)|$, откуда

$$\ell[\beta] = \int_a^b |\dot\beta(t)|dt = \int_a^b |\vec{\mathcal{A}}\dot\alpha(t)|dt = \int_a^b |\dot\alpha(t)|dt = \ell[\alpha].\Uparrow$$

Множество всех регулярных кривых разбивается на классы положительно эквивалентных кривых. В таком классе эквивалентных между собой кривых выберем удобного для изучения канонического представителя.

Определение

Кривая $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ называется *кривой единичной скорости* (*кривой 1-скорости*), если $|\dot{\alpha}(t)| = 1$ для любого $t \in I$.

Заметим, что кривая 1-скорости регулярна и $\ell[\alpha] = \displaystyle\int_a^b |\dot{\alpha}(t)| dt = b - a$.

Ускорение кривой 1-скорости $\ddot{\alpha}$ всегда ортогонально скорости $\dot{\alpha}$. Далее, $\displaystyle\int_a^{a+s} |\dot{\alpha}(t)| dt = s$, $t = s$ — длина дуги, так называемый *натуральный параметр*.

Кривые 1-скорости и будут представителями, упомянутыми в начале этого слайда.

Рассмотрим пример. Пусть $\alpha(t) = {}^t(R\cos t, R\sin t)$, $t \in [0, 2\pi)$. Образ α есть окружность радиуса R с центром в начале координат. Тогда $|\dot{\alpha}(t)| = \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2} = R$. Сделаем замену $t = \frac{s}{R}$. Тогда $s = tR$ — длина дуги. Имеем $\beta(s) = {}^t(R\cos\frac{s}{R}, R\sin\frac{s}{R})$, $\dot{\beta}(s) = {}^t(-\sin\frac{s}{R}, \cos\frac{s}{R})$ и $|\dot{\beta}(s)| \equiv 1$.

Теорема

Любая регулярная кривая положительно эквивалентна кривой 1-скорости.

$\Downarrow$Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — регулярная кривая, $\dot{\alpha} \neq \boldsymbol{o}$. Пусть $t_0 \in I$. Рассмотрим длину дуги $s = \psi(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} |\dot{\alpha}(\theta)| d\theta$. Тогда $\dot{s} = \dot{\psi}(t) = |\dot{\alpha}(t)| > 0$ — условие положительности производной. Обозначим через J промежуток изменения $\psi(t)$ (длина J равна длине всей кривой). Так как $\dot{\psi}(t) > 0$, $\psi(t)$ монотонно возрастает и потому является биекцией. Поэтому существует обратная функция $\varphi : J \longrightarrow I$, $\varphi = \psi^{-1}$. Тогда $t = \varphi(s)$ — замена параметра. Имеем $\dfrac{d\varphi}{ds} = \dfrac{1}{(\frac{d\psi}{dt})} = \dfrac{1}{\dot{\psi}(t)} = \dfrac{1}{|\dot{\alpha}(t)|} > 0$ — условие положительной эквивалентности. Наконец, $\beta(s) = \alpha(\varphi(s))$,

$|\dot{\beta}(s)| = |\dot{\alpha}(\varphi(s)) \cdot \dot{\varphi}(s)| = \left| \dot{\alpha}(t) \dfrac{1}{|\dot{\alpha}(t)|} \right| = \dfrac{1}{|\dot{\alpha}(t)|} |\dot{\alpha}(t)| \equiv 1.$$\Uparrow$

Чтобы из произвольной регулярной кривой $\alpha(t)$ получить кривую единичной скорости, нужно заменить ее параметр на длину дуги, т.е. в качестве замены параметра взять функцию, обратную к функции $s = \psi(t) = \displaystyle\int_{t_0}^{t} |\dot{\alpha}(\theta)| d\theta$. На практике такую процедуру проделать часто бывает трудно из-за невозможности вычислить в явном виде интеграл или невозможности найти явно обратную функцию.

Натурально параметризованные кривые

Определение

Кривая $\beta(s)$, параметром которой является длина дуги этой кривой, отсчитываемая от некоторой фиксированной точки этой кривой, называется *натурально параметризованной кривой*. Параметр s (длина дуги) называется *натуральным параметром*.

Лемма

Пусть $\alpha(t)$ и $\beta(\theta)$ — положительно эквивалентные кривые единичной скорости. Тогда существует число t_0 такое что $\alpha(t) = \beta(t - t_0)$.

$\Downarrow$Пусть $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\beta : J \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $\varphi : J \longrightarrow I$, $\dot{\varphi}(\theta) > 0$ для любого $\theta \in J$ и $\beta(\theta) = \alpha(\varphi(\theta))$. Отсюда $\dot{\beta}(\theta) = \dot{\alpha}(\varphi(\theta))\dot{\varphi}(\theta)$ и $|\dot{\beta}(\theta)| = |\dot{\alpha}(\varphi(\theta))\dot{\varphi}(\theta))| = |\dot{\alpha}(\varphi(\theta)|\dot{\varphi}(\theta)$. Следовательно, $1 \equiv \dot{\varphi}(\theta)$ и $\varphi = \theta + t_0$. Таким образом, $\beta(\theta) = \alpha(\theta + t_0)$, $t = \theta + t_0$ и $\alpha(t) = \beta(t - t_0)$.$\Uparrow$

Следствие

Пусть $\alpha(t)$ — кривая единичной скорости. Тогда существует такое число s_0, что $\beta(s) = \alpha(s - s_0)$ — натурально параметризованная кривая.

Найти натуральную параметризацию арки циклоиды
$\alpha(t) = a^t(t - \sin t, 1 - \cos t)$ $(-2\pi < t < 0)$.

Положим $\theta = t + \pi$. Тогда $\theta \in (-\pi, \pi)$, $t = \theta - \pi$, $\sin t = -\sin\theta$, $\cos t = -\cos\theta$. Перепараметризуем циклоиду:
$\gamma(\theta) = \alpha(\theta - \pi) = a^t(-\pi + (\theta + \sin\theta), 1 + \cos\theta)$. Вычислим производную:
$\dot{\gamma}(\theta) = a^t(1 + \cos\theta, -\sin\theta)$ и ее длину:
$|\dot{\gamma}(\theta)| = a\sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta} = a\sqrt{1 + 2\cos\theta + \cos^2\theta + \sin^2\theta} = a\sqrt{2(1+\cos\theta)} = a\sqrt{4\cos^2(\theta/2)} = 2a\cos(\theta/2)$, так как $-\pi/2 < \theta/2 < \pi/2$.

Далее, $s(\theta) = \displaystyle\int_0^\theta 2a\cos(\tau/2)d\tau = 4a\sin(\theta/2)$, откуда $s = 4a\sin(\theta/2)$;

$$\theta = 2\arcsin\frac{s}{4a};\ \sin(\theta/2) = \frac{s}{4a};\ 1 - \cos\theta = 2\sin^2(\theta/2) = \frac{s^2}{8a^2};$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{s^2}{8a^2};\ 2\cos^2(\theta/2) = 1 + \cos\theta = 2\left(1 - \frac{s^2}{16a^2}\right);$$

$$\cos(\theta/2) = \sqrt{1 - \frac{s^2}{16a^2}};$$

$$\sin\theta = 2\sin(\theta/2)\cos(\theta/2) = 2\cdot\frac{s}{4a}\cdot\sqrt{1 - \frac{s^2}{16a^2}} = \frac{s\sqrt{16a^2 - s^2}}{8a^2}.$$

Теперь $\beta(s) = \gamma\left(2a\arcsin\frac{s}{4a}\right) =$
$a \cdot {}^t\!\left(-\pi + 2\arcsin\frac{s}{4a} + \frac{s\sqrt{16a^2 - s^2}}{8a^2}, 2\left(1 - \frac{s^2}{16a^2}\right)\right) =$
${}^t\!\left(-\pi a + 2a\arcsin\frac{s}{4a} + \frac{s\sqrt{16a^2 - s^2}}{8a}, 2\left(a - \frac{s^2}{16a}\right)\right).$
Сделаем параллельный перенос: $x' = x + \pi a$, $y' = y - 2a$. Получаем окончательный вид натуральной параметризации циклоиды

$$\delta(s) = {}^t\!\left(2a\arcsin\frac{s}{4a} + \frac{s\sqrt{16a^2 - s^2}}{8a}, -\frac{s^2}{8a}\right).$$