§ 1. Предварительные сведения

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Дифференциальная геометрия и топология
для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
III семестр

Дифференциальная геометрия изучает кривые, поверхности и прочие геометрические объекты методами линейной алгебры, математического анализа, топологии.

Дисциплина изучается в течение III семестра, отчетность - экзамен.

Литература

1. Сизый С.В. Лекции по дифференциальной геометрии. М. Физматлит 2007. 376 с.
2. Нагребецкая Ю.В., Перминова О.Е. Дифференциальная геометрия. Практикум. Екатеринбург, Изд-во УрФУ, 2017. 72 с.

Практикум содержит домашние задания по дисциплине.

Некоторые обозначения в курсе дифференциальной геометрии отличаются от обозначений в курсе алгебры и геометрии. Эти отличия будут приводиться по ходу изложения. Первое из них: матрицу, транспонированную к данной матрице A, обозначаем через ${}^tA$ (а не через $A^\top$!).

Для краткости ссылки на курс линейной алгебры будут обозначаться ЛА, на курс основ алгебры — ОА.

Пусть $m \in \mathbb{N}$.

Определения

Арифметическим векторным пространством называется множество всех столбцов ${}^t(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^m)$, где $\xi^i \in \mathbb{R}$, обозначаемое через $\overrightarrow{\mathbb{R}^m}$. *Единичный вектор* — $e_i = {}^t(0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (1 на i-м месте, остальные нули).

Стандартным базисом арифметического векторного пространства $\overrightarrow{\mathbb{R}^m}$ называется строка из векторов $\mathcal{E}_m = (e_1, e_2, \ldots, e_m)$.

Для вектора $x = {}^t(\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^m)$ из $\overrightarrow{\mathbb{R}^m}$ имеем

$$x = \sum_{i=1}^{m} \xi^i e_i = (e_1, e_2, \ldots, e_m) \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \xi^2 \\ \vdots \\ \xi^m \end{pmatrix} = \mathcal{E}_m x.$$

Таким образом, x — столбец своих координат в стандартном базисе.

Сумму $\sum\limits_{i=1}^{m} \xi^i e_i$ кратко принято обозначать через $\xi^i e_i$ (обозначения А. Эйнштейна).

Пример

Пусть $G = (g_i^j) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ и $H = (h_i^j) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ – две квадратные матрицы (номер строки вверху). Записать с помощью обозначений Эйнштена и вычислить tr(H), ${}^tG \cdot H$, tr$(H \cdot G)$.

tr$(H) = h_i^i = \sum_{i=1}^{3} h_i^i = 4 + 1 = 0 = 5$; ${}^tG = (\tilde{g}_j^i)$, где $\tilde{g}_j^i = g_i^j$. Тогда

${}^tG \cdot H = (\tilde{g}_k^i h_j^k) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} =$

$\begin{pmatrix} -11 & 13 & 4 \\ 1 & -19 & -1 \\ 16 & 8 & -4 \end{pmatrix}$;

$H \cdot G = (h_k^i g_j^k)$; tr$(H \cdot G) = h_k^i g_i^k$;

$H \cdot G = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & -4 \\ 2 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 14 & 6 \\ 7 & -4 & -8 \\ 9 & 8 & -18 \end{pmatrix}$;

tr$(H \cdot G) = -28$.

Пусть $a_1, \dots, a_k \in \overrightarrow{\mathbb{R}^m}$, $a_i = \mathcal{E}_m a_i$. Через $a = [a_1, \dots, a_k]$ обозначим $m \times k$-матрицу, составленную из столбцов $a_1, \dots, a_k$. Будем писать

$$(a_1, \dots, a_k) = \mathcal{E}_m a.$$

Имеем $[e_1, e_2, \dots, e_m] = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ — единичная матрица порядка m.

Обозначение единичной матрицы

Единичную матрицу порядка m будем обозначать через $\mathbb{I}_m$.

Через $\mathcal{L}(a_1, \dots, a_k)$ обозначим линейную оболочку векторов $a_1, \dots, a_k$. Пусть $\mathcal{D} : \overrightarrow{\mathbb{R}^m} \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^m}$ — линейный оператор, D — матрица линейного оператора $\mathcal{D}$ в стандартном базисе; будем писать тогда $\mathcal{D} \leftrightarrow_{\mathcal{E}_m} D$. Имеем $D = [\mathcal{D}e_1, \mathcal{D}e_2, \dots, \mathcal{D}e_m]$, и $v = \mathcal{D}u \Leftrightarrow v = Du$. Если $\mathcal{D}$ — обратимый оператор, т.е. матрица D невырожденная, то базис $(a_1, a_2, \dots, a_m)$ и базис $(\mathcal{D}a_1, \mathcal{D}a_2, \dots, \mathcal{D}a_m)$ будут одинаково ориентированы тогда и только тогда, когда $\det(D) > 0$ (определение ориентации см. на сл.27).

Понятие билинейной функции

Определение

Пусть $\vec{V}$ – векторное пространство над полем $\mathbb{R}$. *Билинейной функцией* на пространстве $\vec{V}$ называется отображение $\mathcal{B} : \vec{V} \times \vec{V} \longrightarrow \mathbb{R}$, линейное по каждому аргументу, т.е. такое, что $\forall x, y, z \in \vec{V}\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$
$\mathcal{B}(x + y, z) = \mathcal{B}(x, z) + \mathcal{B}(y, z)$, $\mathcal{B}(\lambda x, z) = \lambda \mathcal{B}(x, z)$ (линейность по первому аргументу) и
$\mathcal{B}(x, y + z) = \mathcal{B}(x, y) + \mathcal{B}(x, z)$, $\mathcal{B}(x, \lambda z) = \lambda \mathcal{B}(x, z)$ (линейность по второму аргументу).

Примером билинейной функции является скалярное произведение на евклидовом пространстве.
Пусть векторы $x = \sum_{i=1}^{m} \xi^i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} \eta^j f_j$ линейно выражаются через системы $(e_1, \ldots, e_m)$ и $(f_1, \ldots, f_n)$ соответственно. Тогда значение билинейной функции $\mathcal{B}(x, y)$ через значения $\mathcal{B}(e_i, f_j)$ вычисляется по формуле

$$\mathcal{B}(x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \xi^i \eta^j \mathcal{B}(e_i, f_j) \text{ или } \mathcal{B}(\xi^i e_i, \eta^j f_j) = \xi^i \eta^j \mathcal{B}(e_i, f_j). \qquad (1)$$

Матрица билинейной функции в базисе

Пусть $\vec{V}$ – n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ – билинейная функция на $\vec{V}$.

Определение

Пусть $C = (c_1, \ldots, c_n)$ – базис пространства $\vec{V}$. Положим $\beta_{ij} = \mathcal{B}(c_i, c_j)$. *Матрицей* билинейной функции $\mathcal{B}$ в базисе C называется матрица $(\beta_{ij})_{n\times n}$. Обозначение: B_C, $\mathcal{B} \leftrightarrow_C B$.

Вычислим значение билинейной функции $\mathcal{B}$ на векторах $x = \sum_{i=1}^{n} \xi^i c_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} \eta^j c_j$ через их столбцы координат $[x]_C$, $[y]_C$ и матрицу функции $\mathcal{B}$ в базисе C, используя формулу (1) предыдущего слайда:
$\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{n} \xi^i c_i, \sum_{j=1}^{n} \eta^j c_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi^i \eta^j \mathcal{B}(c_i, c_j) =$
$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \xi^i \eta^j \beta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \xi^i \left(\sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} \eta^j\right) = {}^t[x]_C \cdot (B_C \cdot [y]_C)$.
Получаем формулу

$$\mathcal{B}(x, y) = {}^t[x]_C \cdot B_C \cdot [y]_C. \tag{2}$$

Формой принято называть однородный многочлен от нескольких переменных, т.е. многочлен, у которого все одночлены имеют одинаковые степени. Например, линейная форма от n переменных над полем $\mathbb{R}$ имеет вид $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$. При вычислении значения билинейной функции по координатам векторов в базисе получается значение билинейной формы (т.е. формы от набора переменных, разбитого на две равные части так, что форма линейна по каждой части набора переменных) от координат векторов.

Определение

Билинейной формой от переменных $x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n$ над полем $\mathbb{R}$ называется многочлен $b(x^1, \ldots, x^n, y^1, \ldots, y^n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x^i y^j$, где $\beta_{ij} \in \mathbb{R}$, $i, j = 1, \ldots, n$. *Матрицей* билинейной формы называется матрица $(\beta_{ij})_{n \times n}$, составленная из ее коэффициентов.

Например, билинейная форма
$x_1 y_1 - 2x_1 y_2 + 5x_1 y_3 - 3x_2 y_1 + 4x_2 y_2 - 6x_2 y_3 - 9x_3 y_1 + 8x_2 y_2 - 7x_2 y_3$
имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -6 \\ -9 & 8 & -7 \end{pmatrix}$.

Изменение матрицы билинейной функции при изменении базиса

Пусть $\vec{V}$ – n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ – билинейная функция на $\vec{V}$. Пусть C и C' – базисы пространства $\vec{V}$, $\mathcal{B} \leftrightarrow_C B$, $\mathcal{B} \leftrightarrow_{C'} B'$ и T — матрица перехода от базиса C к базису C'. Связь между матрицами B и B' дается следующей формулой.

Формула изменения матрицы билинейной функции при изменении базиса

$$B_{C'} = {}^t\!T \cdot B_C \cdot T. \tag{3}$$

Определение

Билинейная функция $\mathcal{B}$ называется *симметричной*, если $\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}(y, x)$ для любых $x, y \in \vec{V}$.

Предложение

Следующие условия эквивалентны для билинейной функции $\mathcal{B}$:
(1) $\mathcal{B}$ является симметричной билинейной функцией;
(2) матрица B билинейной функции $\mathcal{B}$ в любом базисе является симметрической, т.е. ${}^tB = B$;
(3) матрица билинейной функции $\mathcal{B}$ в некотором базисе является симметрической.

Определение

Билинейная функция $\mathcal{B}$ называется *положительно определенной*, если $\mathcal{B}(x, x) > 0$ для любого ненулевого $x \in \vec{V}$.

Пусть $\vec{V}$ – n-мерное векторное пространство над полем $\mathbb{R}$.

Определение

Квадратичной функцией на векторном пространстве V называется отображение $\mathcal{K} : \vec{V} \longrightarrow \mathbb{R}$, для которого существует симметричная билинейная функция $\mathcal{B}$ на $\vec{V}$ такая что $\mathcal{K}(x) = \mathcal{B}(x, x)$. *Матрицей* квадратичной функции $\mathcal{K}$ в базисе C называется матрица билинейной функции $\mathcal{B}$ в этом базисе.

Из формулы (2) сл.7 получаем формулу для вычисления значения квадратичной функции от вектора.

$$\mathcal{K}(x) = {}^t[x]_C \cdot B_C \cdot [x]_C. \tag{4}$$

При изменении базиса матрица квадратичной функции изменяется в соответствии с формулой (3) сл.9.

Предложение

Симметричная билинейная функция определяется по заданной с ее помощью квадратичной функции однозначно.

В самом деле, легко вычислить, что если $\mathcal{K}(x) = \mathcal{B}(x, x)$ и $\mathcal{B}$ – симметричная билинейная функция, то $\mathcal{B}(x, y) = \frac{1}{2}(\mathcal{K}(x + y) - \mathcal{K}(x) - \mathcal{K}(y))$.

Определение

Квадратичная функция $\mathcal{K}$ называется *положительно определенной*, если $\mathcal{K}(x) > 0$ для любого ненулевого $x \in \vec{V}$.

Наблюдение

Пусть $\mathcal{B}(x, y)$ — симметричная билинейная функция и $\mathcal{K}(x) = \mathcal{B}(x, x)$ — порожденная ею квадратичная функция. Тогда $\mathcal{B}(x, y)$ и $\mathcal{K}(x)$ одновременно являются положительно определенными.

Определение

Квадратичной формой от переменных $x^1, \ldots, x^n$ над полем F называется многочлен $f(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} x^i x^j$, где $\alpha_{ij} = \alpha_{ji} \in F$, $i, j = 1, \ldots, n$. *Матрицей* квадратичной формы называется матрица $(\alpha_{ij})_{n \times n}$, составленная из ее коэффициентов.

Матрица $A = (\alpha_{ij})_{n \times n}$ квадратичной формы $f(x^1, \ldots, x^n)$ по определению является симметрической. Из формулы (4) сл.9 получаем *матричное представление* квадратичной формы (где $X = {}^t(x^1, \ldots, x^n)$ – столбец переменных):

$$f(X) = {}^tX \cdot A \cdot X. \tag{5}$$

Квадратичная форма служит для вычисления значения квадратичной функции по координатам вектора в данном базисе. Квадратичная функция определяет семейство эквивалентных друг другу квадратичных форм, по одной для каждого базиса. При переходе к другому базису матрица квадратичной формы изменяется в соответствии с формулой (3) сл.9. Это можно представить как линейную замену переменных в квадратичной форме.

Определение

Пусть $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. *Угловым главным минором* матрицы A называется минор $\Delta_m = A\begin{pmatrix} 1 & \dots & m \\ 1 & \dots & m \end{pmatrix}$, стоящий в ее первых m строках и первых m столбцах.

Теорема

Пусть $f(x^1,\dots,x^n) = {}^tX \cdot A \cdot X$ – квадратичная форма над полем $\mathbb{R}$ с матрицей A. Форма $f(x^1,\dots,x^n)$ является положительно определенной тогда и только тогда, когда у матрицы A все угловые главные миноры Δ_m $(m = 1,\dots,n)$ положительны.

Критерий Сильвестра дает также необходимое и достаточное условие положительной определенности симметричной билинейной формы через угловые главные миноры ее матрицы.
В курсе дифференциальной геометрии термин "форма"будет обозначать и функцию, и форму в смысле данных выше определений.

Пример

Пусть $(g_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ – матрица билинейной формы $\overrightarrow{\mathbb{R}^3} \times \overrightarrow{\mathbb{R}^3} \longrightarrow \mathbb{R}$ в стандартном базисе. 1) Вычислить значение этой формы от векторов $x = {}^t(2, -1, 5)$ и $y = {}^t(2, 2, -1)$. 2) Найти матрицу формы $g(x, y)$ в базисе $b_1 = {}^t(1, 2, 2)$, $b_2 = {}^t(2, 1, -2)$, $b_3 = {}^t(2, -2, 1)$. 3) Является ли форма $g(x, y)$ положительно определенной?

1) $g(x, y) = x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (2, -1, 5) \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \\ 2 \end{pmatrix} = 14.$

2) $T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix};$

$(g'_{ij}) = {}^tT \cdot (g_{ij}) \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix} \cdot T =$

$\begin{pmatrix} 0 & 24 & 10 \\ 8 & 3 & -4 \\ -4 & -8 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 68 & 4 & -38 \\ 6 & 27 & 6 \\ -24 & -12 & 6 \end{pmatrix}.$

3) $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} = 3$, $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & 8 \\ 0 & 8 & -2 \end{vmatrix} = -70,$

форма $g(x, y)$ не является положительно определенной.

Определение

Евклидовым называется векторное пространство $\vec{V}$ над полем действительных чисел, удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\forall x, y \in \vec{V}\ \exists!\, \alpha \in \mathbb{R}$. Число α называется *скалярным произведением* векторов x и y и обозначается через $\langle x, y\rangle$ (а не через (x, y)!).
2. $\forall x, y \in \vec{V}\ \langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle$.
3. $\forall x, y, z \in \vec{V}\ \langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$.
4. $\forall x, y \in \vec{V}\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\ \langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle$.
5. $\forall x \in \vec{V}\ \langle x, x\rangle > 0$ в случае, когда $x \neq 0_V$.

Скалярное произведение $\langle x, y\rangle$ в евклидовом пространстве $\vec{V}$ является билинейной симметричной положительно определенной формой $g(x, y)$ на $\vec{V}$.

Если на двух экземплярах одного и того же векторного пространства $\vec{V}$ задать различные скалярные произведения (определить разные формы $g_1(x, y)$ и $g_2(x, y)$), то получатся разные евклидовы пространства!

Пусть $\vec{V}$ – евклидово пространство, $A = (a_1, \dots, a_m)$ – система векторов пространства $\vec{V}$.

Определения

Матрицей Грама системы векторов A называется матрица, составленная из скалярных произведений $\begin{pmatrix} \langle a_1, a_1 \rangle & \langle a_1, a_2 \rangle & \dots & \langle a_1, a_m \rangle \\ \langle a_2, a_1 \rangle & \langle a_2, a_2 \rangle & \dots & \langle a_2, a_m \rangle \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \langle a_m, a_1 \rangle & \langle a_m, a_2 \rangle & \dots & \langle a_m, a_m \rangle \end{pmatrix}$.

Обозначение: G_A.

Определителем Грама системы векторов A называется определитель $|G_A|$.

Обозначение: g_A.

Матрица Грама базиса $(b_1, \dots, b_n)$ конечномерного евклидова пространства $\vec{V}$ является матрицей билинейной формы $g(x, y) = \langle x, y \rangle$ (скалярного произведения) в этом базисе. Она определяет скалярное произведение, ее элементы $g_{ij} = g(b_i, b_j) = \langle b_i, b_j \rangle$ называются *метрическими коэффициентами*.

Задать билинейную форму на конечномерном векторном пространстве значит задать ее матрицу в каком-либо базисе.

Определение

Параллелотопом, порожденным линейно независимой системой векторов $(a_1, \ldots, a_m)$ евклидова пространства, называется множество $\{\lambda^1 a_1 + \ldots + \lambda^m a_m | 0 \leq \lambda^j \leq 1 \ (j = 1, \ldots, m)\}$.

Понятие параллелотопа обобщает понятия отрезка, параллелограмма, параллелепипеда.

Предложение

Матрица Грама (g_{ij}) любого базиса обладает следующими свойствами:

- $g_{ii} > 0$;
- $g_{ij} = g_{ji}$;
- все угловые главные миноры матрицы (g_{ij}) положительны;
- объем параллелотопа, построенного на векторах данного базиса, равен $\sqrt{g}$, где g — определитель матрицы Грама (g_{ij}).

Метрика евклидова пространства

Скалярное произведение определяет на метрическом пространстве $\vec{V}$ метрическую структуру. В частности, скалярное произведение задает на $\vec{V}$ метрику $\rho(x,y) = \sqrt{\langle x-y, x-y\rangle}$.
С помощью скалярного произведения определяются длины, углы и объемы. Пусть $(b_1, \ldots, b_n)$ – базис $\overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ и $x = \xi^i b_i$, $y = \eta^j b_j \in \overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ – произвольные векторы.

Длина вектора

Длина вектора x: $|x| = \sqrt{\langle \xi^i b_i, \xi^j b_j\rangle} = \sqrt{g_{ij}\xi^i\xi^j}$.

Длина вектора – корень из значения квадратичной формы от вектора.

Угол между векторами

Косинус угла φ между ненулевыми векторами x, y:

$$\cos\varphi = \frac{\langle x, y\rangle}{|x|\cdot|y|} = \frac{g_{ij}\xi^i\eta^j}{\sqrt{g_{ij}\xi^i\xi^j}\sqrt{g_{ij}\eta^i\eta^j}}.$$

Здесь в числителе – значение билинейной формы от x, y.
Неравенство Коши-Буняковского $|\langle x, y\rangle| \leq |x|\cdot|y|$ гарантирует, что правая часть формулы для $\cos\varphi$ по модулю не превосходит 1.

Определение

Векторы $x, y \in \vec{V}$ называются *ортогональными*, если $\langle x, y \rangle = 0$.
Обозначение: $x \perp y$.

Определение

Базис $(e_1, \ldots, e_n)$ евклидова пространства $\vec{V}$ называется *ортонормированным*, если

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j; \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

Отображение $\delta_{ij} : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \{0, 1\}$ — *символ Кронекера*.

Стандартный базис $(e_1, \ldots, e_n)$ евклидова пространства $\overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ принято считать ортонормированным.
Координаты x^i вектора x в ортонормированном базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ евклидова пространства $\vec{V}$ суть скалярные произведения $\langle x, e_i \rangle$, так как $\langle x, e_i \rangle = \langle x^j e_j, e_i \rangle = x^j \langle e_j, e_i \rangle = x^j \delta_{ij} = x^i$.

Пусть $\vec{V}$ – подпространство $\overrightarrow{\mathbb{R}^n}$.

Определения

Вектор x *ортогонален* к $\vec{V}$, если $x \perp y$ для любого $y \in \vec{V}$. Обозначение: $x \perp \vec{V}$.

Множество векторов $\vec{V}^\perp = \{x \in \overrightarrow{\mathbb{R}^n} | x \perp \vec{V}\}$ называется *ортогональным дополнением* к подпространству $\vec{V}$.

Ортогональное дополнение является подпространством.

Теорема

Для любого подпространства $\vec{V} \subseteq \overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ справедливо $\overrightarrow{\mathbb{R}^n} = \vec{V} \oplus \vec{V}^\perp$ и $n = \dim \vec{V} + \dim \vec{V}^\perp$.

Произвольный вектор $z \in \overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ единственным образом представим в виде суммы $z = x + y$, где $x \in \vec{V}$, $y \in \vec{V}^\perp$. Вектор x называется *ортогональной проекцией* вектора z на $\vec{V}$, а вектор y – *ортогональной составляющей* вектора z относительно $\vec{V}$.

Углом между вектором z и подпространством $\vec{V}$ называется угол между z и его ортогональной проекцией на $\vec{V}$.

Пример 1

Пусть матрица Грама стандартного базиса пространства $\overrightarrow{\mathbb{R}^4}$ единичная. Проверить, что базис из векторов $b_1 = {}^t(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $b_2 = {}^t(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $b_3 = {}^t(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $b_4 = {}^t(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ является ортонормированным базисом пространства $\overrightarrow{\mathbb{R}^4}$. Найти координаты вектора $x = {}^t(4, 6, -2, 10)$ в этом базисе.

$|b_i| = 1$, $i = 1, 2, 3, 4$; $\langle b_i, b_j \rangle = 0$ при $i \neq j$.
$x = \sum_{i=1}^{4} \langle x, b_i \rangle b_i$; $\langle x, b_1 \rangle = 9$, $\langle x, b_2 \rangle = 1$, $\langle x, b_3 \rangle = -7$, $\langle x, b_4 \rangle = 5$,
$[x]_b = {}^t(9, 1, -7, 5)$.

Пример 2

Найти объем праллелотопа, построенного на векторах $a_1 = {}^t(1,-2,3,2)$, $a_2 = {}^t(-1,2,3,2)$, $a_3 = {}^t(1,2,-3,2)$, $a_4 = {}^t(1,2,3,-2)$.

$g_{ii} = a_i^2 = 18$ для $i = 1,2,3,4$, $g_{12} = g_{21} = \langle a_1, a_2\rangle = 8$,
$g_{13} = g_{31} = \langle a_1, a_3\rangle = -8$, $g_{14} = g_{41} = \langle a_1, a_4\rangle = 2$,
$g_{23} = g_{32} = \langle a_2, a_3\rangle = -2$, $g_{24} = g_{42} = \langle a_2, a_4\rangle = 8$,
$g_{34} = g_{43} = \langle a_3, a_4\rangle = -8$;

$$g = \det(g_{ij}) = \begin{vmatrix} 18 & 8 & -8 & 2 \\ 8 & 18 & -2 & 8 \\ -8 & -2 & 18 & -8 \\ 2 & 8 & -8 & 18 \end{vmatrix} = 16 \begin{vmatrix} 9 & 4 & -4 & 1 \\ 4 & 9 & -1 & 4 \\ -4 & -1 & 9 & -4 \\ 1 & 4 & -4 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$16 \begin{vmatrix} 8 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 8 & 8 & 0 \\ -4 & -1 & 9 & -4 \\ 1 & 4 & -4 & 9 \end{vmatrix} = 2^{10} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 9 & -8 \\ 1 & 4 & -4 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$2^{10} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 9 & -8 \\ 4 & -4 & 10 \end{vmatrix} = 2^{10} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 10 & -8 \\ 4 & -8 & 10 \end{vmatrix} = 2^{10} \cdot 36;$$

$V = \sqrt{g} = 2^5 \cdot 6 = 192.$

Найти базис ортогонального дополнения подпространства $\vec{V} \subset \overrightarrow{\mathbb{R}^4}$, порожденного векторами $a_1 = {}^t(1,2,2,-1)$ и $a_2 = {}^t(1,1,-5,3)$. Найти ортогональную составляющую и ортогональную проекцию вектора $x = {}^t(4,-1,-3,2)$ на подпространство $\vec{V}$.

$u = {}^t(u_1,u_2,u_3,u_4)$, $\langle a_i, u\rangle = 0$ $(i=1,2)$; $\begin{cases} u_1 + 2u_2 + 2u_3 - u_4 = 0, \\ u_1 + u_2 - 5u_3 + 3u_4 = 0; \end{cases}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -12 & 7 \\ 0 & 1 & 7 & -4 \end{pmatrix};$$

$\begin{cases} u_1 = 12u_3 - 7u_4, \\ u_2 = -7u_3 + 4u_4; \end{cases}$ $\begin{array}{cccc} u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ 12 & -7 & 1 & 0 \\ -7 & 4 & 0 & 1 \end{array}$; $b_1 = {}^t(12,-7,1,0)$,

$b_2 = {}^t(-7,4,0,1)$ – базис $\vec{V}^\perp$.

$x = y + z$, $y \in \vec{V}$, $z \in \vec{V}^\perp$, $y = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2$, $\langle x, a_1\rangle = \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 \langle a_2, a_1\rangle$, $\langle x, a_2\rangle = \lambda_1\langle a_1, a_2\rangle + \lambda_2 a_2^2$, $\langle x, a_1\rangle = -6$, $\langle x, a_2\rangle = 24$, $a_1^2 = 10$, $a_2^2 = 36$, $\langle a_1, a_2\rangle = -10$; $\begin{cases} 10\lambda_1 - 10\lambda_2 = -6, \\ -10\lambda_1 + 36\lambda_2 = 24; \end{cases}$ $26\lambda_2 = 18$, $\lambda_2 = \frac{9}{13}$,

$\lambda_1 = \lambda_2 - \frac{3}{5} = \frac{6}{65}$; $y = \frac{3}{65}(2a_1 + 15a_2) = \frac{3}{65}{}^t(17,19,-71,43)$;

$z = x - y = \frac{1}{65}{}^t(209,-122,18,1)$. Проверка:

$\langle z, a_1\rangle = \frac{1}{65}(209 - 244 + 36 - 1) = 0$; $\langle z, a_2\rangle = \frac{1}{65}(209 - 122 - 90 + 3) = 0$.

Пусть $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ – линейно независимая система векторов. Ее можно преобразовать в ортонормированную систему следующим образом.
Полагаем $b_1 = \dfrac{a_1}{|a_1|}$.
Предположим, что векторы $b_1, \ldots, b_{i-1}$ $(1 < i \leq k)$ уже построены.
Построим вектор

$$\tilde{b}_i = a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle b_j, a_i \rangle b_j.$$

Вектор $\tilde{b}_i$ ненулевой и
$\langle \tilde{b}_i, b_s \rangle = \left\langle a_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle b_j, a \rangle b_j, b_s \right\rangle = \langle a_i, b_s \rangle - \sum_{j=1}^{i-1} \langle b_j, a_i \rangle \langle b_j, b_s \rangle =$
$= \langle a_i, b_s \rangle - \langle b_s, a_i \rangle = 0$. Таким образом, $\tilde{b}_i \perp b_j$ $(1 \leq j < i)$. Полагаем $b_i = \dfrac{\tilde{b}_i}{|\tilde{b}_i|}$. По завершении процесса получаем ортонормированную систему $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$.
Этот процесс и называется *процессом ортогонализации Грама-Шмидта*.

Пример

Пусть матрица Грама стандартного базиса пространства $\overrightarrow{\mathbb{R}^4}$ единичная. Построить ортонормированный базис линейной оболочки системы векторов $a_1 = {}^t(2, 1, 3, -1)$, $a_2 = {}^t(7, 4, 3, -3)$, $a_3 = {}^t(1, 1, -6, 0)$, $a_4 = {}^t(5, 7, 7, 8)$.

Применим процесс ортогонализации Грама-Шмидта.

$b_1 = \dfrac{1}{|a_1|} a_1 = \dfrac{1}{\sqrt{15}}\, {}^t(2, 1, 3, -1)$;

$\tilde{b}_2 = a_2 + \lambda b_1$, $\lambda = -\dfrac{\langle a_2, b_1\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} = -\dfrac{14+4+9+3}{\sqrt{15}} = -2\sqrt{15}$,

$\tilde{b}_2 = a_2 - 2a_1 = {}^t(3, 2, -3, -1)$, $b_2 = \dfrac{1}{|\tilde{b}_2|}\tilde{b}_2 = \dfrac{1}{\sqrt{23}}\, {}^t(3, 2, -3, -1)$;

$\tilde{b}_3 = a_3 + \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$, $\lambda_1 = -\dfrac{\langle a_3, b_1\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} = -\dfrac{2+1-18}{\sqrt{15}} = \sqrt{15}$,

$\lambda_2 = -\dfrac{\langle a_3, b_2\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle} = -\dfrac{3+2+18}{\sqrt{23}} = -\sqrt{23}$,

$\tilde{b}_3 = a_3 + a_1 - \tilde{b}_2 = {}^t(1, 1, -6, 0) + {}^t(2, 1, 3, -1) - {}^t(3, 2, -3, -1) = {}^t(0, 0, 0, 0)$,

$\mathcal{L}(a_1, a_2, a_3, a_4) = \mathcal{L}(a_1, a_2, a_4)$;

$\tilde{b}_3 = a_4 + \lambda_1' b_1 + \lambda_2' b_2$, $\lambda_1' = -\dfrac{\langle a_4, b_1\rangle}{\langle b_1, b_1\rangle} = -\dfrac{10+7+21-8}{\sqrt{15}} = -2\sqrt{15}$,

$\lambda_2' = -\dfrac{\langle a_4, b_2\rangle}{\langle b_2, b_2\rangle} = -\dfrac{15+14-21-8}{\sqrt{23}} = 0$, $\tilde{b}_3 = a_4 - 2a_1 = {}^t(1, 5, 1, 10)$;

$b_3 = \dfrac{1}{|\tilde{b}_3|}\tilde{b}_3 = \dfrac{1}{\sqrt{127}}\, {}^t(1, 5, 1, 10)$.

Ортонормированный базис $\mathcal{L}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ – система векторов (b_1, b_2, b_3).

Ориентация базиса в евклидовом пространстве

Пусть $\vec{V}$ – векторное пространство над полем $\mathbb{R}$ размерности n.

Определение

Два базиса B и C пространства $\vec{V}$ называются *одинаково ориентированными*, если матрица перехода T от базиса B к C имеет положительный определитель.

Предложение

Отношение "быть одинаково ориентированными" является отношением эквивалентности на множестве всех базисов пространства $\vec{V}$.

Пример

Являются ли базисы $a_1 = {}^t(1,1,1)$, $a_2 = {}^t(1,1,-1)$, $a_3 = {}^t(1,-1,1)$ и $b_1 = {}^t(1,2,3)$, $b_2 = {}^t(2,3,1)$, $b_3 = {}^t(1,1,1)$ пространства $\overrightarrow{\mathbb{R}^3}$ одинаково ориентированными?

Запишем определители матриц перехода от стандартного базиса к данным базисам: $\triangle_a = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4;$

$\triangle_b = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -3.$

Так как определители одного знака, базисы одинаково ориентированы.

Множество всех базисов пространства $\vec{V}$ разбивается на классы эквивалентности по отношению быть одинаково оринтированными. Зафиксируем базис B. Тогда для любого базиса C матрица перехода $T_{B,C}$ имеет положительный или отрицательный определитель. Имеется точно два класса эквивалентности по отношению быть одинаково оринтированными базисами. Поэтому ориентацию пространства задают путем указания конкретного положительно ориентированного базиса. Например, в арифметическом евклидовом пространстве положительно ориентированным считается стандартный базис.

Определение

Ориентация конечномерного пространства $\vec{V}$ задается путем указания конкретного базиса, который называется *положительно ориентированным*.

Ориентированные флаги

Определение

Флагом в пространстве $\vec{V}$ называется цепочка подпространств $\{\vec{0_V}\} \subset \vec{V}_1 \subset \ldots \subset \vec{V}_n = \vec{V}$ такая что $\dim \vec{V}_k = k$ для всех $k = 1, \ldots, n$.

Каждый базис $(a_1, \ldots, a_n)$ пространства $\vec{V}$ определяет флаг в этом пространстве: $\{\vec{0_V}\} \subset \mathcal{L}(a_1) \subset \mathcal{L}(a_1, a_2) \ldots \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_{n-1}) \subset \vec{V}$. Обратно, по каждому флагу можно построить базис, определяющий этот флаг: пусть a_1 – базис $\vec{V}_1$ и $a_j \in \vec{V}_j \backslash \vec{V}_{j-1}$ при $j = 2, \ldots, n$.
Базис, определяющий флаг, задает на этом флаге ориентацию: каждое подпространство $\mathcal{L}(a_1, \ldots, a_k)$ ориентируется базисом $(a_1, \ldots, a_k)$.
Ориентированный флаг называется *орфлагом*.

Пример

Пусть (a_1, a_2, a_3, a_4) – некоторый базис пространства $\overrightarrow{\mathbb{R}^4}$. Рассмотрим два орфлага $\mathcal{L}(a_1) \subset \mathcal{L}(a_1, a_2) \subset \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3) \subset \mathcal{L}(a_1, a_2, a_3, a_4)$ и
$\mathcal{L}(a_1) \subset \mathcal{L}(a_1, a_2 - a_1) \subset \mathcal{L}(a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3) \subset \mathcal{L}(a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4)$.
Совпадают эти орфлаги или нет?

$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$; базисы (a_1, a_2) и $(a_1, -a_1 + a_2)$ ориентированы одинаково;

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

базисы (a_1, a_2, a_3) и $(a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3)$ ориентированы одинаково;

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

базисы (a_1, a_2, a_3, a_4) и $(a_1, a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4)$ ориентированы одинаково;
орфлаги совпадают.

Лемма

Пусть $\vec{V} \subset \vec{W}$ – ориентированные подпространства в $\overrightarrow{\mathbb{R}^n}$, $\dim\vec{V} = k$, $\dim\vec{W} = k+1$, $(b_1, \ldots, b_k)$ – базис $\vec{V}$. Тогда существует единственный вектор $b \in \vec{W}$ со свойствами: 1) $b \in (\vec{V})^{\perp}$; 2) $|b| = 1$; 3) базис $(b_1, \ldots, b_k, b)$ задает на подпространстве $\vec{W}$ исходную ориентацию.

$\Downarrow$Вектор b образует один из двух ортонормированных базисов в 1-мерном подпространстве $(\vec{V})^{\perp} \cap \vec{W}$$\Uparrow$.

Следствие

Для любого орфлага $\vec{V}_1 \subset \vec{V}_2 \subset \ldots \subset \vec{V}_k$ существует единственная порождающая его ортонормированная система $(b_1, \ldots, b_k)$.

$\Downarrow$Пусть b_1 — орт из $\vec{V}_1$, задающий на нем требуемую ориентацию. Дальше применяем индукцию: пусть $1 \leq j < k$ и $(b_1, \ldots, b_j)$ — единственная ортонормированная система, порождающая орфлаг $\vec{V}_1 \subset \ldots \subset \vec{V}_j$. По лемме существует едиственный орт $b_{j+1} \in \vec{V}_{j+1}$ такой, что система $(b_1, \ldots, b_{j+1})$ задает нужную ориентацию на $\vec{V}_{j+1}$. Следовательно, эта ортонормированная система порождает орфлаг $\vec{V}_1 \subset \ldots \subset \vec{V}_{j+1}$$\Uparrow$.

Предположим, что линейно независимая система $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ с помощью процесса ортогонализации Грама-Шмидта переводится в ортонормированную систему $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$. Тогда матрица перехода от системы $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ к $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ – верхнетреугольная с положительными элементами на главной диагонали. Все ее угловые главные миноры положительны. Таким образом, системы $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ и $(b_1, b_2, \ldots, b_k)$ порождают один и тот же орфлаг.

Определение

Линейный оператор $\mathcal{Q} : \overrightarrow{\mathbb{R}^n} \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ называется *ортогональным (изометрическим)*, если он сохраняет скалярное произведение, т.е. для любых векторов $x, y \in \overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ справедливо $\langle \mathcal{Q}x, \mathcal{Q}y \rangle = \langle x, y \rangle$.

В стандартном базисе матрица Q ортогонального оператора $\mathcal{Q}$ ортогональна: ${}^tQ \cdot Q = \mathbb{I}_n$ и $Q^{-1} = {}^tQ$.
Из $\langle \mathcal{Q}x, \mathcal{Q}x \rangle = \langle x, x \rangle = |x|^2$ следует, что ортогональный оператор сохраняет длины векторов и углы между векторами.
Определитель матрицы ортогонального оператора в любом базисе равен 1 или -1.

Пусть $I \subseteq \mathbb{R}$ — открытое множество (чаще всего интервал).

Определения

Вектор-функцией называется отображение $x : I \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^m}$. Для $t \in I$ имеем $x(t) = {}^t(x^1(t), x^2(t), \ldots, x^m(t))$, t — параметр, время, момент.
Предел $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{1}{\Delta t}(x(t+\Delta t) - x(t))$, если он существует, называется *производной* вектор-функции $x(t)$. Обозначения: $\dot{x}(t)$, $\dfrac{d}{dt}x(t)$, $\dfrac{dx}{dt}$.
Как обычно, определяются производные высших порядков. Вектор-функция называется *гладкой*, если она имеет производные всех порядков.

Оператор $\dfrac{d}{dt}$ является линейным на линейном пространстве всех гладких вектор-функций из I в $\overrightarrow{\mathbb{R}^m}$.
Из вектор-функций можно строить новые функции. Например, пусть

$$x, y : I \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^m},\ \lambda : I \longrightarrow \mathbb{R},\ x : I \longrightarrow \mathbb{R}^{k \times n},\ y : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n \times m}.$$

Тогда $\langle x(t), y(t)\rangle$ — скалярное произведение, $x(t) \times y(t)$ — векторное произведение (при $m = 3$), $\lambda(t)x(t)$ — произведение скалярной и вектор-функции, $x(t) \cdot y(t)$ — произведение матриц, $\det(x(t))$ (при $k = n$) — определитель матрицы.

Как дифференцировать определенные только что конструкции? Все они линейны по аргументам, являющимся векторами (или столбцами определителя).

Определение

Отображение $\mathcal{B} : \overrightarrow{\mathbb{R}^k} \times \overrightarrow{\mathbb{R}^n} \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^m}$ называется *билинейным*,если оно линейно по каждому аргументу, т.е. для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $x, x_1, x_2 \in \overrightarrow{\mathbb{R}^k}$, $y, y_1, y_2 \in \overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ справедливы равенства

$$\mathcal{B}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y) = \alpha_1 \mathcal{B}(x_1, y) + \alpha_2 \mathcal{B}(x_2, y)$$
$$\mathcal{B}(x, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2) = \alpha_1 \mathcal{B}(x, y_1) + \alpha_2 \mathcal{B}(x, y_2).$$

Аналогично определяется *полилинейное* отображение

$$\mathcal{P} : \overrightarrow{\mathbb{R}^{k_1}} \times \overrightarrow{\mathbb{R}^{k_2}} \times \ldots \times \overrightarrow{\mathbb{R}^{k_s}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^m}.$$

Будет ли билинейное (соответственно полилинейное) отображение непрерывным?
Да, будет. На следующем слайде это доказано для случая билинейных отображений. В случае полилинейных отображений доказательство проводится сходным образом.

Теорема

Произвольное билинейное отображение является непрерывным.

$\Downarrow$Пусть $\mathcal{B} : \overrightarrow{\mathbb{R}^k} \times \overrightarrow{\mathbb{R}^n} \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^m}$ — билинейное отображение. Докажем, что для любых последовательностей векторов $\{x_p\}_1^\infty \subset \overrightarrow{\mathbb{R}^k}$ и $\{y_q\}_1^\infty \subset \overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ из того, что существуют $\lim_{p\to\infty} x_p = x_0$ и $\lim_{q\to\infty} y_q = y_0$ следует, что существует $\lim_{p,q\to\infty} \mathcal{B}(x_p, y_q) = \mathcal{B}(x_0, y_0)$.
Зафиксируем базисы $(e_1, \ldots, e_k)$, $(f_1, \ldots, f_n)$, $(g_1, \ldots, g_m)$ в пространствах $\overrightarrow{\mathbb{R}^k}$, $\overrightarrow{\mathbb{R}^n}$, $\overrightarrow{\mathbb{R}^m}$ соответственно. Тогда, используя обозначения Эйнштейна, имеем $x_0 = e_i\xi^i_{(0)}$, $x_p = e_i\xi^i_{(p)}$, $y_0 = f_j\eta^j_{(0)}$, $y_q = f_j\eta^j_{(q)}$, $\mathcal{B}(x_p, y_q) = g_r\zeta^r_{(pq)}$.
Далее, $\mathcal{B}(x_p, y_q) = \mathcal{B}(e_i\xi^i_{(p)}, f_j\eta^j_{(q)}) = \xi^i_{(p)}\eta^j_{(q)}\mathcal{B}(e_i, f_j)$. Пусть $\mathcal{B}(e_i, f_j) = g_r\beta^r_{ij}$. Тогда $\mathcal{B}(x_p, y_q) = \xi^i_{(p)}\eta^j_{(q)}\mathcal{B}(e_i, f_j) = g_r\beta^r_{ij}\xi^i_{(p)}\eta^j_{(q)}$.
Значит, $g_r\zeta^r_{(pq)} = g_r\beta^r_{ij}\xi^i_{(p)}\eta^j_{(q)}$ и $\zeta^r_{(pq)} = \beta^r_{ij}\xi^i_{(p)}\eta^j_{(q)}$.
Из $\lim_{p\to\infty} x_p = x_0$ следует $\lim_{p\to\infty} \xi^i_{(p)} = \xi^i_{(0)}$ при всех $i = 1, \ldots, k$, а из $\lim_{q\to\infty} y_q = y_0$ следует $\lim_{q\to\infty} \eta^j_{(p)} = \eta^j_{(0)}$ при всех $j = 1, \ldots, n$. Поэтому $\lim_{p,q\to\infty} \beta^r_{ij}\xi^i_{(p)}\eta^j_{(q)} = \beta^r_{ij}\xi^i_{(0)}\eta^j_{(0)}$ при всех $r = 1, \ldots, m$. Таким образом, требуемое доказано.$\Uparrow$
Аналогично можно доказать, что произвольное линейное отображение конечномерного еклидова пространства в любое евклидово пространство является непрерывным.

Лемма 1

Пусть $\mathcal{B} : \overrightarrow{\mathbb{R}^k} \times \overrightarrow{\mathbb{R}^n} \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^m}$ — билинейное отображение и вектор-функции $x : I \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^k}$, $y : I \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^n}$ дифференцируемы на I. Тогда вектор-функция $z : I \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^m}$, определенная равенством $z(t) = \mathcal{B}(x(t), y(t))$, дифференцируема и $\dot{z} = \mathcal{B}(\dot{x}, y) + \mathcal{B}(x, \dot{y})$.

$\Downarrow$ Имеем $\frac{1}{\Delta t}(z(t+\Delta t) - z(t)) = \frac{1}{\Delta t}[\mathcal{B}(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t) - \mathcal{B}(x(t), y(t))] =$
$= \frac{1}{\Delta t}[\mathcal{B}(x(t+\Delta t), y(t+\Delta t)) - \mathcal{B}(x(t), y(t+\Delta t)) + \mathcal{B}(x(t), y(t+\Delta t)) -$
$- \mathcal{B}(x(t), y(t))] =$
$= \mathcal{B}(\frac{1}{\Delta t}(x(t+\Delta t) - x(t)), y(t+\Delta t)) + \mathcal{B}(x(t), \frac{1}{\Delta t}(y(t+\Delta t) - y(t)) \longrightarrow_{\Delta t \to 0}$
$\longrightarrow_{\Delta t \to 0} \mathcal{B}(\dot{x}(t), y(t)) + \mathcal{B}(x(t), \dot{y}(t))$ в силу непрерывности отображения $\mathcal{B}$.$\Uparrow$

Сходным образом может быть доказана

Лемма 2

Пусть $\mathcal{P} : \overrightarrow{\mathbb{R}^{k_1}} \times \overrightarrow{\mathbb{R}^{k_2}} \times \ldots \times \overrightarrow{\mathbb{R}^{k_s}} \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^m}$ — полилинейное отображение и вектор-функции $x_j(t) : I \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^{k_j}}$ дифференцируемы на I при всех $j = 1, \ldots, s$. Тогда вектор-функция $z(t) : I \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^m}$, определенная равенством $z(t) = \mathcal{P}(x_1(t), \ldots, x_s(t))$, дифференцируема и $\dot{z} = \sum\limits_{j=1}^{s} \mathcal{P}(x_1, \ldots, x_{j-1}, \dot{x}_j, x_{j+1}, \ldots, x_s)$.

Следствие

Для дифференцируемых вектор-функций $x, y, x_k : I \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^m}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ имеют место равенства:
1) $\langle x, y\rangle^{\bullet} = \langle \dot{x}, y\rangle + \langle x, \dot{y}\rangle$ (производная скалярного произведения);
2) $\langle x, x\rangle^{\bullet} = (|x|^2)^{\bullet} = 2\langle x, \dot{x}\rangle$; (производная скалярного квадрата)
3) при $x(t) \neq \vec{0}$ $\forall t \in I$ $|x|^{\bullet} = \dfrac{\langle x, \dot{x}\rangle}{|x|}$ (производная длины вектора);
4) $(x \times y)^{\bullet} = \dot{x} \times y + x \times \dot{y}$ при $m = 3$ (производная векторного произведения);
5) $\det([x_1, x_2 \ldots, x_m])^{\bullet} = \sum\limits_{i=1}^{m} \det([x_1, \ldots, \dot{x}_i, \ldots, x_m])$ (производная определителя).
6) Для дифференцируемых матричных функций $X : I \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times n}$ и $Y : I \longrightarrow \mathbb{R}^{n\times k}$ имеет место равенство $(X \cdot Y)^{\bullet} = \dot{X} \cdot Y + X \cdot \dot{Y}$ (производная произведения матриц).

Пусть $a : I \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times m}$ — матричная функция, $a(t) = (a_{ij}(t))_{m\times m}$, $A^{ij}(t)$ — алгебраическое дополнение к элементу $a_{ij}(t)$ в определителе $\det(a(t))$.

Убедиться, что $\det(a(t))^{\bullet} = \sum\limits_{i,j}^{m} A^{ij}(t)\dot{a_{ij}}(t)$.

Докажем утверждение 3):

$$|x|^{\bullet} = \left(\sqrt{\langle x, x\rangle}\right)^{\bullet} = \frac{\langle x, x\rangle^{\bullet}}{2\sqrt{\langle x, x\rangle}} = \frac{2\langle x, \dot{x}\rangle}{2\sqrt{\langle x, x\rangle}} = \frac{\langle x, \dot{x}\rangle}{|x|}.$$

Факт

Пусть $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкая вектор-функция. Тогда $|x(t)| \equiv C$, где C — константа, в том и только в том случае, когда $x(t) \perp \dot{x}(t)$ в любой момент $t \in I$.

$\Downarrow$Цепочка эквивалентных утверждений:

$|x(t)| \equiv C \iff \langle x(t), x(t)\rangle \equiv \mathrm{const} \iff \frac{d}{dt}\langle x(t), x(t)\rangle \equiv 0 \iff \langle x(t), \dot{x}(t)\rangle + \langle \dot{x}(t), x(t)\rangle \equiv 0 \iff \langle \dot{x}(t), x(t)\rangle \equiv 0 \iff x(t) \perp \dot{x}(t) \forall t \in I.$$\Uparrow$

Формула Тейлора

Пусть $x : I \longrightarrow \mathbb{R}^m$ — гладкая вектор-функция, $t, t_0 \in I$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда

$$x(t) = x(t_0) + \dot{x}(t_0)(t - t_0) + \frac{\ddot{x}(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \ldots + \frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + o(t - t_0)^n.$$

Остаточный член приведен в форме Пеано.

Об интегрировании вектор-функций

Пусть $x : I \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^m}$, $x(t) = (x^1(t), \dots, x^m(t)) = \sum\limits_{i=1}^{m} x^i(t)e_i$. Тогда по определению $\int_a^b x(t)dt = \int_a^b \left(\sum\limits_{i=1}^{m} x^i(t)e_i\right) dt = \sum\limits_{i=1}^{m} \left(\int_a^b x^i(t)dt\right) e_i = \left(\int_a^b x^1(t)dt, \dots, \int_a^b x^m(t)dt\right)$.

Формула Ньютона-Лейбница для вектор-функций

$$\int_a^b \dot{x}(t)dt = x(b) - x(a)$$

Убедимся, что имеет место равенство $\int_a^b \langle y_0, x(t)\rangle dt = \left\langle y_0, \int_a^b x(t)dt \right\rangle$.

Пусть $x(t) = (x^1(t), \dots, x^m(t)) = \sum\limits_{i=1}^{m} x^i(t)e_i$, $y_0 = \sum\limits_{i=1}^{m} y_0^i e_i$. Тогда $\left\langle y_0, \int_a^b x(t)dt \right\rangle = \sum\limits_{i=1}^{m} y_0^i \int_a^b x^i(t)dt = \int_a^b \left(\sum\limits_{i=1}^{m} y_0^i x^i(t)\right) dt = \int_a^b \langle y_0, x(t)\rangle dt$.

Обоснование существования обобщенного векторного произведения

Пусть $\vec{V}$ – евклидово пространство размерности n, и $(e_1, \ldots, e_n)$ – фиксированный ортонормированный базис $\vec{V}$.

Теорема

Для любой линейно независимой системы векторов $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ пространства $\vec{V}$ существует единственный вектор b такой, что $b \in \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_{n-1})^{\perp}$, $|b| = V_{a_1, \ldots, a_{n-1}}$ и базисы $(e_1, \ldots, e_n)$ и $(a_1, \ldots, a_{n-1}, b)$ одинаково ориентированы.

Определение

Пусть $\vec{V}$ – евклидово пространство размерности n, и $(e_1, \ldots, e_n)$ – фиксированный ортонормированный базис $\vec{V}$, определяющий положительную ориентацию. Если система векторов $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ пространства $\vec{V}$ линейно зависима, то *обобщенное векторное произведение* ее векторов равно 0_V. Если система векторов $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ пространства $\vec{V}$ линейно независима, то обобщенное векторное произведение ее векторов равно вектору b, упомянутому в теореме сл.41: $b \in \mathcal{L}(a_1, \ldots, a_{n-1})^{\perp}$, $|b| = V_{a_1, \ldots, a_{n-1}}$ и базис $(a_1, \ldots, a_{n-1}, b)$ положительно ориентирован.
Обозначение: $a_1 \times \ldots \times a_{n-1}$.

Вычислять обобщенное векторное произведение векторов $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ по их координатам ($[a_j] = {}^t(\alpha_{1j}, \ldots, \alpha_{nj})$, $j = 1, \ldots, n$) в базисе $(e_1, \ldots, e_n)$ удобно, разлагая символический определитель

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1,n-1} & e_1 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2,n-1} & e_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \ldots & \alpha_{n,n-1} & e_n \end{vmatrix}$$

по последнему столбцу.

Свойства обобщенного векторного произведения

Предложение

1. Обобщенное векторное произведение антикоммутативно по любой паре аргументов.
2. Обобщенное векторное произведение равно нулю тогда и только тогда, когда его аргументы линейно зависимы.
3. Обобщенное векторное произведение линейно по любому аргументу.

$\Downarrow$ Все перечисленные свойства получаются из определения обобщенного векторного произведения с помощью определителя применением свойств определителя, касающихся его столбцов.$\Uparrow$

Пример

В евклидовом пространстве $\overrightarrow{\mathbb{R}^4}$ вычислить $b = a_1 \times a_2 \times a_3$ для векторов $a_1 = (1, 2, 3, 4)$, $a_2 = (3, 4, 5, 6)$, $a_3 = (2, 3, 5, 4)$.

Запишем символический определитель и разложим его по последнему столбцу: $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & e_1 \\ 2 & 4 & 3 & e_2 \\ 3 & 5 & 5 & e_3 \\ 4 & 6 & 4 & e_4 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix} e_1 + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 5 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix} e_2 - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 4 & 6 & 4 \end{vmatrix} e_3 + \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 5 & 5 \end{vmatrix} e_4 = -6e_1 + 10e_2 - 2e_3 - 2e_4$. Таким образом, $b = (-6, 10, -2, -2)$.

В 3-мерном евклидовом пространстве V_g обобщенное векторное произведение совпадает с векторным произведением, рассматривавшимся в аналитической геометрии. Мы получаем еще одну формулу для вычисления координат векторного произведения в правом ортонормированном базисе: координаты векторного произведения векторов $\vec{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ и $\vec{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ их векторное произведение $[\vec{a}, \vec{b}] = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \vec{e}_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \vec{e}_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \vec{e}_3 \end{vmatrix}$. Этот определитель равен определителю $\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}$, с помощью которого вычисляются координаты векторного произведения в аналитической геометрии.

Лемма

Пусть $x_1, \ldots, x_{m-1} : I \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^m}$ — дифференцируемые вектор-функции такие что для любого $t \in I$ векторы $x_1(t), \ldots, x_{m-1}(t)$ линейно независимы. Тогда существует единственная дифференцируемая вектор-функция $n : I \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^m}$, обладающая свойствами: для любого $t \in I$
1) $n(t) \perp x_1(t), \ldots, n(t) \perp x_{m-1}(t)$;
2) $\det([x_1(t), \ldots, x_{m-1}(t), n(t)]) > 0$;
3) $|n(t)| = 1$.

$\Downarrow$Положим $N(t) = x_1(t) \times \ldots \times x_{m-1}(t)$ — обобщенное векторное произведение. По формуле сл.42 ненулевой вектор $N(t)$ имеет в качестве координат миноры матрицы $[x_1(t), \ldots, x_{m-1}(t)]$, полученные вычеркиванием одной (i-й) строки, умноженные на $(-1)^{i+m}$. Согласно следствию сл.38 $n : I \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^m}$ — дифференцируемая вектор-функция. Нормировав ее, получим требуемую функцию $n : I \longrightarrow \overrightarrow{\mathbb{R}^m}$. Единственность следует из того, что согласно свойствам обобщенного векторного произведения свойства 1) и 2) функции $n(t)$ влекут за собой равенство $n(t) = \alpha(t)N(t)$ для некоторой положительной функции $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}$.$\Uparrow$
Эта лемма имеет сходство с леммой сл.32, но не является ее следствием.

Понятие аффинного пространства является обобщением понятия пространства точек в аналитической геометрии. Пусть $\vec{V}$ – конечномерное линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, V – непустое множество (его элементы называются *точками* и обозначаются малыми латинскими буквами), $+ : V \times \vec{V} \longrightarrow V$ – отображение (операция откладывания вектора от точки). Элементы пространства $\vec{V}$ называются, как обычно, векторами, и обозначаются в слайдах 40-48 малыми латинскими буквами со стрелками: $\vec{a}$.

Определение

Аффинным пространством над полем F называется тройка $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$, если выполняются следующие условия:

1. $\forall p \in V \ \forall \vec{x} \in \vec{V} \ \exists! q \in V : \quad p + \vec{x} = q$,
2. $\forall p \in V \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in \vec{V} : \quad (p + \vec{x}) + \vec{y} = p + (\vec{x} + \vec{y})$,
3. $\forall p, q \in V \ \exists! \vec{x} \in \vec{V} : \quad p + \vec{x} = q$ (обозначение: $\vec{x} = \overrightarrow{pq} = q - p$).

Размерностью аффинного пространства $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$ называется $\dim \vec{V}$. Обозначение: $\dim \boldsymbol{V}$.

Примеры аффинных пространств

1. Геометрическое пространство

Множество точек – множество всех точек, рассматриваемых в геометрии; линейное пространство – V_g; операция откладывания вектора от точки определена в аналитической геометрии, здесь мы считаем, что $A + \overrightarrow{AB} = B$ для любых точек A, B.

2. Аффинное арифметическое пространство над полем F

$\boldsymbol{V} = (F^n, \overrightarrow{F^n}, +)$.

Элементы множества F^n рассматриваются и как точки, и как векторы, во втором случае используется обозначение $\overrightarrow{F^n}$. Если $p = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in F^n$, $\vec{x} = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \overrightarrow{F^n}$, то по определению $p + \vec{x} = q$, где $q = (\alpha_1 + \xi_1, \ldots, \alpha_n + \xi_n) \in F^n$.

3. Аффинное арифметическое пространство над полем $\mathbb{R}$

$\boldsymbol{V} = (\mathbb{R}^n, \overrightarrow{\mathbb{R}^n}, +)$.

Предложение

Пусть $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем F. Тогда для любых $p, q, r \in V$ справедливы равенства

1. $p + \vec{0} = p$,
2. $p + \overrightarrow{pq} = q$,
3. $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \overrightarrow{pr}$,
4. $\overrightarrow{qp} = -\overrightarrow{pq}$.

$\Downarrow$ Для доказательства утверждения 1 используем аксиому 1 определения аффинного пространства (сл.47): существует единственный вектор $\vec{x} \in \vec{V}$ такой что $p + \vec{x} = p$. Тогда по аксиоме 2
$p + \vec{0} = (p + \vec{x}) + \vec{0} = p + (\vec{x} + \vec{0}) = p + \vec{x} = p$, т.е. $p + \vec{0} = p$.
Второе равенство следует из аксиомы 3.
Для доказательства утверждения 3 используем аксиому 2 и утверждение 2: имеем $p + (\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}) = (p + \overrightarrow{pq}) + \overrightarrow{qr} = q + \overrightarrow{qr} = r$, т.е. $p + (\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}) = r$.
Отсюда в силу аксиомы 3 следует утверждение 3.
Чтобы доказать утверждение 4, заметим, что $p + \overrightarrow{pq} = q$, $q + \overrightarrow{qp} = p$, откуда $p = (p + \overrightarrow{pq}) + \overrightarrow{qp} = p + (\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qp})$, т.е. $p = p + (\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qp})$.
Следовательно, $\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qp} = \vec{0}$, что и требуется доказать.$\Uparrow$

Пусть $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем F, $\dim \boldsymbol{V} = n$.

Определение

Репером (или *системой координат*) в аффинном пространстве $\boldsymbol{V}$ называется совокупность $(o; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ из точки $o \in V$ и базиса $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ линейного пространства $\vec{V}$.
Координатами точки $p \in V$ в репере $(o; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ называются координаты вектора $\overrightarrow{op}$ в базисе $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ линейного пространства $\vec{V}$. Обозначение: $p(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ или $[p] = {}^t(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$; таким образом, $\overrightarrow{op} = \gamma_1 \vec{e}_1 + \ldots + \gamma_n \vec{e}_n$.
Вектор $\overrightarrow{op}$ называется *радиус-вектором* точки p.

Предложение

Если в репере $(o; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ даны координаты точек $p(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$ и $q(\delta_1, \ldots, \delta_n)$, то координаты вектора $\overrightarrow{pq}$ в базисе $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ суть $[\overrightarrow{pq}] = {}^t(\delta_1 - \gamma_1, \ldots, \delta_n - \gamma_n)$.

В самом деле, согласно утверждению 2 предложения сл.49 имеем $\overrightarrow{op} + \overrightarrow{pq} = \overrightarrow{oq}$, откуда непосредственно следует требуемое.

Пусть $p \in \mathbb{R}^m$. *Вектором в точке* (или *вектором, отложенным от точки*) p называется упорядоченная пара (p, q) точек из $\mathbb{R}^m$ или пара $(p, \vec{v})$, где $\vec{v} = q - p \in \overrightarrow{\mathbb{R}^m}$. Множество всех векторов в точке p обозначается через $\mathrm{T}_p\mathbb{R}^m$ и называется *центроаффинным пространством* к $\mathbb{R}^m$ в точке p (см. рис. 1). В этом множестве естественным образом определяются линейные операции:
$(p, \vec{u}) + (p, \vec{v}) = (p, \vec{u} + \vec{v})$, $\lambda(p, \vec{v}) = (p, \lambda\vec{v})$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$,
а также скалярное произведение $\langle (p, \vec{u}), (p, \vec{v}) \rangle = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$. Относительно этих линейных операций и скалярного произведения центроаффинное пространство $\mathrm{T}_p\mathbb{R}^m$ является евклидовым векторным пространством. Отметим, что для векторов $(p, \vec{u})$ и $(q, \vec{v})$при $p \neq q$ операции не определяются.

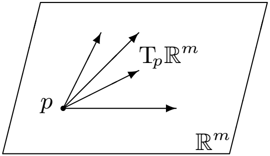

Рис. 1

Определение

Аффинное пространство $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ называется *евклидовым*, если $\vec{V}$ – евклидово пространство.

Тогда V превращается в метрическое пространство путем определения расстояния между точками $p, q \in V$: $\rho(p,q) = |\overrightarrow{pq}|$. Проверим аксиомы метрического пространства. Ясно, что $\rho(p,q) \geq 0$, $\rho(p,q) = 0 \Leftrightarrow p = q$, $\rho(p,q) = \rho(q,p)$. Так как $|\overrightarrow{pr}| = |\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}| \leq |\overrightarrow{pq}| + |\overrightarrow{qr}|$, заключаем, что $\rho(p,r) \leq \rho(p,q) + \rho(q,r)$.
Примеры: геометрические пространства на плоскости или в пространстве; аффинные арифметические пространства $(\mathbb{R}^n, \overrightarrow{\mathbb{R}^n}, +)$ над полем $\mathbb{R}$ при $n = 2, 3, \ldots$.

Замечание

В дифференциальной геометрии чаще всего используется аффинное евклидово пространство $(\mathbb{R}^m, \overrightarrow{\mathbb{R}^m}, +)$.

Если на двух экземплярах одного и того же аффинного пространства $(V, \vec{V}, +)$ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ задать различные скалярные произведения, то получатся различные евклидовы пространства.

Пусть $(V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем F.

Определение

Аффинным преобразованием аффинного пространства $(V, \vec{V}, +)$ называется пара отображений $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}})$, где $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$, $\vec{\mathcal{A}} \in \mathrm{Hom}(\vec{V}, \vec{V})$ и для любых $p \in V$, $\vec{x} \in \vec{V}$ имеет место равенство $\mathcal{A}(p + \vec{x}) = \mathcal{A}p + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}$.

Обозначать аффинное преобразование $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}})$ будем обозначать просто через $\mathcal{A}$.

Последнее условие из определения аффинного преобразования равносильно тому, что для любых точек $p, q \in V$ имеет место равенство $\vec{\mathcal{A}}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\mathcal{A}p\mathcal{A}q}$.

Примеры аффинных преобразований

1. Аффинным преобразованием аффинного пространства $(V, \vec{V}, +)$ является *сдвиг* на вектор $\vec{a} \in \vec{V}$, определяемый следующим образом: $\mathcal{T}_{\vec{a}}(p) = p + \vec{a}$, $\vec{\mathcal{T}}_{\vec{a}} = \mathcal{E}$.
2. Аффинным преобразованием аффинного пространства $(V, \vec{V}, +)$ является *центроаффинное преобразование*, определяемое так: $\vec{\mathcal{A}} \in \mathrm{Hom}(\vec{V})$ – произвольный линейный оператор, $c \in V$ – фиксированная точка (центр), $\mathcal{A}p = c + \vec{\mathcal{A}}(\overrightarrow{cp})$ для любой точки $p \in V$.

Предложение

Прозведение двух аффинных преобразований аффинного пространства $\boldsymbol{V}$ является аффинным преобразованием.

$\Downarrow$Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – аффинные преобразования аффинного пространства $\boldsymbol{V}$, $p \in V$, $\vec{x} \in \vec{V}$. Тогда $\mathcal{B}(\mathcal{A}(p + \vec{x})) = \mathcal{B}(\mathcal{A}p + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}p) + \vec{\mathcal{B}}(\vec{\mathcal{A}}\vec{x}) = (\mathcal{B}\mathcal{A})p + (\vec{\mathcal{B}}\vec{\mathcal{A}})\vec{x}$, т.е. $\mathcal{B}\mathcal{A}$ – аффинное преобразование.$\Uparrow$

Пусть $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное евклидово пространство и $\dim \boldsymbol{V} = n$. Определение расстояния между точками аффинного евклидова пространства см. на сл.52.

Определение

Отображение $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$ называется *изометрией*, если $\rho(p, q) = \rho(\mathcal{A}p, \mathcal{A}q)$ для любых $p, q \in V$.

Примеры изометрий

1. Изометрией является сдвиг на вектор $\vec{a} \in \vec{V}$ (см. сл.54).
2. Изометрией является центроаффинное преобразование, у которого линейный оператор является ортогональным. Такое преобразование называется *ортогональным* с центром c.

Напомним, что согласно утверждению сл.33 определитель любой матрицы ортогонального оператора равен 1 или -1.

Определения

Будем говорить, что изометрия $\mathcal{A}$ аффинного евклидова пространства *сохраняет ориентацию*, если определитель любой матрицы ее ортогонального оператора $\vec{\mathcal{A}}$ равен 1. Такая изометрия называется также *движением* или *движением первого рода*.

Весь материал этого параграфа можно найти в §1 книги [1].