

# Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 1

1. Даны векторы  $\vec{a} = (1, 3, -5)$ ,  $\vec{b} = (-2, 4, -1)$  и  $\vec{c} = (1, -2, 1)$ . Найти вектор  $\vec{x}$  такой, что  $\vec{x} \perp \vec{a}$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{x} = -1$  и  $\vec{c} \cdot \vec{x} = 1$ .

2. Даны векторы  $\vec{a} = (1, 2, -1)$ ,  $\vec{b} = (2, 0, 1)$  и  $\vec{c} = (-1, 1, -2)$ . Найти вектор  $[\vec{a} + \vec{c}, [\vec{b}, \vec{c}]] - (\vec{a}(\vec{b} + 2\vec{c}))\vec{b}$ .

3. Даны векторы  $\vec{p} = (3, -2, 1)$ ,  $\vec{q} = (-1, 1, -2)$ ,  $\vec{r} = (2, 1, -3)$  и  $\vec{s} = (11, -6, 5)$ . Проверить, что векторы  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  образуют базис и найти координаты вектора  $\vec{s}$  в этом базисе.

4. Точка  $A(2, 0)$  является вершиной правильного треугольника, а противолежащая ей сторона лежит на прямой  $\ell : x + y - 1 = 0$ . Составить уравнения двух других сторон.

5. Даны уравнения параллельных прямых  $9x - 7y - 130 = 0$  и  $9x - 7y - 162 = 0$ . Найти уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

# Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 2

1. Точка  $A$  в некоторой системе координат имеет координаты  $(1, -\sqrt{3})$ . Найти ее координаты в системе координат, полученной поворотом исходной системы координат на угол  $30^\circ$ .

2. Найти объем параллелипипеда, построенного на векторах  $\vec{a} = (6, 1, 0)$ ,  $\vec{b} = (1, -3, 4)$  и  $\vec{c} = (0, 1, -3)$ .

3. Определить координаты концов отрезка, который точками  $A(2, 2)$  и  $B(5, 8)$  разделен на три равные части.

4. Основание равнобедренного треугольника лежит на прямой  $\ell_1 : x + 2y - 2 = 0$ , а одна из боковых сторон — на прямой  $\ell_2 : 2x + y - 1 = 0$ . Расстояние от другой боковой стороны до точки  $\ell_1 \cap \ell_2$  равно  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ . Составить уравнение этой боковой стороны.

5. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(1, 1)$ ,  $B(2, 2)$ ,  $C(4, 6)$ .

# Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 3

1. Даны векторы  $\vec{a} = (1, -1, 0)$  и  $\vec{b} = (1, -2, 1)$ . Найти вектор  $\vec{c}$  длины  $2\sqrt{3}$ , ортогональный  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и направленный так, что тройка  $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$  – левая.

2. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ортогональны, вектор  $\vec{c}$  образует с ними углы, равные  $\frac{\pi}{3}$ . Зная, что  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 5$  и  $|\vec{c}| = 8$ , вычислить скалярное произведение  $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c})$ .

3. Точка  $A$  в некоторой системе координат имеет координаты  $(-1, \sqrt{3})$ . Найти ее координаты в системе координат, полученной поворотом исходной системы координат на угол  $60^\circ$ .

4. Найти радиус и координаты центра окружности, проходящей через точку  $A(-1, 3)$  и касающихся прямых  $\ell_1 : 7x + y = 0$  и  $\ell_2 : x - y + 8 = 0$ .

5. Даны уравнения параллельных прямых  $3x - 4y - 25 = 0$  и  $3x - 4y - 39 = 0$ . Найти расстояние между прямыми.

## Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 4

1. Даны векторы  $\vec{a} = (-1, 2, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, 3, 2)$  и  $\vec{c} = (2, 2, 0)$ . Найти вектор  $[[\vec{a}, -\vec{b}], \vec{a} + \vec{c}] - (\vec{a}\vec{c})(2\vec{b} - \vec{c})$ .

2. Даны векторы  $\vec{a} = (2, 3, -3)$ ,  $\vec{b} = (-1, 2, 3)$  и  $\vec{c} = (1, -2, 4)$ . Найти вектор  $\vec{x}$  такой, что  $\vec{x} \perp \vec{b}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{x} = -4$  и  $\vec{c} \cdot \vec{x} = 7$ .

3. Даны векторы  $\vec{a} = (-1, 2, 0)$ ,  $\vec{b} = (-1, 5, 1)$ ,  $\vec{c} = (1, 1, 2)$  и  $\vec{x} = (2, 5, 5)$ . Проверить, что векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  образуют базис и найти координаты вектора  $\vec{x}$  в этом базисе.

4. Гипotenуза прямоугольного треугольника лежит на прямой  $\ell_1 : 2x + y - 2 = 0$ , а точка  $A(3, -1)$  является вершиной прямого угла. Площадь треугольника равна  $\frac{9}{4}$ . Составить уравнения прямых, на которых лежат катеты этого треугольника.

5. Даны уравнения параллельных прямых  $2x + 3y - 13 = 0$  и  $2x + 3y - 11 = 0$ . Найти уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

# Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 5

1. Выяснить, лежат ли точки  $A(2, 5, -1)$ ,  $B(-4, 1, 2)$ ,  $C(1, 2, -3)$  и  $D(0, 2, 1)$  в одной плоскости.

2. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ортогональны, вектор  $\vec{c}$  образует угол  $\frac{\pi}{3}$  с вектором  $\vec{a}$  и угол  $\frac{\pi}{6}$  с вектором  $\vec{b}$ . Зная, что  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$  и  $|\vec{c}| = 4$ , вычислить скалярное произведение  $(\vec{a} - 3\vec{b})(2\vec{b} + \vec{c})$ .

3. Отрезок, ограниченный точками  $A(-1, 8, 3)$  и  $B(9, -7, -2)$ , разделен точками  $C, D, E, F$  на пять равных частей. Найти координаты этих точек.

4. На плоскости даны три точки  $A(2, 3)$ ,  $B(1, 4)$ ,  $C(-1, 2)$ , и прямая  $\ell : x - 5y + 7 = 0$ . Составить уравнение этой прямой в системе координат  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ .

5. Найти длину биссектрисы  $AD$  треугольника  $ABC$ :  $A(0, 0)$ ,  $B(4, 3)$ ,  $C(6, 8)$ .

Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 6

1. Даны точки  $A(1, 2, 0)$ ,  $B(3, 0, -3)$  и  $C(5, 2, 6)$ . Вычислить площадь  $\triangle ABC$ .
2. Даны векторы  $\vec{a} = (4, -1, 2)$ ,  $\vec{b} = (-1, -2, 6)$  и  $\vec{c} = (3, -2, 1)$ . Найти вектор  $\vec{x}$  такой, что  $\vec{x} \perp \vec{c}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{x} = 4$  и  $\vec{b} \cdot \vec{x} = 1$ .
3. Точка  $A$  в некоторой системе координат имеет координаты  $(-1, 3\sqrt{3})$ . В системе координат, полученной поворотом исходной системы координат на некоторый угол  $\alpha$ , та же точка имеет координаты  $(2\sqrt{3}, -4)$ . Найти угол  $\alpha$ .
4. Прямые  $\ell_1 : x - 3y + 2 = 0$  и  $\ell_2 : 3x + 2y - 5 = 0$  являются соответственно осями  $O'x'$  и  $O'y'$  новой системы координат, а точка  $A(-1, 2)$  имеет в новой системе координаты  $(1, 1)$ . Составить в новой системе координат уравнение прямой  $\ell_3$ , которая в исходной системе имеет уравнение  $5x - 4y + 7 = 0$ .
5. Даны две вершины треугольника  $A(2, -2)$ ,  $B(2, 3)$  и точка пересечения медиан  $H(1, 1)$ . Найти третью вершину  $C$ .

# Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 7

1. Найти объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках  $A(2, -1, 1)$ ,  $B(5, 5, 4)$ ,  $C(3, 2, -1)$  и  $D(4, 1, 3)$ .

2. Вектор  $\vec{x}$  ортогонален векторам  $\vec{a} = (1, -2, 2)$  и  $\vec{b} = (2, 1, 0)$  и образует тупой угол с вектором  $\vec{c} = (1, -1, 0)$ . Найти вектор  $\vec{x}$ , зная, что  $|\vec{x}| = 3\sqrt{5}$ .

3. Даны векторы  $\vec{p} = (1, 1, -2)$ ,  $\vec{q} = (2, 1, 0)$ ,  $\vec{r} = (-3, 1, 2)$  и  $\vec{s} = (8, 2, -4)$ . Проверить, что векторы  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  образуют базис и найти координаты вектора  $\vec{s}$  в этом базисе.

4. В прямоугольной декартовой системе координат  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  задана прямая  $\ell : \sqrt{3}x + 2y - 6 = 0$ . Начало новой прямоугольной декартовой системы координат  $(O', \vec{e}_1', \vec{e}_2')$  имеет в исходной системе координаты  $O'(-2, 3)$ , а базисные векторы  $\vec{e}_1', \vec{e}_2'$  получаются из векторов  $\vec{e}_1, \vec{e}_2$  соответственно поворотом на угол  $\pi/6$  в направлении кратчайшего поворота от  $\vec{e}_1$  к  $\vec{e}_2$ . Составить уравнение прямой  $\ell$  в системе координат  $(O', \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ .

5. Найти длину высоты  $AD$  треугольника  $ABC$ :  $A(2, -3)$ ,  $B(3, -4)$ ,  $C(3, -1)$ .

# Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 8

1. Даны векторы  $\vec{a} = (0, 1, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, 1, -2)$  и  $\vec{c} = (1, 2, 1)$ . Найти вектор  $\vec{d}$  длины  $2\sqrt{7}$ , компланарный векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , ортогональный вектору  $\vec{c}$  и направленный так, что тройка  $(\vec{a}, \vec{d}, \vec{c})$  – левая.

2. Даны вершины треугольника  $A(1, 1)$ ,  $B(4, 5)$  и  $C(-5, 9)$ . Найти точку пересечения биссектрисы внутреннего угла при вершине  $A$  со стороной  $BC$ .

3. Даны формулы замены системы координат:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + x'_1 - 2x'_2 + x'_3, \\ x_2 = -1 + 2x'_1 & - x'_3, \\ x_3 = & x'_1 + x'_2 \end{cases}.$$

Старые координаты точки  $M$  есть  $(2, -2, 3)$ . Найти новые координаты этой точки.

4. Прямые  $\ell_1 : 2x - y + 1 = 0$  и  $\ell_2 : x + 2y - 7 = 0$ , заданные в прямоугольной системе координат, являются соответственно осями  $O'x'$  и  $O'y'$  новой системы координат, а точка  $A(2, 0)$  имеет в новой системе положительные координаты. Составить в новой системе координат уравнение прямой  $\ell_3$ , которая в исходной системе имеет уравнение  $4x + y - 1 = 0$ .

5. Составить уравнения сторон треугольника, если дана одна из его вершин  $B(2, 2)$  и уравнения двух высот  $x - 4y = 0$ ,  $x + y - 1 = 0$ .

# Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 9

1. Даны векторы  $\vec{a} = (1, 2, -3)$ ,  $\vec{b} = (-1, 3, -1)$  и  $\vec{c} = (1, 2, 1)$ . Найти вектор  $[[2\vec{a} - \vec{c}, \vec{b}], \vec{a} + 2\vec{c}] - (\vec{b} \cdot \vec{c})(2\vec{a} - \vec{c})$ .

2. Даны векторы  $\vec{a} = (-3, 1, -2)$ ,  $\vec{b} = (0, -2, 1)$  и  $\vec{c} = (2, -1, 5)$ . Найти вектор  $\vec{x}$  такой, что  $\vec{x} \perp \vec{a} + \vec{c}$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{x} = -5$  и  $\vec{c} \cdot \vec{x} = -1$ .

3. Даны векторы  $\vec{p} = (-1, 2, -2)$ ,  $\vec{q} = (2, 1, -3)$ ,  $\vec{r} = (1, 0, 2)$  и  $\vec{s} = (2, 4, -10)$ . Проверить, что векторы  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  образуют базис и найти координаты вектора  $\vec{s}$  в этом базисе.

4. Написать уравнения сторон ромба, зная точку  $M(-1, 4)$  пересечения его диагоналей и по точке на трех его сторонах:  $P(1, -2)$  на стороне  $AB$ ,  $Q(4, 4)$  на стороне  $BC$ ,  $R(3, 7)$  на стороне  $CD$ .

5. Найти проекцию точки  $P(1, -3)$  на прямую, проходящую через точки  $A(3, 0)$  и  $B(1, 2)$ .

# Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 10

1. Выяснить, лежат ли точки  $A(1, 4, 1)$ ,  $B(1, 1, -2)$ ,  $C(-1, 2, 3)$  и  $D(0, 2, 1)$  в одной плоскости.

2. Известно, что  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 4\sqrt{2}$ . Определить, при каком значении параметра  $t$  векторы  $2\vec{a} + t\vec{b}$  и  $2\vec{a} - t\vec{b}$  будут ортогональны.

3. Даны точки  $A(2, -1, 7)$  и  $B(4, 5, -2)$ . В каком отношении делит отрезок  $AB$  точка пересечения прямой  $AB$  с плоскостью  $Oxz$ ?

4. Составить уравнение биссектрисы острого угла между прямыми  $x - 3y = 0$ ,  $3x - y + 5 = 0$ .

5. Составить уравнения сторон треугольника, если дана одна из его вершин  $B(3, 3)$ , уравнения высоты  $x - 4y + 3 = 0$  и медианы  $y - 1 = 0$ , проведенных из одной вершины.

# Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 11

1. Известно, что  $|\vec{a}| = 10$ ,  $|\vec{b}| = 2$  и  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 12$ . Вычислить  $|\vec{a} \times \vec{b}|$ .
2. Даны векторы  $\vec{a} = (-1, 2, 0)$ ,  $\vec{b} = (2, 3, -1)$  и  $\vec{c} = (3, -1, 2)$ . Найти вектор  $\vec{x}$  такой, что  $\vec{x} \perp \vec{b}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{x} = -4$  и  $\vec{c} \cdot \vec{x} = 9$ .
3. Даны две системы координат на плоскости:  $(O; \vec{a}_1, \vec{a}_2)$  и  $(P; \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ , где  $\vec{a}_1 = (2, -1)$ ,  $\vec{a}_2 = (-1, 3)$ ,  $\vec{b}_1 = (8, -9)$ ,  $\vec{b}_2 = (1, 2)$ , а точка  $P$  в системе координат  $(O; \vec{a}_1, \vec{a}_2)$  имеет координаты  $(-1, 2)$ . Точка  $M$  в системе координат  $(O; \vec{a}_1, \vec{a}_2)$  имеет координаты  $(6, -11)$ . Найти ее координаты в системе координат  $(P; \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ .
4. Написать уравнения прямых, проходящих соответственно через точки  $(15, 10)$  и  $(10, 5)$ , зная, что прямая  $x + 2y = 0$  делит пополам углы, образуемые искомыми прямыми.
5. Найти точку  $Q$ , симметричную точке  $P(3, 5)$  относительно прямой, проходящей через точки  $A(1, -1)$  и  $B(4, -2)$ .

## Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 12

1. Даны векторы  $\vec{a} = (1, 5, 3)$ ,  $\vec{b} = (7, 2, -2)$  и  $\vec{c} = (3, -2, 5)$ . Компланарны ли векторы  $\vec{a} + 2\vec{b}$ ,  $\vec{b} \times \vec{c}$  и  $[-\vec{a} + \vec{b}, \vec{b} + 2\vec{c}]$ ?

2. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ортогональны, вектор  $\vec{c}$  образует с ними углы, равные  $\frac{\pi}{4}$ . Зная, что  $|\vec{a}| = 4$ ,  $|\vec{b}| = 1$  и  $|\vec{c}| = 3$ , вычислить скалярное произведение  $(2\vec{a} + \vec{b})(\vec{b} - 3\vec{c})$ .

3. Даны векторы  $\vec{p} = (1, 2, 1)$ ,  $\vec{q} = (-1, 4, -2)$ ,  $\vec{r} = (0, 1, -1)$  и  $\vec{s} = (3, 0, 4)$ . Проверить, что векторы  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  образуют базис и найти координаты вектора  $\vec{s}$  в этом базисе.

4. Написать уравнения сторон треугольника, зная одну из его вершин  $(1, 7)$  и уравнения  $2x + 3y - 10 = 0$ ,  $x - 2y + 3 = 0$  перпендикуляров, восстановленных в серединах сторон, выходящих из этой вершины.

5. Даны уравнения параллельных прямых  $9x - 7y - 130 = 0$  и  $9x - 7y - 162 = 0$ . Найти уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

# Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 13

1. Даны векторы  $\vec{a} = (1, 2, 1)$  и  $\vec{b} = (1, 0, -1)$ . Найти вектор  $\vec{c}$  длины  $\sqrt{3}$ , ортогональный  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и направленный так, что тройка  $(\vec{c}, \vec{b}, \vec{a})$  – левая.

2. Даны векторы  $\vec{a} = (-2, 1, 2)$ ,  $\vec{b} = (1, -1, 3)$  и  $\vec{c} = (-3, -2, 1)$ . Найти вектор  $\vec{x}$  такой, что  $\vec{x} \perp \vec{a}$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{x} = 9$  и  $\vec{c} \cdot \vec{x} = 3$ .

3. Определить координаты концов отрезка, который точками  $A(1, 7)$  и  $B(-5, 1)$  разделен на три равные части.

4. Даны две прямые  $3x + 4y - 2 = 0$ ,  $5x - 12y - 4 = 0$  и точка  $(1, 1)$ . Внутри угла, образованного данными прямыми и содержащего данную точку, найти такую точку, чтобы ее расстояния от данных прямых были равны соответственно 3 и 1.

5. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(1, 1)$ ,  $B(2, 2)$ ,  $C(4, 6)$ .

# Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 14

1. Даны векторы  $\vec{a} = (-1, 2, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, 3, 2)$  и  $\vec{c} = (2, 2, 0)$ . Найти вектор  $[[\vec{a} + \vec{b}, \vec{b}], 2\vec{c}] - (\vec{c}\vec{b})(2\vec{b} + \vec{c})$ .

2. Вектор  $\vec{x}$  ортогонален векторам  $\vec{a} = (2, 1, -2)$  и  $\vec{b} = (0, 2, 1)$  и образует острый угол с вектором  $\vec{c} = (0, 1, -1)$ . Найти вектор  $\vec{x}$ , зная, что  $|\vec{x}| = \sqrt{5}$ .

3. Даны векторы  $\vec{p} = (1, 1, -2)$ ,  $\vec{q} = (1, 2, 0)$ ,  $\vec{r} = (1, -3, 2)$  и  $\vec{s} = (-1, 7, -6)$ . Проверить, что векторы  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  образуют базис и найти координаты вектора  $\vec{s}$  в этом базисе.

4. Написать уравнения сторон квадрата, описанного около окружности с центром  $(1, 9)$  и радиусом  $5$ , зная, что одна из его диагоналей параллельна прямой  $x - 7y = 0$ .

5. Даны уравнения параллельных прямых  $3x - 4y - 25 = 0$  и  $3x - 4y - 39 = 0$ . Найти расстояние между прямыми.

# Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 15

1. Выяснить, лежат ли точки  $A(1, 1, 1)$ ,  $B(2, 1, 0)$ ,  $C(-1, 1, 3)$ ,  $D(5, -1, 2)$  в одной плоскости.

2. Даны вершины треугольника  $A(7, 6)$ ,  $B(3, 3)$  и  $C(1, -2)$ . Найти точку пересечения биссектрисы внутреннего угла при вершине  $A$  со стороной  $BC$ .

3. Даны две системы координат на плоскости:  $(O; \vec{a}_1, \vec{a}_2)$  и  $(P; \vec{b}_1, \vec{b}_2)$ , где  $\vec{a}_1 = (3, -1)$ ,  $\vec{a}_2 = (-1, 2)$ ,  $\vec{b}_1 = (2, 1)$ ,  $\vec{b}_2 = (-9, 8)$ , а точка  $O$  в системе координат  $(P; \vec{b}_1, \vec{b}_2)$  имеет координаты  $(2, -1)$ . Точка  $M$  в системе координат  $(P; \vec{b}_1, \vec{b}_2)$  имеет координаты  $(-11, 6)$ . Найти ее координаты в системе координат  $(O; \vec{a}_1, \vec{a}_2)$ .

4. Вершина равнобедренного треугольника находится в точке  $(-7, 15)$ , а середина его основания в точке  $(1, 3)$ . Составить уравнения сторон треугольника, зная, что тангенс угла при основании равен 4.

5. Даны уравнения параллельных прямых  $2x + 3y - 13 = 0$  и  $2x + 3y - 11 = 0$ . Найти уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

# Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 16

1. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ортогональны,  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 4$ . Вычислить  $|(3\vec{a} - \vec{b}, \vec{a} - 2\vec{b})|$ .
2. Даны векторы  $\vec{a} = (1, 3, -5)$ ,  $\vec{b} = (-2, 4, -1)$  и  $\vec{c} = (1, -2, 1)$ . Найти вектор  $\vec{x}$  такой, что  $\vec{x} \perp \vec{a}$ ,  $\vec{b} \cdot \vec{x} = -1$  и  $\vec{c} \cdot \vec{x} = 1$ .
3. Даны векторы  $\vec{p} = (3, -2, 1)$ ,  $\vec{q} = (-1, 1, -2)$ ,  $\vec{r} = (2, 1, -3)$  и  $\vec{s} = (11, -6, 5)$ . Проверить, что векторы  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  образуют базис и найти координаты вектора  $\vec{s}$  в этом базисе.
4. Даны уравнения  $3x - 2y + 1 = 0$ ,  $x - y + 1 = 0$  двух сторон треугольника и уравнение  $2x - y - 1 = 0$  медианы, выходящей из вершины, не лежащей на первой стороне. Составить уравнение третьей стороны треугольника.
5. Найти длину биссектрисы  $AD$  треугольника  $ABC$ :  $A(0, 0)$ ,  $B(4, 3)$ ,  $C(6, 8)$ .

# Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 17

1. Вектор  $\vec{c}$  ортогонален векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , угол между векторами  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  равен  $30^\circ$ . Тройка  $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$  – правая. Зная, что  $|\vec{a}| = 6$ ,  $|\vec{b}| = 3$ ,  $|\vec{c}| = 3$ , вычислить  $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ .

2. Точка  $A$  в некоторой системе координат имеет координаты  $(1, -\sqrt{3})$ . Найти ее координаты в системе координат, полученной поворотом исходной системы координат на угол  $30^\circ$ .

3. Определить координаты концов отрезка, который точками  $A(2, 2)$  и  $B(5, 8)$  разделен на три равные части.

4. Даны уравнения двух сторон параллелограмма  $x - y - 1 = 0$  и  $x - 2y - 10 = 0$  и точка пересечения его диагоналей  $M(3, -1)$ . Найти уравнения двух других сторон параллелограмма.

5. Даны две вершины треугольника  $A(2, -2)$ ,  $B(2, 3)$  и точка пересечения медиан  $H(1, 1)$ . Найти третью вершину  $C$ .

# Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 18

1. Даны векторы  $\vec{a} = (2, 1, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, -1, 0)$  и  $\vec{c} = (0, 1, -2)$ . Найти вектор  $\vec{d}$  длины  $\sqrt{42}$ , компланарный векторам  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$ , ортогональный вектору  $\vec{c}$  и направленный так, что тройка  $(\vec{d}, \vec{b}, \vec{c})$  — правая.

2. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ортогональны, вектор  $\vec{c}$  образует с ними углы, равные  $\frac{\pi}{3}$ . Зная, что  $|\vec{a}| = 3$ ,  $|\vec{b}| = 5$  и  $|\vec{c}| = 8$ , вычислить скалярное произведение  $(3\vec{a} - 2\vec{b})(\vec{b} + 3\vec{c})$ .

3. Точка  $A$  в некоторой системе координат имеет координаты  $(-1, \sqrt{3})$ . Найти ее координаты в системе координат, полученной поворотом исходной системы координат на угол  $60^\circ$ .

4. Написать уравнения сторон равнобедренной трапеции, зная середины ее оснований  $(1, 1)$ ,  $(2, 8)$  и точки  $(4, -3)$ ,  $(15, 14)$  на ее боковых сторонах.

5. Найти длину высоты  $AD$  треугольника  $ABC$ :  $A(2, -3)$ ,  $B(3, -4)$ ,  $C(3, -1)$ .

# Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 19

1. Даны векторы  $\vec{a} = (1, 1, -1)$ ,  $\vec{b} = (1, 2, -1)$  и  $\vec{c} = (0, 1, 2)$ . Найти вектор  $[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] - \vec{b}^2(\vec{b} - 2\vec{a})$ .

2. Даны векторы  $\vec{a} = (2, 3, -3)$ ,  $\vec{b} = (-1, 2, 3)$  и  $\vec{c} = (1, -2, 4)$ . Найти вектор  $\vec{x}$  такой, что  $\vec{x} \perp \vec{b}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{x} = -4$  и  $\vec{c} \cdot \vec{x} = 7$ .

3. Даны векторы  $\vec{a} = (-1, 2, 0)$ ,  $\vec{b} = (-1, 5, 1)$ ,  $\vec{c} = (1, 1, 2)$  и  $\vec{x} = (2, 5, 5)$ . Проверить, что векторы  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  образуют базис и найти координаты вектора  $\vec{x}$  в этом базисе.

4. Точка  $A(2, 0)$  является вершиной правильного треугольника, а противолежащая ей сторона лежит на прямой  $\ell : x + y - 1 = 0$ . Составить уравнения двух других сторон.

5. Составить уравнения сторон треугольника, если дана одна из его вершин  $B(2, 2)$  и уравнения двух высот  $x - 4y = 0$ ,  $x + y - 1 = 0$ .

# Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 20

1. Выяснить, лежат ли точки  $A(-2, 3, 4)$ ,  $B(-3, 2, 1)$ ,  $C(1, -1, 1)$  и  $D(3, 3, 2)$  в одной плоскости.

2. Векторы  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  ортогональны, вектор  $\vec{c}$  образует угол  $\frac{\pi}{3}$  с вектором  $\vec{a}$  и угол  $\frac{\pi}{6}$  с вектором  $\vec{b}$ . Зная, что  $|\vec{a}| = 2$ ,  $|\vec{b}| = 3$  и  $|\vec{c}| = 4$ , вычислить скалярное произведение  $(\vec{a} - 3\vec{b})(2\vec{b} + \vec{c})$ .

3. Отрезок, ограниченный точками  $A(-1, 8, 3)$  и  $B(9, -7, -2)$ , разделен точками  $C, D, E, F$  на пять равных частей. Найти координаты этих точек.

4. Основание равнобедренного треугольника лежит на прямой  $\ell_1 : x + 2y - 2 = 0$ , а одна из боковых сторон — на прямой  $\ell_2 : 2x + y - 1 = 0$ . Расстояние от другой боковой стороны до точки  $\ell_1 \cap \ell_2$  равно  $\frac{1}{\sqrt{5}}$ . Составить уравнение этой боковой стороны.

5. Найти проекцию точки  $P(1, -3)$  на прямую, проходящую через точки  $A(3, 0)$  и  $B(1, 2)$ .

# Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 21

1. Даны векторы  $\vec{a} = (-1, 3, 1)$ ,  $\vec{b} = (0, 2, 1)$  и  $\vec{c} = (-1, 3, 2)$ . Найти вектор  $[\vec{b}, [\vec{a}, \vec{a} + \vec{c}]] - (\vec{b} + \vec{c})^2 \vec{a}$ .

2. Даны векторы  $\vec{a} = (4, -1, 2)$ ,  $\vec{b} = (-1, -2, 6)$  и  $\vec{c} = (3, -2, 1)$ . Найти вектор  $\vec{x}$  такой, что  $\vec{x} \perp \vec{c}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{x} = 4$  и  $\vec{b} \cdot \vec{x} = 1$ .

3. Точка  $A$  в некоторой системе координат имеет координаты  $(-1, 3\sqrt{3})$ . В системе координат, полученной поворотом исходной системы координат на некоторый угол  $\alpha$ , та же точка имеет координаты  $(2\sqrt{3}, -4)$ . Найти угол  $\alpha$ .

4. Найти радиус и координаты центра окружности, проходящей через точку  $A(-1, 3)$  и касающихся прямых  $\ell_1 : 7x + y = 0$  и  $\ell_2 : x - y + 8 = 0$ .

5. Составить уравнения сторон треугольника, если дана одна из его вершин  $B(3, 3)$ , уравнения высоты  $x - 4y + 3 = 0$  и медианы  $y - 1 = 0$ , проведенных из одной вершины.

# Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 22

1. Найти объем и высоту тетраэдра с вершинами в точках  $A(1, 0, 2)$ ,  $B(7, 1, 2)$ ,  $C(2, -3, 6)$  и  $D(1, 1, -1)$ .

2. Вектор  $\vec{x}$  ортогонален векторам  $\vec{a} = (1, -2, 2)$  и  $\vec{b} = (2, 1, 0)$  и образует тупой угол с вектором  $\vec{c} = (1, -1, 0)$ . Найти вектор  $\vec{x}$ , зная, что  $|\vec{x}| = 3\sqrt{5}$ .

3. Даны векторы  $\vec{p} = (1, 1, -2)$ ,  $\vec{q} = (2, 1, 0)$ ,  $\vec{r} = (-3, 1, 2)$  и  $\vec{s} = (8, 2, -4)$ . Проверить, что векторы  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  образуют базис и найти координаты вектора  $\vec{s}$  в этом базисе.

4. Гипотенуза прямоугольного треугольника лежит на прямой  $\ell_1 : 2x + y - 2 = 0$ , а точка  $A(3, -1)$  является вершиной прямого угла. Площадь треугольника равна  $\frac{9}{4}$ . Составить уравнения прямых, на которых лежат катеты этого треугольника.

5. Найти точку  $Q$ , симметричную точке  $P(3, 5)$  относительно прямой, проходящей через точки  $A(1, -1)$  и  $B(4, -2)$ .

# Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 23

1. Даны векторы  $\vec{a} = (0, -1, 1)$  и  $\vec{b} = (1, -2, 1)$ . Найти вектор  $\vec{c}$  длины 3, ортогональный  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  и направленный так, что тройка  $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b})$  – правая.

2. Даны вершины треугольника  $A(1, 1)$ ,  $B(4, 5)$  и  $C(-5, 9)$ . Найти точку пересечения биссектрисы внутреннего угла при вершине  $A$  со стороной  $BC$ .

3. Даны формулы замены системы координат:

$$\begin{cases} x_1 = 2 + x'_1 - 2x'_2 + x'_3, \\ x_2 = -1 + 2x'_1 - x'_3, \\ x_3 = x'_1 + x'_2. \end{cases}$$

Старые координаты точки  $M$  есть  $(2, -2, 3)$ . Найти новые координаты этой точки.

4. На плоскости даны три точки  $A(2, 3)$ ,  $B(1, 4)$ ,  $C(-1, 2)$ , и прямая  $\ell : x - 5y + 7 = 0$ . Составить уравнение этой прямой в системе координат  $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ .

5. Даны уравнения параллельных прямых  $9x - 7y - 130 = 0$  и  $9x - 7y - 162 = 0$ . Найти уравнение прямой, симметричной первой прямой относительно второй.

# Контрольная работа № 2 по доп. главам математики

Семестр I, мат-мех факультет, дневное отделение

Вариант № 24

1. Даны векторы  $\vec{a} = (-1, 1, -2)$ ,  $\vec{b} = (4, 1, -2)$  и  $\vec{c} = (1, 2, 3)$ . Найти вектор  $[-\vec{a}, \vec{b}], 2\vec{a} - \vec{c}] - (\vec{b}\vec{c})(2\vec{a} - 3\vec{c})$ .

2. Даны векторы  $\vec{a} = (-3, 1, -2)$ ,  $\vec{b} = (0, -2, 1)$  и  $\vec{c} = (2, -1, 5)$ . Найти вектор  $\vec{x}$  такой, что  $\vec{x} \perp \vec{a} + \vec{c}$ ,  $\vec{b}\vec{x} = -5$  и  $\vec{c}\vec{x} = -1$ .

3. Даны векторы  $\vec{p} = (-1, 2, -2)$ ,  $\vec{q} = (2, 1, -3)$ ,  $\vec{r} = (1, 0, 2)$  и  $\vec{s} = (2, 4, -10)$ . Проверить, что векторы  $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}$  образуют базис и найти координаты вектора  $\vec{s}$  в этом базисе.

4. Прямые  $\ell_1 : x - 3y + 2 = 0$  и  $\ell_2 : 3x + 2y - 5 = 0$  являются соответственно осями  $O'x'$  и  $O'y'$  новой системы координат, а точка  $A(-1, 2)$  имеет в новой системе координаты  $(1, 1)$ . Составить в новой системе координат уравнение прямой  $\ell_3$ , которая в исходной системе имеет уравнение  $5x - 4y + 7 = 0$ .

5. Найти площадь треугольника с вершинами  $A(1, 1)$ ,  $B(2, 2)$ ,  $C(4, 6)$ .