

# Тема I: Определители

## § 1.3. Приложения определителей

М.В.Волков

Уральский федеральный университет  
Институт естественных наук и математики  
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2020/2021 учебный год

Мы доказали теорему об определителе произведения матриц: если  $A$  и  $B$  –  $n \times n$ -матрицы, то  $\det AB = \det A \cdot \det B$ .

## Следствие

Если матрица  $A$  обратима, то ее определитель отличен от 0.

*Доказательство.* Если матрица  $B$  обратна к матрице  $A$ , то  $AB = E$ . «Детерминируя» это равенство, т.е. записывая равенство определителей его левой и правой частей, получим  $\det AB = \det E = 1$ . По теореме  $\det AB = \det A \cdot \det B$ , откуда  $\det A \cdot \det B = 1$ , что влечет  $\det A \neq 0$ .  $\square$

Докажем, что верно и обратное: если  $\det A \neq 0$ , то матрица  $A$  обратима. Для этого понадобится следующая лемма:

## Лемма «свой среди чужих»

Сумма произведений элементов некоторой строки матрицы на алгебраические дополнения соответствующих элементов *другой* строки равна нулю.

В символах: если  $A = (a_{ij})_{n \times n}$ , то  $\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = 0$  при всех  $i \neq j$ .

## Определители и обращение матриц (2)

*Доказательство леммы.* Рассмотрим матрицу  $A'$ , которая получается из матрицы  $A$  заменой ее  $j$ -й строки на  $i$ -ю.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn-1} & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in-1} & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что  $\det A' = 0$ , поскольку в матрице  $A'$  есть две равные строки.

С другой стороны, разложение  $\det A'$  по  $j$ -й строке дает

$$\det A' = \sum_{k=1}^n a_{ik} A'_{jk}.$$

Остается заметить, что  $A'_{jk} = A_{jk}$  для всех  $k = 1, \dots, n$ , так как матрицы  $A'$  и  $A$  различаются лишь  $j$ -й строкой. Поэтому

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} A_{jk} = \sum_{k=1}^n a_{ik} A'_{jk} = \det A' = 0.$$

□

## Определение

Пусть  $A = (a_{ij})_{n \times n}$  — матрица порядка  $n > 1$ . Матрица  $\hat{A} := (A_{ij})^T$  называется *присоединенной* к матрице  $A$ .

Таким образом, присоединенная матрица получается, если заменить каждый элемент матрицы его алгебраическим дополнением, а потом транспонировать получившуюся матрицу.

## Предложение (основное свойство присоединенной матрицы)

$$A\hat{A} = \hat{A}A = \det A \cdot E.$$

*Доказательство.* Элемент произведения  $A\hat{A}$ , стоящий на месте  $(i, j)$ , равен сумме произведений элементов  $i$ -й строки матрицы  $A$  на элементы  $j$ -го столбца матрицы  $\hat{A}$ . По определению, элементы  $j$ -го столбца матрицы  $\hat{A}$  — это алгебраические дополнения элементов  $j$ -й строки матрицы  $A$ . Сумма произведений элементов  $i$ -й строки на алгебраические дополнения элементов  $j$ -й строки равна  $\det A$  при  $j = i$  (формула разложения по строке) и равна 0 при  $j \neq i$  (лемма «свой среди чужих»). Поэтому у  $A\hat{A}$  элементы главной диагонали равны  $\det A$ , а прочие элементы нулевые, т.е.  $A\hat{A} = \det A \cdot E$ . Из равноправия строк и столбцов имеем  $\hat{A}A = \det A \cdot E$ . □

Из основного свойства присоединенной матрицы немедленно вытекает, что в случае, когда  $\det A \neq 0$ , матрица  $A$  обратима и ее обратная матрица может быть вычислена по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A}. \quad (*)$$

Формулой (\*) удобно пользоваться для  $2 \times 2$ -матриц, где она принимает вид

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Для матриц более высокого порядка формула (\*) вычислительно неэффективна по сравнению с методом Гаусса. Тем не менее, она полезна: например, из нее следует, что элементы матрицы  $A^{-1}$  *непрерывно* зависят от элементов матрицы  $A$ . (Заметим для сравнения, что для элементов псевдообратной матрицы это уже неверно.)

Матрицу с ненулевым определителем называют *невырожденной*.  
Подытожим наши рассуждения следующим утверждением:

### Теорема (критерий невырожденности)

Для любой квадратной матрицы  $A$  следующие условия эквивалентны:

- 1  $A$  обратима слева;
- 2  $A$  обратима справа;
- 3  $A$  обратима и слева, и справа;
- 4 строки  $A$  линейно независимы;
- 5 столбцы  $A$  линейно независимы;
- 6  $\det A \neq 0$ .

*Доказательство* получается комбинированием фактов, доказанных в этой лекции и в осеннем семестре (тема V, лекция 4). □

Вернемся к произвольным (не обязательно квадратным) матрицам.  
 Пусть  $A$  –  $n \times k$ -матрица и  $r \leq \min\{n, k\}$ . *Минором порядка  $r$*  матрицы  $A$  называется определитель  $r \times r$ -матрицы, стоящей на пересечении каких-то  $r$  строк матрицы  $A$  и каких-то ее  $r$  столбцов.

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{-1} & 0 & \boxed{3} & \boxed{0} & 0 \\ \boxed{2} & 0 & \boxed{4} & \boxed{1} & 0 \\ \boxed{1} & 0 & \boxed{-2} & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$

*Рангом матрицы по минорам* называется наибольший порядок ее ненулевых миноров. Так, у матрицы на рисунке ранг по минорам 3.

## Теорема (дополнение к теореме о ранге)

Ранг матрицы равен ее рангу по минорам.

*Доказательство.* Пусть  $A$  – матрица ранга  $r$  и  $r_M$  – ее ранг по минорам. Имеем  $r_M \leq r$ , так как строки и столбцы, пересечение которых дает ненулевой минор, линейно независимы по критерию невырожденности.

Обратно, возьмем  $r$  линейно независимых строк матрицы  $A$  и выбросим остальные строки. Ранг получившейся матрицы  $A'$  равен  $r$ , и по теореме о ранге матрицы в  $A'$  есть  $r$  линейно независимых столбцов:

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & \dots & a'_{1j_1} & \dots & a'_{1j_r} & \dots & a'_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a'_{r1} & \dots & a'_{rj_1} & \dots & a'_{rj_r} & \dots & a'_{rn} \end{pmatrix}$$

Минор порядка  $r$ , стоящий в этих столбцах, отличен от 0 по критерию невырожденности, откуда  $r_M \geq r$ . □





Учитывая, что в определителе  $\Delta_j$  элемент  $b_k$  стоит на месте  $(k, j)$ , получим

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \frac{\Delta_j}{\Delta} = \frac{1}{\Delta} \sum_{j=1}^n a_{ij} \sum_{k=1}^n b_k A_{kj} = \frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n b_k \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj}.$$

Имеем

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj} = \begin{cases} \Delta & \text{при } k = i \text{ по формуле разложения по строке,} \\ 0 & \text{при } k \neq i \text{ по лемме «свой среди чужих».} \end{cases}$$

Поэтому сумма  $\frac{1}{\Delta} \sum_{k=1}^n b_k \sum_{j=1}^n a_{ij} A_{kj}$  сводится к  $\frac{1}{\Delta} b_i \Delta = b_i$ .

Итак,  $i$ -я координата столбца  $Ax$  равна  $b_i$ , т.е.  $Ax = \mathbf{b}$ . □

Здесь можно сделать замечание, аналогичное тому, которое делалось по поводу формулы для обратной матрицы: правило Крамера вычислительно неэффективно по сравнению с методом Гаусса, но теорема Крамера имеет важное теоретическое значение.



Мы доказали такой факт:

## Теорема об интерполяционном многочлене

Пусть  $x_0, x_1, \dots, x_n$  – попарно различные, а  $y_0, y_1, \dots, y_n$  – произвольные элементы поля  $F$ . Существует и притом только один многочлен  $p(x) \in F[x]$  степени не выше  $n$ , такой, что  $p(x_i) = y_i$  для всех  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Отметим одно простое, но важное следствие.

В алгебре многочлены рассматривают как **формальные выражения**, и равенство двух многочленов  $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$  и  $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_kx^k$  означает, что эти выражения совпадают, т.е.  $n = k$  и  $a_0 = b_0, a_1 = b_1, \dots, a_n = b_n$ .

В анализе многочлены над полем  $\mathbb{R}$  рассматривают как **функции**  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , и равенство двух многочленов  $p(x) \in \mathbb{R}$  и  $q(x) \in \mathbb{R}$  означает, что  $p(\alpha) = q(\alpha)$  для любого  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Понятно, что для любого поля  $F$  каждый многочлен  $p(x) \in F[x]$  определяет функцию  $F \rightarrow F$  по правилу  $\alpha \mapsto p(\alpha)$ .

## Следствие о многочленах как функциях

Многочлены над любым **бесконечным** полем равны тогда и только тогда, когда они равны как функции.

## Следствие о многочленах как функциях

Многочлены над любым *бесконечным* полем равны тогда и только тогда, когда они равны как функции.

*Доказательство.* Ясно, что одинаковые многочлены определяют одну и ту же функцию. Обратно, пусть  $p(x)$  и  $q(x)$  – многочлены степеней  $n$  и  $k$  соответственно над бесконечным полем  $F$ , которые равны как функции. Без ограничения общности можно считать, что  $n \geq k$ . Выберем попарно различные элементы  $x_0, x_1, \dots, x_n \in F$  (это можно сделать, поскольку  $F$  бесконечно). По условию  $p(x_i) = q(x_i)$  для всех  $i = 0, 1, \dots, n$ . В силу теоремы многочлен степени не выше  $n$  однозначно определяется своими значениями на элементах  $x_0, x_1, \dots, x_n$ , откуда  $p(x) = q(x)$ .  $\square$

Отметим, что для многочленов над конечными полями их равенство как функций, вообще говоря, не влечет их равенство как формальных выражений. Например, над двухэлементным полем  $\mathbb{F} = \{0, 1\}$  многочлены  $x$  и  $x^2$  определяют одну и ту же функцию.

В приложениях бывает необходимо явно выписать многочлен  $p(x)$  степени не выше  $n$  по заданным значениям  $y_0, y_1, \dots, y_n$  в попарно различных точках  $x_0, x_1, \dots, x_n$ . Соответствующую процедуру (как и многие другие алгоритмы в алгебре и анализе) предложил Жозеф Луи Лагранж.

Для каждого  $i = 0, 1, \dots, n$  положим

$$p_i(x) := \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \dots \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \dots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}.$$

Видно, что  $p_i(x)$  – многочлен степени  $n$ ,  $p_i(x_i) = 1$  и  $p_i(x_j) = 0$  при  $j \neq i$ .

*Интерполяционный многочлен Лагранжа* – это многочлен

$$p(x) := \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = y_0 p_0(x) + y_1 p_1(x) + \dots + y_n p_n(x).$$

По построению  $p(x_i) = y_i$  для всякого  $i = 0, 1, \dots, n$ , а степень многочлена  $p(x)$  не превосходит  $n$ .