Свойства определителя

Математика, I курс, I сем.

Практическое занятие №2.

Лектор: к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В.

Свойство 1

Свойство 1. Величина определителя не изменится, если его строки заменить столбцами, причем каждую строку заменить столбцом с тем же номером, т.е.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

Свойство 2

<u>Свойство 2</u>. Перестановка двух столбцов или двух строк определителя равносильна умножению на -1. Например,

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Свойство 3

<u>Свойство 3</u>. Если определитель имеет два одинаковых столбца или две одинаковые строки, то он равен нулю.

Доказательство: переставим два этих столбца или две этих строки и используем свойство 2.
Тогда определитель будет равен себе противоположному, то есть нулю.

Свойство 4

<u>Свойство 4</u>. Умножение всех элементов одного столбца или одной строки определителя на любое число k равносильно умножению определителя на это число k.

$$\begin{vmatrix} k\cdot a_1 & b_1 & c_1 \\ k\cdot a_2 & b_2 & c_2 \\ k\cdot a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Доказательство: Число k входит в каждое слагаемое определителя ровно один раз.

Свойство 5

<u>Свойство 5</u>. Если все элементы некоторого столбца или некоторой строки равны нулю, то сам определитель равен нулю.

Доказательство: Это свойство есть частный случай предыдущего (при $k = 0$).

Свойство 6

<u>Свойство 6</u>. Если соответствующие элементы двух столбцов или двух строк определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.

Доказательство: Вынесем коэффициент пропорциональности за знак определителя (свойство 5) и применим свойство 4.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k\cdot b_1 & b_1 & c_1 \\ k\cdot b_2 & b_2 & c_2 \\ k\cdot b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\cdot\begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = k\cdot 0 = 0 \qquad \left(\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = k\right)$$

Свойство 7

Свойство 7.

$$\begin{vmatrix} \boxed{a_1'} + \boxed{a_1''} & b_1 & c_1 \\ a_2' + a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3' + a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1' & b_1 & c_1 \\ a_2' & b_2 & c_2 \\ a_3' & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1'' & b_1 & c_1 \\ a_2'' & b_2 & c_2 \\ a_3'' & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Свойство 8

<u>Свойство 8</u><u>.</u> Если к элементам некоторого столбца (или некоторой строки) прибавить соответствующие элементы другого столбца (или другой строки), умноженные на любой общий множитель, то величина определителя при этом не изменится. Например,

Свойство 8

$$\begin{vmatrix} a_1 + k \cdot b_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + k \cdot b_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + k \cdot b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Свойство 8

Доказательство:

Пусть $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$

Тогда

$$\begin{vmatrix} a_1 + kb_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 + kb_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 + kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} kb_1 & b_1 & c_1 \\ kb_2 & b_2 & c_2 \\ kb_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta + k \begin{vmatrix} b_1 & b_1 & c_1 \\ b_2 & b_2 & c_2 \\ b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \Delta + k \cdot 0 = \Delta$$

Свойство 9

<u>Свойство 9</u>. Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов:

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 b_2 c_3$$

Доказательство: упр.

Эквивалентные преобразования определителя, не меняющие значения определителя

1) Прибавление к одной строке (столбцу) другой, умноженной на число.

2) Вынесение за знак определителя общего множителя из строки (столбца).

3) Замена строк столбцами и наоборот.

При перестановке двух строк (столбцов) знак определителя меняется на противоположный

Задача 1

Вычислить определитель, используя элементарные свойства определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & -9 & -4 \end{vmatrix}$$

1) Получим в первой строке, в первом столбце единицу при помощи эквивалентных преобразований определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & -9 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 6 & 3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & -9 & -4 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} \boxed{1} & -6 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & -9 & -4 \end{vmatrix} =$$

I+II

(прибавим к первой строке вторую)

(вынесем из первой строки (-1))

2) Будем получать в первом столбце под первым элементом (во второй и третьей строке) нули

$$\Delta = (-1)\cdot\begin{vmatrix} \boxed{1} & -6 & -3 \\ -3 & 1 & 2 \\ 4 & -9 & -4 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} 1 & -6 & -3 \\ 0 & -17 & -7 \\ 0 & 15 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{gathered} \text{II}+3\cdot\text{I} \\ \text{III}-4\cdot\text{I} \end{gathered}$$

(прибавим ко второй строке первую, умноженную на 3, из третьей строки вычтем первую, умноженную на 4)

Теперь можно либо разложить определитель по первому столбцу, либо привести к определителю треугольной матрицы.

4) Приведем к определителю треугольной матрицы:

4.1) замораживаем (не меняем) первую строку;

4.2) получаем во второй строке, во втором столбце единицу:

$$\Delta=(-1)(-17)\begin{vmatrix}1 & -6 & -3\\ 0 & 1 & \dfrac{7}{17}\\ 0 & 15 & 8\end{vmatrix}=17\cdot\begin{vmatrix}1 & -6 & -3\\ 0 & \boxed{1} & \dfrac{7}{17}\\ 0 & 15 & 8\end{vmatrix}=17\cdot\begin{vmatrix}1 & -6 & -3\\ 0 & \boxed{1} & \dfrac{7}{17}\\ 0 & 0 & 8-15\cdot\dfrac{7}{17}\end{vmatrix}=$$

(вынесем из второй строки (-17))

$\text{III}-15\cdot\text{II}$

(из третьей строки вычтем вторую, умноженную на 15)

4) Приведем к определителю треугольной матрицы:

замораживаем (не меняем) первую строку;

получаем во второй строке, во втором столбце единицу:

$$=17\cdot\begin{vmatrix}1 & -6 & -3\\ 0 & 1 & \dfrac{7}{17}\\ 0 & 0 & 8-15\cdot\dfrac{7}{17}\end{vmatrix}=17\cdot\begin{vmatrix}1 & -6 & -3\\ 0 & 1 & \dfrac{7}{17}\\ 0 & 0 & \dfrac{31}{17}\end{vmatrix}=17\cdot\left(1\cdot1\cdot\frac{31}{17}\right)=31$$

Определитель треугольной матрицы равен произведению диагональных элементов!

Задача 2

Вычислить определитель, используя элементарные свойства определителя

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix}$$

Приведем матрицу определителя к треугольному виду

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & a & b \\ a & 0 & a \\ b & a & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} a & 0 & a \\ 0 & a & b \\ b & a & 0 \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} \boxed{1} & 0 & 1 \\ 0 & a & b \\ b & a & 0 \end{vmatrix} = -a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & b \\ 0 & a & -b \end{vmatrix} =$$

(поменяем местами первую и вторую строку)

(вынесем из первой строки *a*)

III-$b \cdot$ I

III-II

$$= -a\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & -2b \end{vmatrix} = -a \cdot (1 \cdot a \cdot (-2b)) = 2a^2b$$