Дифференцируемость функции на интервале

Опр. Функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой на интервале (a, b), если

она определена на (a, b) и дифференцируема для любой точки $x_0 \in (a, b)$.

Замечание. Если функция $y = f(x)$ дифференцируема на (a, b), то в каждой точке $x_0 \in (a, b)$ этого интервала существует касательная к графику функции.

Правила дифференцирования

<u>Теорема.</u> Пусть функции $u = u(x)$ и $v = v(x)$ определены и дифференцируемы на интервале (a, b). Тогда их сумма/разность, произведение, частное при условии, что знаменатель не равен нулю дифференцируемы на этом промежутке.

И при этом справедливы формулы

Правила дифференцирования

1) $\boxed{c' = 0}$

2) $\boxed{(cu)' = cu'}$

3) $\boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'}$

4) $\boxed{(u \cdot v)' = u'v + uv'}$

5) $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}}$

Дифференцирование сложной функции на интервале

Теорема 7 (производная сложной функции на интевале)

1) Пусть функция $y = f(u)$ определена и дифференцируема на (c, d).

2) Пусть функция $u = u(x)$ определена и дифференцируема на (a, b).

3) Причем $u(a, b) = (c, d)$.

Производная сложной функции в точке

Тогда сложная функция $y = f\big(u(x)\big)$ определена и дифференцируема на (a, b), и

$$\boxed{y' = f'(u)\, u'}$$

Производная обратной функции в точке

<u>Теорема 8 (производная обратной функции)</u>

Пусть функция $y = y(x)$ определена и обратима и дифференцируема на (a, b).

Тогда обратная функция $x = x(y)$ определена и дифференцируема на (c, d), где $y(a, b) = (c, d)$, и

$$\boxed{x'(y) = \frac{1}{y'(x)}}$$

Таблица производных

$$1)(x^n)' = nx^{n-1}$$

$$2)(e^x)' = e^x$$

$$3)(a^x)' = a^x \ln a\,, a > 0, a \neq 1$$

$$4)(\ln x)' = \frac{1}{x}$$

$$5)(\log_a x)' = \frac{1}{x\ln a}$$

$$6)(\sin x)' = \cos x$$

$$7)(\cos x)' = -\sin x$$

$$8)(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$9)(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Таблица производных

$$10)\ (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$11)\ (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$12)\ (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$$

$$13)\ (\operatorname{arctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Таблица производных для сложной функции

$$1)(u^n)' = nu^{n-1} \cdot u'$$

$$2)(e^u)' = e^u \cdot u'$$

$$3)(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$$

$$4)(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$$

$$5)(\log_a u)' = \frac{1}{u\ln a} \cdot u'$$

$$6)(\sin u)' = \cos u \cdot u'$$

$$7)(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$$

Таблица производных для сложной функции

$$8)(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$$

$$9)(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$$

$$10)(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$11)(\operatorname{arcos} u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$$

$$12)(\operatorname{arctg} u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

$$13)(\operatorname{arctg} u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$$

Таблица производных для сложной функции

<u>Примеры.</u>

1) $y=(3x-17)^{10}$

$$y=u^{10}$$

$$y'=10u\cdot u' =10\cdot(3x-17)^{9}\cdot(3x-17)'=$$

$$=10\cdot(3x-17)^{9}\cdot 3= 30\cdot(3x-17)^{9}$$

Таблица производных для сложной функции

$$2)\ y = \operatorname{arctg}(7x+1)$$

$$y = \operatorname{arctg} u$$

$$y' = \frac{1}{1+u^2}\cdot u' = \frac{1}{1+(7x+1)^2}\cdot(7x+1)' =$$

$$= \frac{1}{1+(7x+1)^2}\cdot 7 = \frac{7}{1+(7x+1)^2}$$

Дифференциал функции

Опр. Дифференциалом функции $y = y(x)$ в точке $x = x_0$ называется произведение $dy = y'(x_0)\Delta x$

$$dx = (x)'\Delta x = 1 \cdot \Delta x = \Delta x$$

$$\boxed{dy = y'(x_0)dx}$$

Дифференциал функции $y = y(x)$ равен произведению производной на дифференциал независимой переменной.

$$\boxed{dy = y'dx}$$

Дифференциал функции

Пример 12. $y = x^2,\ x_0 = 1$ $\boxed{\Delta y \approx dy}$

$$dy = y'dx = 2xdx$$

$$dy = 2x_0 dx = 2dx$$

при $\Delta x = 0.1,$

$$dy = 2 \cdot \Delta x = 0.2$$

$$\Delta y = y(x_0 + \Delta x) - y(x_0) =$$

$$= y(1{,}1) - y(1) = 1{,}1^2 - 1^2 = 0{,}21$$