Определение производной функции в точке

<u>Опр.</u> Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$.

Производной $f'(x_0)$ $\left(y'(x_0)\right)$ функции $y = f(x)$ в точке $x = x_0$ в точке называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последний стремится к нулю, т.е.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} \quad \left(y'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y(x_0)}{\Delta x}\right)$$

Определение функции, дифференцируемой в точке

<u>Опр.</u> Функция $f(x)$, определенная в $O(x_0)$, называется дифференцируемой в точке $x = x_0$, если существует производная $f'(x_0)$ в этой точке.

<u>Пример.</u> Функция $f(x) = x^2$ является дифференцируемой в любой точке $x_0 \in \mathbb{R}$.

Геометрический смысл производной функции в точке

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна в $O(x_0)$ и дифференцируема в точке $x = x_0$.

Тогда производная $f'(x_0)$ функции $f(x)$ в точке $x = x_0$ равна тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.

Геометрический смысл производной функции в точке

Следствие. Уравнение касательной к графику функции $y = y(x)$ в точке $x = x_0$ (на графике в точке $M_0(x_0, y_0)$):

$$\boxed{y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)}$$

Геометрический смысл производной функции в точке

<u>Пример 9.</u> Написать уравнение касательной к графику функции $y = x^2$ в точке $x = 1$.

<u>Решение.</u>

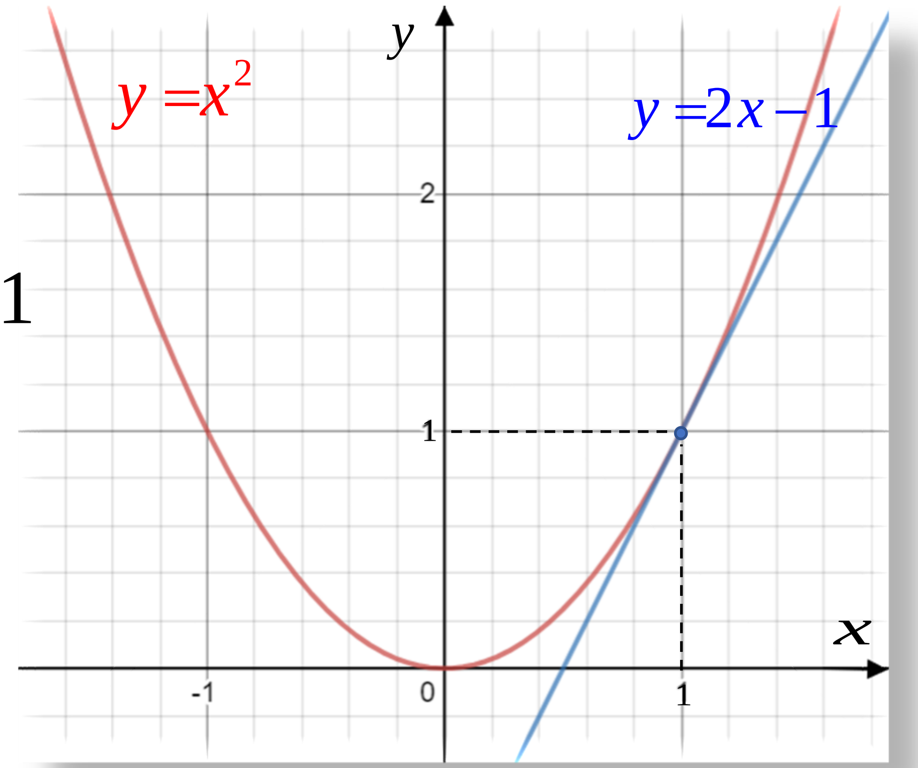
$$y = x^2,\quad y' = 2x,\quad x_0 = 1$$

$$y'(x_0) = 2,\quad y_0 = y(x_0) = 1$$

$$\boxed{y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)}$$

$$y - 1 = 2(x - 1)$$

$$y = 2x - 1$$



Теорема о связи дифференцируемости в точке и непрерывности в этой точке

Теорема 2.

Пусть функция $f(x)$ определена в $O(x_0)$.

Если функция $f(x)$ **дифференцируема** в точке x_0, то она **непрерывна** в этой точке.