

Определенный интеграл

Материалы для выполнения контрольной работы по курсу
«Основы высшей математики»

ИГУП. Напр.: Реклама и связи с общественностью, заочное отделение

Лектор: к.ф.-м.н., доцент Нагребецкая Ю.В., 2021г.

Формула Ньютона-Лейбница

- Теорема. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, а $F(x)$ - первообразная для $f(x)$. Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Пример 1. $\int_0^1 x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1^3}{3} - \frac{0^3}{3} = \frac{1}{3}$

Формула замены переменной в определенном интеграле

- Теорема. Пусть 1) функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$;
2) функция $x = \varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\alpha, \beta]$;
3) функция $x = \varphi(t)$ отображает отрезок $[\alpha, \beta]$ на отрезок $[a, b]$;
4) $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$.

Тогда

$$\int_a^b f(x) dx = \left[\begin{array}{l} x = \varphi(t), dx = \varphi'(t) dt \\ x = a \rightarrow t = \alpha \\ x = b \rightarrow t = \beta \end{array} \right] = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

Формула замены переменной в определенном интеграле

Пример 2

$$\int_0^1 e^{2x} \sqrt{e^{2x} + 1} dx = \left[\begin{array}{l} u = e^{2x} + 1 \Rightarrow du = u' dx = (e^{2x} + 1)' dx = 2e^{2x} dx \\ du = 2e^{2x} dx \Rightarrow e^{2x} dx = \frac{du}{2} \\ x=0 \rightarrow u = e^{2 \cdot 0} + 1 = 2 \\ x=1 \rightarrow u = e^{2 \cdot 1} + 1 = e^2 + 1 \end{array} \right] =$$

К старой переменной
не возвращаемся!

$$= \int_2^{e^2+1} \sqrt{u} \cdot \left(\frac{1}{2} du \right) = \frac{1}{2} \int_2^{e^2+1} \sqrt{u} \cdot du = \frac{1}{2} \int_2^{e^2+1} u^{\frac{1}{2}} du = \frac{1}{2} \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_2^{e^2+1} = \frac{1}{3} u \sqrt{u} \Big|_2^{e^2+1} = \frac{1}{3} \left((e^2 + 1) \sqrt{e^2 + 1} - 2\sqrt{2} \right)$$

Формула замены переменной в определенном интеграле

Пример 3

$$\int_0^{\pi/9} \frac{\sin 3x}{\cos 3x} dx = \left[\begin{array}{l} u = \cos 3x \Rightarrow du = u' dx = (\cos 3x)' dx = -3 \sin 3x dx \\ du = -3 \sin 3x dx \Rightarrow \sin 3x dx = -\frac{du}{3} \\ x = 0 \rightarrow u = \cos(3 \cdot 0) = 1 \\ x = \frac{\pi}{9} \rightarrow u = \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{9}\right) = \frac{1}{2} \end{array} \right] =$$

$$\int_1^{1/2} \frac{1}{u} \cdot \left(-\frac{1}{3} du\right) = -\frac{1}{3} \int_1^{1/2} \frac{du}{u} = -\frac{1}{3} \ln|u| \Big|_1^{1/2} = -\frac{1}{3} (\ln|\frac{1}{2}| - \ln|1|) = -\frac{1}{3} (\ln \frac{1}{2} - \ln 1) = -\frac{1}{3} (-\ln 2 - 0) = \frac{\ln 2}{3}$$

Формула интегрирования по частям

- Теорема. Пусть функции $u = u(x)$, $v = v(x)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[a, b]$. Тогда

$$\int_a^b u \, dv = u v \Big|_a^b - \int_a^b v \, du$$

Формула интегрирования по частям

Пример 4

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 \underbrace{x}_{u} \underbrace{e^{2x} dx}_{dv} &= \left[\begin{array}{l} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = e^{2x} dx \Rightarrow v = \int e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^{2x} \end{array} \right] = \underbrace{x}_{u} \underbrace{\left(\frac{1}{2} e^{2x} \right)}_v \Big|_0^1 - \int_0^1 \underbrace{\frac{1}{2}}_v \underbrace{e^{2x} dx}_{du} = \\
 &= 1 \cdot \left(\frac{1}{2} e^{2 \cdot 1} \right) - 0 \cdot \left(\frac{1}{2} e^{2 \cdot 0} \right) - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \int_0^1 e^{2x} dx = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right) \Big|_0^1 = \\
 &= \frac{1}{2} e^2 - \left(\frac{1}{4} e^{2x} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} e^2 - \left(\frac{1}{4} e^{2 \cdot 1} - \frac{1}{4} e^{2 \cdot 0} \right) = \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

Формула интегрирования по частям

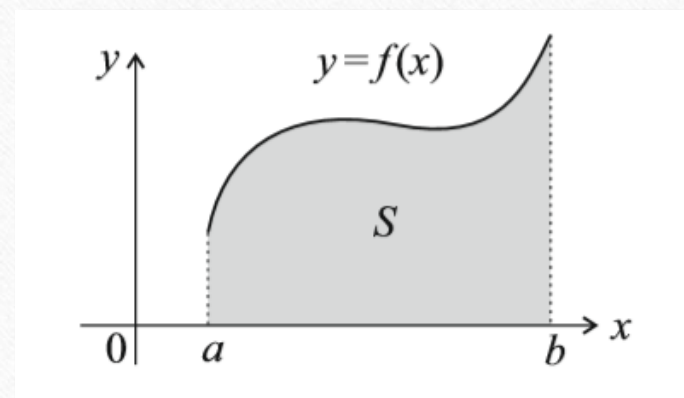
Пример 5

$$\int_1^e \ln x dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln x \Rightarrow du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \Rightarrow v = \int dx = x \end{array} \right] = (\underbrace{\ln x}_u) \cdot \underbrace{x}_v \Big|_1^e - \int_1^e \underbrace{x}_v \left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{du} dx \right) =$$
$$= (\ln e) \cdot e - (\ln 1) \cdot 1 - \int_1^e dx = 1 \cdot e - 0 \cdot 1 - x \Big|_1^e = e - (e - 1) = 1$$

Формула вычисления площади

Если $f(x)$ — неотрицательная непрерывная на отрезке $[a;b]$ функция, S — площадь криволинейной трапеции под графиком этой функции, то

$$S = \int_a^b f(x) dx.$$



Формула вычисления площади

Пример 6

Найти площадь криволинейной трапеции под графиком $y = 1 - x$, если $x \in [0, 1]$.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 (1 - x) dx = \int_0^1 dx - \int_0^1 x dx = x \Big|_0^1 - \frac{x^2}{2} \Big|_0^1 = \\ &= (1 - 0) - \left(\frac{1^2}{2} - \frac{0^2}{2} \right) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

