УДК 512.532.2

Дистрибутивные элементы решетки многообразий полугрупп*

Б. М. Верников, В. Ю. Шапрынский

Аннотация

В работе полностью описаны многообразия полугрупп, являющиеся дистрибутивными элементами решетки всех многообразий полугрупп.

Ключевые слова: полугруппа, многообразие, решетка многообразий, дистрибутивный элемент решетки.

1 Введение

Решетка всех многообразий полугрупп, которую мы будем обозначать через **SEM**, является предметом интенсивных исследований на протяжении более чем четырех последних десятилетий. В этом направлении накоплен обширный и весьма разнообразный материал, систематическому изложению которого посвящен недавний обзор [8].

В теории решеток заметное внимание уделяется изучению дистрибутивных и нейтральных элементов. Напомним, что элемент x решетки $\langle L; \vee, \wedge \rangle$ называется *дистрибутивным*, если

$$\forall y, z \in L\colon \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$

и *нейтральным*, если для любых элементов $y, z \in L$ элементы x, y и z порождают дистрибутивную подрешетку в L. Обширную информацию об элементах этих двух и некоторых родственных им типов, показывающую естественность и важность их изучения, можно найти, например, в монографии [6, § III.2]. Коротко говоря, дистрибутивные (а также определяемые двойственно к ним *кодистрибутивные*) элементы «отвечают» за гомоморфизмы решетки на свои интервалы, а нейтральные — за ее разложение в подпрямое произведение своих интервалов.

Нейтральные элементы решетки **SEM** полностью описаны в работе [19]. Дистрибутивные и нейтральные элементы, а также элементы некоторых

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-01-12142) и программы «Развитие научного потенциала высшей школы» Федерального агентства по образованию Российской Федерации (проект № 2.1.1/3537).

родственных им типов в решетке надкоммутативных многообразий полугрупп изучены в работах [1, 13]. В целом ряде работ (см. [2, 10, 14–19], а также [8, § 14]) изучались модулярные и родственные им элементы решетки **SEM**. Однако дистрибутивные элементы этой решетки до последнего времени в литературе не рассматривались.

Данная работа посвящена полному описанию дистрибутивных элементов решетки **SEM**. Чтобы сформулировать основной результат работы, нам понадобится ряд обозначений. Пару тождеств $wx = xw = w$, где буква x не входит в запись слова w, мы, как обычно, будем заменять символическим тождеством $w = 0$ (такая запись оправданна, поскольку полугруппа с такими тождествами имеет нуль и все значения слова w в ней равны нулю). Через $\operatorname{var}\Sigma$ обозначается многообразие полугрупп, заданное системой тождеств Σ. Зафиксируем обозначения для нескольких конкретных многообразий полугрупп:

$\mathcal{SEM}$ — многообразие всех полугрупп;

$\mathcal{SL} = \operatorname{var}\{x = x^2, xy = yx\}$ — многообразие полурешеток;

$\mathcal{M}_1 = \operatorname{var}\{x^2y = xyx = yx^2 = 0\}$;

$\mathcal{M}_1^n = \operatorname{var}\{x^2y = xyx = yx^2 = x_1x_2\cdots x_n = 0\}$;

$\mathcal{M}_2 = \operatorname{var}\{x^2 = xyx = 0\}$;

$\mathcal{M}_2^n = \operatorname{var}\{x^2 = xyx = x_1x_2\cdots x_n = 0\}$,

где n — произвольное натуральное число.

Основным результатом данной работы является

Теорема 1.1. *Многообразия $\mathcal{SEM}$, $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_1^n$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_2^n$, $\mathcal{M}_1 \vee \mathcal{SL}$, $\mathcal{M}_1^n \vee \mathcal{SL}$, $\mathcal{M}_2 \vee \mathcal{SL}$, $\mathcal{M}_2^n \vee \mathcal{SL}$, где n — произвольное натуральное число, и только они являются дистрибутивными элементами решетки* **SEM**.

Напомним, что элемент x решетки $\langle L; \vee, \wedge \rangle$ называется *модулярным*, если

$$\forall y, z \in L\colon \quad y \le z \longrightarrow (x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee y.$$

Многообразия, задаваемые тождествами вида $w = 0$, называются *0-приведенными.* Известно, что всякое 0-приведенное многообразие и объединение всякого 0-приведенного многообразия с многообразием $\mathcal{SL}$ являются модулярными элементами решетки **SEM**[1]. Из этого факта и теоремы 1.1 непосредственно вытекает весьма неожиданное

Следствие 1.2. *Всякий дистрибутивный элемент решетки* **SEM** *является модулярным элементом этой решетки.* □

[1] Для 0-приведенных многообразий этот факт был впервые отмечен в [3, следствие 3] и затем передоказан в несколько иной формулировке в [10, предложение 1.1]. Для объединений 0-приведенных многообразий с $\mathcal{SL}$ он непосредственно вытекает из [3, следствие 3] и [18, следствие 1.5(i)] и содержится (в несколько иной формулировке) в [10, предложение 1.1].

Отметим, что обратная импликация места не имеет. Это вытекает из сопоставления теоремы 1.1 и того факта, что существуют не 0-приведенные нильмногообразия полугрупп, являющиеся модулярными элементами решетки **SEM** (см. [14, теорема 3.1] или [18, теорема 1]).

Работа состоит из шести параграфов. В § 2 собраны необходимые для дальнейшего определения, обозначения и вспомогательные результаты. В § 3 сформулированы три утверждения (предложения 3.1–3.3) и показано, как из этих трех утверждений вытекает теорема 1.1. Наконец, § 4, 5 и 6 посвящены доказательству предложений 3.1, 3.2 и 3.3 соответственно.

2 Предварительные сведения

Мы начнем с двух теоретико-решеточных наблюдений.

Лемма 2.1. *Пусть L — решетка с 0, а a — атом решетки L, являющийся ее нейтральным элементом. Элемент $x \in L$ дистрибутивен в L тогда и только тогда, когда элемент $x \vee a$ дистрибутивен в L.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $y, z \in L$. Тогда

$$\begin{aligned}(x \vee a) \vee (y \wedge z) &= (x \vee (y \wedge z)) \vee a \\ &= ((x \vee y) \wedge (x \vee z)) \vee a \qquad \text{(так как } x \text{ дистрибутивен)} \\ &= ((x \vee y) \vee a) \wedge ((x \vee z) \vee a) \quad \text{(так как } a \text{ нейтрален)} \\ &= ((x \vee a) \vee y) \wedge ((x \vee a) \vee z).\end{aligned}$$

Следовательно, $x \vee a$ — дистрибутивный элемент решетки L.

Достаточность. Пусть $x \vee a$ — дистрибутивный элемент в L. Поскольку a — атом в L, для произвольного элемента $d \in L$ условия $d \ngeq a$ и $d \wedge a = 0$ эквивалентны. Учитывая, что a — нейтральный элемент в L, получаем, что если $b, c \in L$ и $b \wedge a = c \wedge a = 0$, то $(b \vee c) \wedge a = (b \wedge a) \vee (c \wedge a) = 0$. Другими словами,

$$\forall\, b, c \in L\colon \quad b \ngeq a \;\&\; c \ngeq a \longrightarrow b \vee c \ngeq a. \tag{2.1}$$

Далее, известно, что если e — нейтральный элемент в L, то

$$\forall\, f, g \in L\colon \quad f \wedge e = g \wedge e \;\&\; f \vee e = g \vee e \longrightarrow f = g \tag{2.2}$$

(см., например, [6, теорема III.2.4]). Следовательно,

$$\forall\, b, c \in L\colon \quad b \ngeq a \;\&\; c \ngeq a \;\&\; b \vee a = c \vee a \longrightarrow b = c. \tag{2.3}$$

Пусть теперь $y, z \in L$. Имеем:

$$\begin{aligned}(x \vee (y \wedge z)) \vee a &= (x \vee a) \vee (y \wedge z) \\ &= ((x \vee a) \vee y) \wedge ((x \vee a) \vee z) \quad \text{(так как } x \vee a \text{ дистрибутивен)} \\ &= ((x \vee y) \vee a) \wedge ((x \vee z) \vee a) \\ &= ((x \vee y) \wedge (x \vee z)) \vee a \qquad \text{(так как } a \text{ нейтрален).}\end{aligned}$$

Таким образом,

$$(x \vee (y \wedge z)) \vee a = ((x \vee y) \wedge (x \vee z)) \vee a. \tag{2.4}$$

Предположим, что $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \ngeq a$. Поскольку $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \geq x \vee (y \wedge z)$, получаем, что в этом случае и $x \vee (y \wedge z) \ngeq a$. Но тогда из (2.3) и (2.4) вытекает, что $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.

Пусть теперь $(x \vee y) \wedge (x \vee z) \geq a$. В этом случае $x \vee y \geq a$ и $x \vee z \geq a$. Если $x \geq a$, то $x \vee a = x$, и потому x дистрибутивен в L. Поэтому можно считать, что $x \ngeq a$. Из (2.1) теперь вытекает, что $y \geq a$ и $z \geq a$. Следовательно, $x \vee (y \wedge z) \geq a$. Имеем:

$$\begin{aligned} x \vee (y \wedge z) &= (x \vee (y \wedge z)) \vee a && (\text{так как } x \vee (y \wedge z) \geq a) \\ &= ((x \vee y) \wedge (x \vee z)) \vee a && (\text{в силу } (2.4)) \\ &= (x \vee y) \wedge (x \vee z) && (\text{так как } (x \vee y) \wedge (x \vee z) \geq a). \end{aligned}$$

Мы видим, что и в этом случае $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. □

Лемма 2.2. *Пусть L — решетка с 0, a — атом решетки L, являющийся ее нейтральным элементом, $x, y, z \in L$, $y' = y \vee a$ и $z' = z \vee a$. Если $x \vee (y' \wedge z') = (x \vee y') \wedge (x \vee z')$, то и $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$.*

Доказательство. Учитывая, что решетка $(a]$ является 2-элементной цепью, имеем

$$\begin{aligned} (x \vee (y \wedge z)) \wedge a &= (x \wedge a) \vee ((y \wedge z) \wedge a) && (\text{так как } a \text{ нейтрален}) \\ &= (x \wedge a) \vee ((y \wedge a) \wedge (z \wedge a)) \\ &= ((x \wedge a) \vee (y \wedge a)) \wedge && (\text{так как решетка } (a] \\ &\quad \wedge ((x \wedge a) \vee (z \wedge a)) && \text{дистрибутивна}) \\ &= ((x \vee y) \wedge a) \wedge ((x \vee z) \wedge a) && (\text{так как } a \text{ нейтрален}) \\ &= ((x \vee y) \wedge (x \vee z)) \wedge a, \end{aligned}$$

то есть

$$(x \vee (y \wedge z)) \wedge a = ((x \vee y) \wedge (x \vee z)) \wedge a. \tag{2.5}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned} (x \vee (y \wedge z)) \vee a &= x \vee ((y \wedge z) \vee a) \\ &= x \vee ((y \vee a) \wedge (z \vee a)) && (\text{так как } a \text{ нейтрален}) \\ &= x \vee (y' \wedge z') \\ &= (x \vee y') \wedge (x \vee z') && (\text{по условию}) \\ &= (x \vee (y \vee a)) \wedge (x \vee (z \vee a)) \\ &= ((x \vee y) \vee a) \wedge ((x \vee z) \vee a) \\ &= ((x \vee y) \wedge (x \vee z)) \vee a && (\text{так как } a \text{ нейтрален}), \end{aligned}$$

то есть

$$(x \vee (y \wedge z)) \vee a = ((x \vee y) \wedge (x \vee z)) \vee a. \tag{2.6}$$

Поскольку a — нейтральный элемент, из (2.5), (2.6) и (2.2) вытекает, что $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$. □

Применение лемм 2.1 и 2.2 в дальнейшем основано на следующих двух свойствах многообразия $\mathcal{SL}$.

Лемма 2.3. *Многообразие* $\mathcal{SL}$ *является:*

(i) *атомом решетки* **SEM***;*

(ii) *нейтральным элементом решетки* **SEM**. □

Утверждение (i) общеизвестно (см. [8, § 1]). Утверждение (ii) фактически также хорошо известно с начала 1970-х годов. В явном виде оно доказано в [19, предложение 2.4].

Первое из двух следующих утверждений непосредственно вытекает из лемм 2.1 и 2.3, а второе — из лемм 2.2 и 2.3.

Следствие 2.4. *Многообразие полугрупп* $\mathcal{V}$ *является дистрибутивным элементом решетки* **SEM** *тогда и только тогда, когда тем же свойством обладает многообразие* $\mathcal{V} \vee \mathcal{SL}$. □

Следствие 2.5. *Пусть* $\mathcal{X}$, $\mathcal{Y}$ *и* $\mathcal{Z}$ *— многообразия полугрупп,* $\mathcal{Y}' = \mathcal{Y} \vee \mathcal{SL}$ *и* $\mathcal{Z}' = \mathcal{Z} \vee \mathcal{SL}$. *Если* $\mathcal{X} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z}) \neq (\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{X} \vee \mathcal{Z})$, *то и* $\mathcal{X} \vee (\mathcal{Y}' \wedge \mathcal{Z}') \neq (\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}') \wedge (\mathcal{X} \vee \mathcal{Z}')$. □

Всюду далее через F обозначается свободная полугруппа счетного ранга над алфавитом $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, а через F^1 — полугруппа F с внешне присоединенной единицей, роль которой играет пустое слово. Символом $\equiv$ мы обозначаем отношение равенства на F и F^1. Для всякого натурального m положим $X_m = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$. Через F_m будет обозначаться свободная полугруппа над алфавитом X_m. Если $w \in F$, то через $c(w)$ обозначается множество всех букв, входящих в запись слова w, через $\ell(w)$ — длина этого слова, а через $\ell_i(w)$ — число вхождений буквы x_i в запись слова w. Напомним, что слово w называется *линейным*, если $\ell_i(w) \le 1$ для всякого i. Буква x называется *простой* [*кратной*] в слове w, если она входит в запись w ровно один раз [более одного раза]. Первую [последнюю] букву слова w мы будем обозначать через $h(w)$ [соответственно $t(w)$].

Тождество $u = v$ называется *уравновешенным*, если $\ell_i(u) = \ell_i(v)$ для всякого i. Ясно, что если тождество $u = v$ уравновешенно, то $\ell(u) = \ell(v)$. Длина каждой из частей уравновешенного тождества называется *длиной* этого тождества. Через S_n мы будем обозначать группу перестановок на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$. Частным случаем уравновешенных тождеств являются *перестановочные* тождества, т. е. тождества вида

$$x_1 x_2 \cdots x_n = x_{1\alpha} x_{2\alpha} \cdots x_{n\alpha}, \tag{2.7}$$

где α — нетривиальная перестановка из S_n. Тождество вида (2.7) для любой (в том числе тривиальной) перестановки $\alpha \in S_n$ мы будем для краткости обозначать через $p_n[\alpha]$.

Будем говорить, что тождество $u = v$ *непосредственно вытекает* из тождества $s = t$, если найдутся такие (возможно пустые) слова a и b и такой эндоморфизм ζ полугруппы F, что либо $u \equiv a\zeta(s)b$ и $v \equiv a\zeta(t)b$, либо

$u \equiv a\zeta(t)b$ и $v \equiv a\zeta(s)b$. Общеизвестно, что тождество $u = v$ вытекает из тождества $s = t$ тогда и только тогда, когда найдется последовательность слов

$$w_0 \longrightarrow w_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow w_k \tag{2.8}$$

такая, что $w_0 \equiv u$, $w_k \equiv v$ и для всякого $i = 0, 1, \ldots, k-1$ тождество $w_i = w_{i+1}$ непосредственно вытекает из $s = t$.

Общеизвестно также, что если $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ — многообразия полугрупп, то тождество $u = v$ выполнено в многообразии $\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}$ тогда и только тогда, когда существует последовательность слов (2.8) такая, что $w_0 \equiv u$, $w_k \equiv v$ и для всякого $i = 0, 1, \ldots, k-1$ тождество $w_i = w_{i+1}$ выполнено в одном из многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$. Всякую последовательность слов с указанными свойствами мы будем называть *выводом тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$*. Число k называется *длиной* этого вывода. При анализе выводимости тождеств в ряде случаев нам будет удобно записывать тот факт, что тождество $u = v$ выполнено в многообразии $\mathcal{V}$, в виде $u \xrightarrow{\mathcal{V}} v$.

Мы будем говорить, что слово *u содержит образ слова v*, если $u \equiv a\zeta(v)b$ для некоторых (возможно пустых) слов a и b и некоторого эндоморфизма ζ на F.

Обозначим через $\mathcal{LZ}$ [соответственно $\mathcal{RZ}$] многообразие полугрупп левых [правых] нулей. Положим $\mathcal{P} = \mathrm{var}\{xy = x^2y, x^2y^2 = y^2x^2\}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}} = \mathrm{var}\{xy = xy^2, x^2y^2 = y^2x^2\}$. Утверждения (i) и (ii) следующей леммы общеизвестны, а утверждение (iii) доказано в [5, лемма 7].

Лемма 2.6. *Тождество $u = v$ выполнено:*

(i) *в многообразии $\mathcal{SL}$ тогда и только тогда, когда $c(u) = c(v)$;*

(ii) *в многообразии $\mathcal{LZ}$ тогда и только тогда, когда $h(u) \equiv h(v)$;*

(iii) *в многообразии $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда либо буквы $t(u)$ и $t(v)$ являются кратными в словах u и v соответственно, либо $t(u) \equiv t(v)$ и буква $t(u)$ является простой в каждом из слов u и v.* □

Для удобства изложения отметим следующий легко проверяемый факт.

Лемма 2.7. *Многообразия $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_1^n$, $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_2^n$, где n — произвольное натуральное число, и только они являются 0-приведенными многообразиями полугрупп, удовлетворяющими тождествам*

$$x^2y = xyx = yx^2 = 0. \tag{2.9}$$

Доказательство. Достаточно заметить, что если w — любое нелинейное слово, отличное от x^2, то тождество $w = 0$ вытекает из тождеств (2.9). □

Перейдем к серии утверждений, на которые будет опираться доказательство необходимости в теореме 1.1. Элемент x решетки $\langle L; \vee, \wedge\rangle$ называется *нижнемодулярным*, если

$$\forall y, z \in L\colon \quad x \le y \longrightarrow x \vee (y \wedge z) = y \wedge (x \vee z).$$

Сравнивая определения дистрибутивных и нижнемодулярных элементов, мы получаем, что справедлива следующая очевидная, но полезная для дальнейшего

Лемма 2.8. *Дистрибутивный элемент произвольной решетки является ее нижнемодулярным элементом.* □

Для краткости договоримся называть многообразие полугрупп *дистрибутивным* [*нижнемодулярным*], если оно является дистрибутивным [нижнемодулярным] элементом решетки **SEM**. Лемма 2.8 позволяет использовать при изучении дистрибутивных многообразий полугрупп информацию о нижнемодулярных многообразиях, полученную в [15]. В частности, в [15, следствие 2.7] показано, что всякое нижнемодулярное нильмногообразие полугрупп является 0-приведенным многообразием. Комбинируя этот факт с леммой 2.8, мы получаем

Следствие 2.9. *Если нильмногообразие полугрупп является дистрибутивным элементом решетки* **SEM**, *то оно является* 0*-приведенным многообразием.* □

Многообразие полугрупп называется *собственным*, если оно отлично от многообразия $\mathcal{SEM}$. Если $\mathcal{V}$ — периодическое многообразие полугрупп, то, как хорошо известно, оно содержит наибольшее нильподмногообразие, которое мы будем обозначать через $\mathrm{Nil}(\mathcal{V})$. Из леммы 2.8 и [15, теорема 1] вытекает

Следствие 2.10. *Если собственное многообразие полугрупп* $\mathcal{V}$ *является дистрибутивным элементом решетки* **SEM**, *то* $\mathcal{V}$ *— периодическое многообразие и* $\mathrm{Nil}(\mathcal{V})$ *является* 0*-приведенным многообразием.* □

Через $\mathcal{COM}$ мы будем обозначать многообразие всех коммутативных полугрупп, а через **OC** — решетку всех *надкоммутативных* многообразий полугрупп, т. е. многообразий полугрупп, содержащих многообразие $\mathcal{COM}$. Следующее очевидное утверждение играет существенную роль в доказательстве основного результата работы.

Лемма 2.11. *Если многообразие полугрупп* $\mathcal{V}$ *является дистрибутивным элементом решетки* **SEM**, *то многообразие* $\mathcal{V} \vee \mathcal{COM}$ *является дистрибутивным элементом решетки* **OC**. □

Лемма 2.11 позволяет использовать при изучении дистрибутивных многообразий полугрупп информацию о дистрибутивных элементах решетки **OC**, полученную в [1]. Чтобы сформулировать соответствующий результат, нам понадобятся некоторые определения и обозначения. Хорошо известно, что любое тождество, выполненное в произвольном надкоммутативном многообразии, является уравновешенным. Для произвольного слова u положим $W_u = \{w \in F \mid \ell_i(w) = \ell_i(u) \text{ для всякого } i\}$. Таким образом, если в надкоммутативном многообразии полугрупп выполнено тождество $u = v$, то $v \in W_u$. Надкоммутативное многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ назовем *жадным*, если из выполнимости в $\mathcal{V}$ нетривиального тождества $u = v$ вытекает выполнимость в $\mathcal{V}$ тождества $u' = v'$ для любых слов $u', v' \in W_u$. Из доказательства теоремы 2 работы [1] вытекает

Лемма 2.12. *Надкоммутативное многообразие полугрупп является дистрибутивным элементом решетки* **OC** *тогда и только тогда, когда оно является жадным многообразием.* □

Из лемм 2.11 и 2.12 вытекает

Следствие 2.13. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ является дистрибутивным элементом решетки* **SEM**, *то $\mathcal{V} \vee \mathcal{COM}$ — жадное многообразие.* □

Из леммы 2 работы [4] и доказательства предложения 1 той же работы вытекает

Лемма 2.14. *Если периодическое многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ не содержит многообразий $\mathcal{LZ}$, $\mathcal{RZ}$, $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$, то $\mathcal{V} = \mathcal{K} \vee \mathcal{N}$, где многообразие $\mathcal{K}$ порождается моноидом, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие.* □

Через $\mathcal{T}$ мы будем обозначать тривиальное многообразие полугрупп. Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ содержит полугруппы вида N^1, где N — нильполугруппа, то через $\mathrm{Nil}^1(\mathcal{V})$ будет обозначаться многообразие, порожденное всеми такими полугруппами, содержащимися в $\mathcal{V}$; в противном случае положим $\mathrm{Nil}^1(\mathcal{V}) = \mathcal{T}$. Нам понадобится

Лемма 2.15 ([9])**.** *Если периодическое многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ порождается коммутативным моноидом, то $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{M}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие периодических абелевых групп, а $\mathcal{M} = \mathrm{Nil}^1(\mathcal{V})$.* □

Положим $\mathcal{C} = \mathrm{var}\{x^2 = x^3, xy = yx\}$. Общеизвестно, что многообразие $\mathcal{C}$ порождается полугруппой N_2^1, где N_2 — двухэлементная полугруппа с нулевым умножением. Очевидно также, что многообразие $\mathcal{SL}$ порождается двухэлементной полурешеткой, которую можно рассматривать как одноэлементную (ниль)полугруппу с внешнеприсоединенной единицей. Эти соображения показывают, что справедлива следующая

Лемма 2.16. *Если $\mathcal{V}$ — периодическое многообразие полугрупп, то либо $\mathrm{Nil}^1(\mathcal{V}) = \mathcal{T}$, либо $\mathrm{Nil}^1(\mathcal{V}) = \mathcal{SL}$, либо $\mathrm{Nil}^1(\mathcal{V}) \supseteq \mathcal{C}$.* □

Как и в работах [15,16], нам понадобится техника, развитая М. В. Сапиром в [12]. Введем соответствующие определения и обозначения. Пусть $\mathcal{G}$ — многообразие периодических групп, а $\{v_i = 1 \mid i \in I\}$ — базис тождеств многообразия $\mathcal{G}$ (как многообразия групп), где v_i — полугрупповые слова. Обозначим через r экспоненту многообразия $\mathcal{G}$. Для всякой буквы x положим $x^0 = x^{r(r+1)}$. Пусть

$$S(\mathcal{G}) = \mathrm{var}\{xyz = xy^{r+1}z, x^0y^0 = y^0x^0, x^2 = x^{r+2}, xv_i^2y = xv_iy \mid i \in I\}.$$

В [12] показано, что многообразие $S(\mathcal{G})$ не зависит от выбора базиса тождеств многообразия $\mathcal{G}$. Далее, обозначим через $F(\mathcal{G})$ свободную группу счетного ранга многообразия $\mathcal{G}$. Подмножество X в $F(\mathcal{G})$ называется *вербальным*, если оно замкнуто относительно эндоморфизмов группы $F(\mathcal{G})$. Иными словами, вербальное подмножество X в $F(\mathcal{G})$ — это множество всех значений в $F(\mathcal{G})$ некоторого множества слов W; в этой ситуации мы будем писать $X = \mathcal{G}(W)$. Если X — вербальное подмножество в $F(\mathcal{G})$ и $X = \mathcal{G}(W)$, то

$$S(\mathcal{G}, X) = S(\mathcal{G}) \wedge \mathrm{var}\big\{xwx = (xwx)^{r+1} \mid w \in W\big\}.$$

Если $X = \{1\}$, где 1 — единица группы $F(\mathcal{G})$, то мы будем писать $S(\mathcal{G}, 1)$ вместо $S(\mathcal{G}, \{1\})$. Нам будет удобно рассматривать пустое множество как вербальное подмножество в $F(\mathcal{G})$. При этом мы полагаем $S(\mathcal{G}, \varnothing) = S(\mathcal{G})$.

Как обычно, решетка подмногообразий многообразия $\mathcal{X}$ обозначается через $L(\mathcal{X})$.

Лемма 2.17 ([12]). *Пусть $\mathcal{G}$ — многообразие периодических групп. Интервал $[S(\mathcal{T}, 1),\, S(\mathcal{G})]$ решетки $L(S(\mathcal{G}))$ состоит из всех многообразий вида $S(\mathcal{H}, X)$, где $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{G}$, а X — (возможно пустое) вербальное подмножество в $F(\mathcal{G})$. При этом, для многообразий $S(\mathcal{H}, X)$ и $S(\mathcal{H}', X')$ из интервала $[S(\mathcal{T}, 1),\, S(\mathcal{G})]$, включение $S(\mathcal{H}', X') \subseteq S(\mathcal{H}, X)$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathcal{H}' \subseteq \mathcal{H}$ и существует множество слов W такое, что $X = \mathcal{H}(W)$ и $\mathcal{H}'(W) \subseteq X'$.* □

Многообразие полугрупп называется *многообразием ступени m*, если все его нильполугруппы нильпотентны ступени $\le m$ и m — наименьшее число с таким свойством. Доказательство достаточности в теореме 1.1 будет опираться на следующие три леммы.

Лемма 2.18 ([7, лемма 1]). *Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству вида $x_1x_2\cdots x_m = w$, где $\ell(w) > m$, то $\mathcal{V}$ — многообразие ступени $\le m$.* □

Лемма 2.19 ([17, предложение 2.11]). *Многообразие полугрупп является многообразием ступени $\le m$ тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет тождеству вида*

$$x_1\cdots x_m = x_1\cdots x_{i-1}(x_i\cdots x_j)^t x_{j+1}\cdots x_m \tag{2.10}$$

для некоторого $t > 1$ и некоторых $1 \le i \le j \le m$. □

Лемма 2.20 ([11]). *Если α — перестановка из S_n такая, что $1\alpha \ne 1$ и $n\alpha \ne n$, то существует натуральное число $N > n$ такое, что тождество $p_n[\alpha]$ влечет любое перестановочное тождество длины N.* □

3 Схема доказательства

Доказательство теоремы 1.1 разбивается на три существенно различных по своему характеру части, соответствующих следующим трем утверждениям.

Предложение 3.1. *Если $\mathcal{V}$ — собственное многообразие полугрупп, являющееся дистрибутивным элементом решетки* **SEM**, *то $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие.*

Предложение 3.2. *Если 0-приведенное многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ является дистрибутивным элементом решетки* **SEM**, *то $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам* (2.9).

Предложение 3.3. *Если $\mathcal{V}$ — 0-приведенное многообразие полугрупп, удовлетворяющее тождествам* (2.9), *то $\mathcal{V}$ является дистрибутивным элементом решетки* **SEM**.

Доказательству этих трех предложений посвящены следующие три параграфа. Здесь мы покажем, как теорема 1.1 вытекает из предложений 3.1–3.3.

Доказательство теоремы 1.1. *Необходимость*. Пусть $\mathcal{V}$ — дистрибутивное многообразие полугрупп, отличное от многообразия $\mathcal{SEM}$. В силу предложения 3.1 $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие. Из следствия 2.4 вытекает, что многообразие $\mathcal{N}$ дистрибутивно. В силу предложения 3.2 $\mathcal{N}$ удовлетворяет тождествам (2.9). Остается сослаться на лемму 2.7.

Достаточность. Тот факт, что многообразие $\mathcal{SEM}$ дистрибутивно, очевиден. Поскольку многообразия $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_1^n$, $\mathcal{M}_2$ и $\mathcal{M}_2^n$ являются 0-приведенными и удовлетворяют тождествам (2.9), остается учесть предложение 3.3 и следствие 2.4. □

4 Доказательство предложения 3.1

Пусть $\mathcal{V}$ — собственное дистрибутивное многообразие полугрупп, $u = v$ — произвольное нетривиальное тождество, выполненное в $\mathcal{V}$, а x и y — буквы, не входящие в запись слов u и v. Тогда в многообразии $\mathcal{V} \vee \mathcal{COM}$ выполнено тождество $uxyv = vxyu$. Ясно, что это тождество нетривиально. Из следствия 2.13 вытекает, что $\mathcal{V} \vee \mathcal{COM}$ — жадное многообразие. Поскольку $xuvy, yuvx \in W_{uxyv}$, это означает, что в многообразии $\mathcal{V} \vee \mathcal{COM}$ выполнено тождество

$$xuvy = yuvx. \tag{4.1}$$

В силу пп. (ii) и (iii) леммы 2.6 и двойственных к ним утверждений это тождество не выполнено в многообразиях $\mathcal{LZ}$, $\mathcal{RZ}$, $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Следовательно, $\mathcal{V}$ не содержит этих многообразий. В силу следствия 2.10 многообразие $\mathcal{V}$ является периодическим. Из леммы 2.14 вытекает теперь, что $\mathcal{V} = \mathcal{K} \vee \mathcal{N}$, где многообразие $\mathcal{K}$ порождается моноидом, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. Без ограничения общности можно считать, что $\mathcal{N} = \mathrm{Nil}(\mathcal{V})$. В силу следствия 2.10 $\mathcal{N}$ — 0-приведенное многообразие. Пусть теперь M — произвольный моноид из $\mathcal{V}$. Тогда в M выполнено тождество (4.1). Подставляя в это тождество 1 вместо всех букв, входящих в запись слов u и v, мы получаем, что моноид M коммутативен. Итак, $\mathcal{K}$ — многообразие коммутативных моноидов. В силу леммы 2.15 $\mathcal{K} = \mathcal{G} \vee \mathcal{M}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие периодических абелевых групп, а $\mathcal{M} = \mathrm{Nil}^1(\mathcal{V})$. Если $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{C}$, то

$$\begin{aligned}
\mathcal{V} &= \mathcal{V} \vee (\mathcal{RZ} \wedge \mathcal{P}) && \text{(поскольку } \mathcal{RZ} \wedge \mathcal{P} = \mathcal{T}\text{)}\\
&= (\mathcal{V} \vee \mathcal{RZ}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{P}) && \text{(поскольку } \mathcal{V} \text{ дистрибутивно)}\\
&\supseteq (\mathcal{C} \vee \mathcal{RZ}) \wedge \mathcal{P} && \text{(поскольку } \mathcal{V} \vee \mathcal{RZ} \supseteq \mathcal{C} \vee \mathcal{RZ} \text{ и } \mathcal{V} \vee \mathcal{P} \supseteq \mathcal{P}\text{)}\\
&= \mathcal{P} && \text{(поскольку } \mathcal{C} \vee \mathcal{RZ} \supseteq \mathcal{P}\ \ [2,\text{ лемма } 5]\text{)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, $\mathcal{V} \supseteq \mathcal{P}$. Но, как показано выше, это включение места не имеет. Полученное противоречие показывает, что $\mathcal{V} \not\supseteq \mathcal{C}$. В силу леммы 2.16 многообразие $\mathcal{M}$ совпадает с одним из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$.

Остается доказать, что многообразие $\mathcal{G}$ тривиально. Предположим, что это не так. Дальнейшие рассуждения основаны на лемме 2.17. В частности, из этой леммы вытекает, что интервал $[S(\mathcal{T},1), S(\mathcal{T})]$ двухэлементен и выполнены равенства $S(\mathcal{T}) \vee S(\mathcal{G}, F(\mathcal{G})) = S(\mathcal{G})$ и $S(\mathcal{T}) \wedge S(\mathcal{G},1) = S(\mathcal{T},1)$. Дальнейшие рассмотрения иллюстрирует рис. 1.

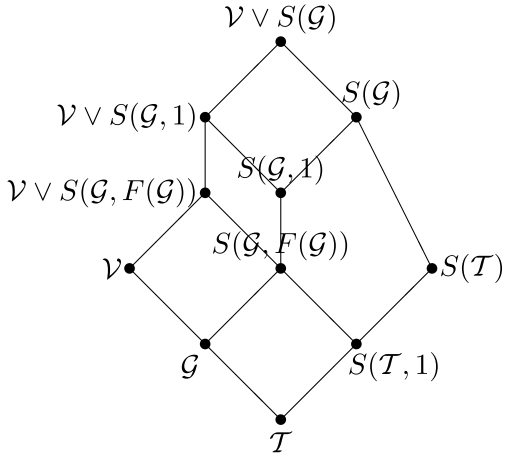

Рис. 1: фрагмент решетки $L(\mathcal{V} \vee S(\mathcal{G}))$

Положим $\mathcal{Y} = S(\mathcal{G},1)$ и $\mathcal{Z} = S(\mathcal{T})$. Ясно, что $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z} \supseteq \mathcal{G} \vee S(\mathcal{T}) = S(\mathcal{G})$, и потому $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z} \supseteq \mathcal{V} \vee S(\mathcal{G})$. Обратное включение очевидно, и потому $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z} = \mathcal{V} \vee S(\mathcal{G})$. Следовательно,

$$(\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}) = (\mathcal{V} \vee S(\mathcal{G},1)) \wedge (\mathcal{V} \vee S(\mathcal{G})) = \mathcal{V} \vee S(\mathcal{G},1).$$

Поскольку многообразие $\mathcal{V}$ дистрибутивно, это означает, что

$$\mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z}) = \mathcal{V} \vee S(\mathcal{G},1).$$

С другой стороны, $\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z} = S(\mathcal{G},1) \wedge S(\mathcal{T}) = S(\mathcal{T},1)$, и потому

$$\mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z}) = \mathcal{V} \vee S(\mathcal{T},1).$$

Таким образом, $\mathcal{V} \vee S(\mathcal{G},1) = \mathcal{V} \vee S(\mathcal{T},1)$. Поскольку

$$\mathcal{V} \vee S(\mathcal{T},1) \subseteq \mathcal{V} \vee S(\mathcal{G},F(\mathcal{G})) \subseteq \mathcal{V} \vee S(\mathcal{G},1),$$

мы получаем, что $\mathcal{V} \vee S(\mathcal{G}, 1) = \mathcal{V} \vee S(\mathcal{G}, F(\mathcal{G}))$.

Покажем, что последнее равенство неверно. Пусть u — произвольное слово такое, что $u = 0$ в $\mathcal{N}$. Обозначим через r экспоненту многообразия $\mathcal{G}$. Напомним, что $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{SL}$. Пусть x — произвольная буква, не входящая в запись слова u. По определению многообразия $S(\mathcal{G}, F(\mathcal{G}))$, в нем выполнено тождество $xux = (xux)^{r+1}$. Ясно, что это тождество выполнено также в многообразии $\mathcal{V}$, а значит и в многообразии $\mathcal{V} \vee S(\mathcal{G}, F(\mathcal{G}))$. Если в многообразии $\mathcal{G}$, рассматриваемом как многообразие групп, не выполнено тождество $u = 1$, то тождество $xux = (xux)^{r+1}$ не выполнено в многообразии $S(\mathcal{G}, 1)$ (по определению последнего многообразия), а значит и в многообразии $\mathcal{V} \vee S(\mathcal{G}, 1)$. Предположим теперь, что $u = 1$ в $\mathcal{G}$. Пусть y — произвольная буква, не входящая в запись слова u и отличная от x. Поскольку многообразие $\mathcal{G}$ нетривиально, в нем не выполнено тождество $uy = 1$. Поэтому в качестве тождества, выполненного в $\mathcal{V} \vee S(\mathcal{G}, F(\mathcal{G}))$, но не выполненного в $\mathcal{V} \vee S(\mathcal{G}, 1)$, можно взять тождество $xuyx = (xuyx)^{r+1}$. Итак, $\mathcal{V} \vee S(\mathcal{G}, 1) \neq \mathcal{V} \vee S(\mathcal{G}, F(\mathcal{G}))$. Полученное противоречие завершает доказательство предложения 3.1. $\square$

5 Доказательство предложения 3.2

Докажем сначала две леммы. Если $\sigma \in S_m$, а $u \in F_m$, то через $\sigma(u)$ будем обозначать образ слова u при автоморфизме полугруппы F_m, индуцированном действием перестановки σ на индексах переменных.

Лемма 5.1. *Пусть $u, v \in F_m$ для некоторого m, причем слово u не содержит образа слова v, а слово v не содержит образа слова u. Пусть $\mathcal{X} = \mathrm{var}\{u = v\}$, а σ — произвольная перестановка из S_m. Если многообразие $\mathcal{X}$ удовлетворяет нетривиальному тождеству вида $\sigma(u) = w$, то $w \equiv \sigma(v)$.*

Доказательство. Предположим, что из тождества $u = v$ непосредственно вытекает нетривиальное тождество вида $\sigma(u) = w$. Тогда либо $\sigma(u) \equiv a\zeta(u)b$ и $w \equiv a\zeta(v)b$, либо $\sigma(u) \equiv a\zeta(v)b$ и $w \equiv a\zeta(u)b$ для некоторых (возможно пустых) слов a и b и некоторого гомоморфизма ζ на F. Во втором случае

$$\begin{aligned} u &\equiv \sigma^{-1}(w) \equiv \sigma^{-1}(a\zeta(v)b) \equiv \sigma^{-1}(a)\sigma^{-1}(\zeta(v))\sigma^{-1}(b) \equiv \\ &\equiv \sigma^{-1}(a)(\sigma^{-1}\zeta)(v)\sigma^{-1}(b), \end{aligned}$$

т. е. u содержит образ v вопреки условию. Таким образом, имеет место первый случай, и, в частности, $\sigma(u) \equiv a\zeta(u)b$. Из равенств $\ell(u) = \ell(\sigma(u)) = \ell(a\zeta(u)b)$ следует, что слова a и b — пустые, а ζ переводит каждую букву из X_m в букву. В частности, $\sigma(u) \equiv \zeta(u)$. Это означает, что ограничение гомоморфизма ζ на полугруппу F_m совпадает с действием перестановки σ на этой полугруппе, откуда $w \equiv \sigma(v)$. В силу симметрии, если из тождества $u = v$ непосредственно вытекает нетривиальное тождество вида $\sigma(v) = w$, то $w \equiv \sigma(u)$.

Предположим теперь, что последовательность слов

$$\sigma(u) \equiv w_0 \longrightarrow w_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow w_k \equiv w \tag{5.1}$$

является кратчайшим выводом тождества $\sigma(u) = w$ из тождества $u = v$. В частности, для всякого $i = 0, 1, \ldots, k-1$ тождество $w_i = w_{i+1}$ нетривиально. В силу сказанного выше, $w_1 \equiv \sigma(v)$. Если $k > 1$, то из того, что $w_1 \equiv \sigma(v)$, вытекает, что $w_2 \equiv \sigma(u)$. Это означает, что либо вывод (5.1) не является кратчайшим (если $k > 2$), либо тождество $\sigma(u) = w$ тривиально (если $k = 2$). Таким образом, случай $k > 1$ невозможен. Следовательно, $k = 1$, и потому $w \equiv w_1 \equiv \sigma(v)$. □

Лемма 5.2. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп, являющееся дистрибутивным элементом решетки* **SEM**, *а u, v — слова такие, что $c(u) = c(v)$ и выполнено одно из следующих условий:*

(i) *слово u не содержит образа слова v, а слово v не содержит образа слова u;*

(ii) $\ell(u) = \ell(v)$.

Если многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = 0$, то оно удовлетворяет и тождеству $v = 0$.

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $c(u) = c(v) = X_m$ для некоторого натурального m.

(i) Если $m = 1$, то $u \equiv x^q$ и $v \equiv x^r$ для некоторых q и r. Но тогда одно из слов u и v содержит образ другого, что противоречит условию. Следовательно, $m > 1$, и потому группа S_m содержит нетривиальную перестановку α. Положим $w \equiv \alpha(u)$. Тогда в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $w = 0$, а значит и тождество $u = w$. Положим $\mathcal{Y} = \mathrm{var}\{u = v\}$ и $\mathcal{Z} = \mathrm{var}\{v = w\}$. Поскольку многообразие $\mathcal{V}$ дистрибутивно, выполнено равенство

$$\mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z}) = (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}).$$

Очевидно, что многообразие $\mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z})$ удовлетворяет тождеству $u = w$. Следовательно, ему удовлетворяет и многообразие $(\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z})$. Это означает, что должен существовать вывод тождества $u = w$ из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$. В частности, одно из этих многообразий должно удовлетворять нетривиальному тождеству вида $u = w_1$.

Предположим, что это тождество выполнено в $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$. В частности, оно выполнено в $\mathcal{Y}$. Применяя лемму 5.1 в случае, когда σ — тривиальная перестановка из S_m, мы получаем, что $w_1 \equiv v$. Поскольку $u = w_1$ в $\mathcal{V}$, это означает, что в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $u = v$, а вместе с ним и тождество $v = 0$.

Остается рассмотреть случай, когда тождество $u = w_1$ выполнено в $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$. В частности, оно выполнено в $\mathcal{Z}$. Поскольку $u \equiv \alpha^{-1}(w)$, можно применить лемму 5.1 при $\sigma = \alpha^{-1}$. В результате мы получаем, что $w_1 \equiv \alpha^{-1}(v)$. Но тождество $u = w_1$ выполнено в $\mathcal{V}$. Следовательно, многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = \alpha^{-1}(v)$, а вместе с ним и тождествам $\alpha^{-1}(v) = 0$ и $v = 0$.

(ii) Поскольку п. (i) уже доказан, можно считать, что одно из слов u и v содержит образ другого. Вначале предположим, что $u \equiv a\zeta(v)b$ для некоторых (возможно пустых) слов a и b и некоторого гомоморфизма ζ на F. Поскольку $\ell(v) = \ell(u) = \ell(a\zeta(v)b)$, слова a и b являются пустыми, а ζ переводит каждую букву из X_m в букву. Поскольку, кроме того, $c(\zeta(v)) = c(u) = c(v) = X_m$, мы получаем, что $\zeta(v) \equiv \alpha(v)$ для подходящей перестановки $\alpha \in S_m$. Тогда $v \equiv \alpha^{-1}(\zeta(v)) \equiv \alpha^{-1}(u)$, и потому тождество $v = 0$ эквивалентно в $\mathcal{V}$ тождеству $u = 0$. Аналогично можно показать, что если $v \equiv a\zeta(u)b$, где a, b и ζ имеют прежний смысл, то $v \equiv \alpha(u)$ для подходящей перестановки $\alpha \in S_m$, и тождества $u = 0$ и $v = 0$ эквивалентны в $\mathcal{V}$. $\square$

Перейдем к непосредственному доказательству предложения 3.2. Пусть $\mathcal{V}$ — дистрибутивное 0-приведенное многообразие полугрупп. В силу своей 0-приведенности многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = 0$ для некоторого слова u. Можно считать, что $c(u) = \{x, y\}$. В самом деле, если u зависит от одной буквы, то можно подставить вместо этой буквы слово xy, если u зависит от двух букв — переименовать одну из них в x, а другую — в y, а если u зависит от более чем двух букв — приравнять одну из них к x, а все остальные — к y. Пусть $n = \ell(u)$. В силу леммы 5.2(ii) $\mathcal{V}$ удовлетворяет всем тождествам вида $v = 0$, где $c(v) = \{x, y\}$ и $\ell(v) = n$. Если $n \le 3$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам (2.9) и доказательство завершено.

Предположим теперь, что $n \ge 4$. Пусть $s \equiv xyx^{n-2}$ и $t \equiv x^{n-2}y$. Поскольку $n - 2 > 1$, ясно, что ни одно из слов s и t не содержит образа другого. Из того, что $\ell(s) = n$, вытекает, что многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $s = 0$. Применяя лемму 5.2(i), мы получаем, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет и тождеству $t = 0$. Поскольку $\ell(t) = n - 1$, из леммы 5.2(ii) вытекает, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет всем тождествам вида $v = 0$, где $c(v) = \{x, y\}$ и $\ell(v) = n - 1$. Очевидная индукция позволяет установить, что $\mathcal{V}$ удовлетворяет и всем тождествам вида $v = 0$, где $c(v) = \{x, y\}$ и $3 \le \ell(v) \le n - 2$. В частности, $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождествам (2.9).

Предложение 3.2 доказано. $\square$

6 Доказательство предложения 3.3

Пусть $\mathcal{V}$ — 0-приведенное многообразие полугрупп, удовлетворяющее тождествам (2.9), а $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ — произвольные многообразия полугрупп. Требуется доказать, что

$$(\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}) = \mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z}).$$

Следствие 2.5 позволяет всюду далее считать, что $\mathcal{Y}, \mathcal{Z} \supseteq \mathcal{SL}$. Поскольку включение $\mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z}) \subseteq (\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z})$ очевидно, достаточно доказать, что $(\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}) \subseteq \mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z})$. Иными словами, требуется проверить, что произвольное тождество, выполненное в многообразии $\mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z})$, выполнено и в $(\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z})$.

В дальнейшем мы будем постоянно использовать, не оговаривая этого в явном виде, тот очевидный факт, что если w — нелинейное слово и $w \not\equiv x^2$, то тождество $w = 0$ вытекает из (2.9) и потому выполнено в $\mathcal{V}$. Пусть тождество $u = v$ выполнено в многообразии $\mathcal{V} \vee (\mathcal{Y} \wedge \mathcal{Z})$. Тогда оно выполнено в $\mathcal{V}$ и существует вывод этого тождества из тождеств многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$. Предположим, что последовательность слов

$$u \equiv w_0 \longrightarrow w_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow w_k \equiv v \tag{6.1}$$

является кратчайшим выводом тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$. Поскольку $\mathcal{Y}, \mathcal{Z} \supseteq \mathcal{SL}$, из леммы 2.6(i) вытекает, что $c(w_0) = c(w_1) = \cdots = c(w_k)$. Без ограничения общности можно считать, что $c(w_0) = \cdots = c(w_k) = X_m$ для некоторого m.

Будем вести доказательство индукцией по длине вывода (6.1). База индукции очевидна: если $k = 1$, то тождество $u = v$ выполнено в одном из многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$, а значит и в их пересечении. Пусть теперь $k > 1$.

Тождество $u = v$ выполнено в многообразии $\mathcal{V}$. Поскольку это многообразие является 0-приведенным, в $\mathcal{V}$ выполнены и тождества $u = v = 0$. Если $w_i = 0$ в $\mathcal{V}$ для некоторого $0 < i < k$, то в $\mathcal{V}$ выполнены тождества $u = w_i$ и $w_i = v$. При этом последовательности слов

$$w_0 \longrightarrow w_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow w_i \quad \text{и} \quad w_i \longrightarrow w_{i+1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow w_k$$

являются, соответственно, выводами тождеств $u = w_i$ и $w_i = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$, длины которых меньше k. По предположению индукции тождества $u = w_i$ и $w_i = v$ выполнены в $(\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z})$. Но тогда и $u = v$ в $(\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}) \wedge (\mathcal{V} \vee \mathcal{Z})$. Поэтому далее можно считать, что каждое из слов $w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}$ либо линейно, либо совпадает со словом x^2.

Предположим, что $w_i \equiv x^2$ для некоторого $0 < i < k$. Поскольку $c(w_0) = c(w_1) = \cdots = c(w_k)$, для всякого $j = 0, 1, \ldots, k$ существует n_j такое, что $w_j \equiv x^{n_j}$. Из того, что (6.1) — кратчайший вывод тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$, вытекает, что числа $n_0, n_1, \ldots, n_k$ попарно различны. В частности, $n_0, n_k \neq 2$. Если $n_0 = 1$ или $n_k = 1$, то в многообразии $\mathcal{V}$ выполнено тождество $x = 0$, т. е. $\mathcal{V} = \mathcal{T}$. Ясно, что в этом случае $\mathcal{V}$ дистрибутивно. Следовательно, можно считать, что $n_0, n_k \geq 3$. Поскольку каждое из слов $w_1, w_2, \ldots, w_{k-1}$ либо линейно, либо совпадает со словом x^2, мы получаем, что $n_j \leq 2$ для всякого $0 < j < k$. Но числа $n_0, n_1, \ldots, n_k$ попарно различны. Следовательно, $2 \leq k \leq 3$, причем если $k = 3$, то одно из чисел n_1 и n_2 равно 1, а другое — 2. Таким образом, без ограничения общности можно считать, что вывод (6.1) имеет в данном случае либо вид $x^{n_0} \longrightarrow x^2 \longrightarrow x \longrightarrow x^{n_3}$, где $n_0, n_3 \geq 3$, либо вид $x^{n_0} \longrightarrow x^2 \longrightarrow x^{n_2}$, где $n_0, n_2 \geq 3$.

Если вывод (6.1) имеет вид $x^{n_0} \longrightarrow x^2 \longrightarrow x \longrightarrow x^{n_3}$, то в одном из многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ выполнено тождество $x = x^2$, а значит и тождество $x^{n_0} = x^{n_3}$. Но это означает, что тождество $x^{n_0} = x^{n_3}$, т. е. тождество $u = v$, выполнено в одном из многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$, а значит и в их пересечении.

Пусть теперь вывод (6.1) имеет вид $x^{n_0} \longrightarrow x^2 \longrightarrow x^{n_2}$. В этом случае в одном из многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ выполнено тождество $x^{n_0} = x^2$. Умножая обе его части на x^{n_2-2}, получаем, что в одном из многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ выполнено тождество $x^{n_0+n_2-2} = x^{n_2}$. Аналогично, умножая обе части тождества

$x^2 = x^{n_2}$, выполненного в одном из многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$, на x^{n_0-2}, получаем, что в одном из этих многообразий выполнено тождество $x^{n_0} = x^{n_0+n_2-2}$. Следовательно, последовательность слов $x^{n_0} \longrightarrow x^{n_0+n_2-2} \longrightarrow x^{n_2}$ является выводом тождества $x^{n_0} = x^{n_2}$, т. е. тождества $u = v$, из тождеств многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$. Поскольку $x^{n_0} = x^{n_0+n_2-2} = x^{n_2} = 0$ в $\mathcal{V}$, мы получили искомый вывод тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$.

Осталось рассмотреть случай, когда слова $w_1, w_2, \dots, w_{k-1}$ линейны. При этом можно считать, что слова u и v не линейны. В самом деле, если хотя бы одно из слов u и v линейно, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $x_1x_2 \cdots x_m = 0$. Но тогда $u = w_1 = \cdots = w_{k-1} = v = 0$ в $\mathcal{V}$, и (6.1) является выводом тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$. Без ограничения общности можно считать также, что тождество $u = w_1$ выполнено в многообразии $\mathcal{Y}$ (а значит, тождество $w_1 = w_2$ выполнено в $\mathcal{Z}$), и что $w_1 \equiv x_1x_2 \cdots x_m$. Дальнейшие рассуждения распадаются на три случая в зависимости от значения k.

Случай 1: $k = 2$. Вывод (6.1) имеет в этом случае вид $u \longrightarrow w_1 \longrightarrow v$, причем $u = w_1$ в $\mathcal{Y}$ и $w_1 = v$ в $\mathcal{Z}$. Поскольку слова u и v не линейны, из леммы 2.18 вытекает, что многообразия $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ являются многообразиями ступени $\le m$. В силу леммы 2.19 каждое из них удовлетворяет тождеству вида (2.10) для некоторого $t > 1$ и некоторых $1 \le i \le j \le m$. Для краткости будем обозначать это тождество через $f(m, i, j, t)$. Пусть $\mathcal{Y}$ удовлетворяет тождеству $f(m, p, q, h_1)$, а $\mathcal{Z}$ — тождеству $f(m, r, s, h_2)$. Легко понять, что тождество $f(m, i, j, t)$ влечет тождество $f(m, i, j, \ell(t-1)+1)$ для любого натурального ℓ. Положим $h = (h_1 - 1)(h_2 - 1) + 1$. Тогда в $\mathcal{Y}$ выполнены тождества

$$u = x_1 \cdots x_m = x_1 \cdots x_{p-1}(x_p \cdots x_q)^h x_{q+1} \cdots x_m,$$

а в $\mathcal{Z}$ — тождества

$$x_1 \cdots x_{r-1}(x_r \cdots x_s)^h x_{s+1} \cdots x_m = x_1 \cdots x_m = v.$$

Дальнейшие рассмотрения разбиваются на три подслучая.

Подслучай 1.1: одно из множеств $\{p, p+1, \dots, q\}$ и $\{r, r+1, \dots, s\}$ содержится в другом. По соображениям симметрии можно считать, что $p \le r \le s \le q$. В этом случае выводом тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$ является следующая последовательность слов:

$$\begin{aligned}
u &\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Y}} x_1 \cdots x_{p-1}(x_p \cdots x_q)^h x_{q+1} \cdots x_m \\
&\equiv x_1 \cdots x_{p-1}(x_p \cdots x_{r-1}x_r \cdots x_s x_{s+1} \cdots x_q)^h x_{q+1} \cdots x_m \\
&\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Z}} x_1 \cdots x_{p-1}(x_p \cdots x_{r-1}(x_r \cdots x_s)^h x_{s+1} \cdots x_q)^h x_{q+1} \cdots x_m \\
&\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Y}} x_1 \cdots x_{p-1}x_p \cdots x_{r-1}(x_r \cdots x_s)^h x_{s+1} \cdots x_q x_{q+1} \cdots x_m \\
&\equiv x_1 \cdots x_{r-1}(x_r \cdots x_s)^h x_{s+1} \cdots x_m \\
&\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Z}} v.
\end{aligned}$$

Подслучай 1.2: множества $\{p, p+1, \dots, q\}$ и $\{r, r+1, \dots, s\}$ имеют непустое пересечение, но ни одно из них не содержится в другом. По соображениям симметрии можно считать, что $p < r \le q < s$. В этом случае в качестве вывода тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$ можно взять последовательность слов

$$
\begin{aligned}
u &\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Y}} x_1 \cdots x_{p-1}(x_p \cdots x_q)^h x_{q+1} \cdots x_m \\
&\equiv x_1 \cdots x_{p-1}(x_p \cdots x_q)^{h-1} x_p \cdots x_q x_{q+1} \cdots x_m \\
&\equiv x_1 \cdots x_{p-1}(x_p \cdots x_q)^{h-1} x_p \cdots x_{r-1} x_r \cdots x_s x_{s+1} \cdots x_m \\
&\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Z}} x_1 \cdots x_{p-1}(x_p \cdots x_q)^{h-1} x_p \cdots x_{r-1}(x_r \cdots x_s)^h x_{s+1} \cdots x_m \\
&\equiv x_1 \cdots x_{p-1}(x_p \cdots x_q)^{h-1} x_p \cdots x_{r-1} x_r \cdots x_s (x_r \cdots x_s)^{h-1} x_{s+1} \cdots x_m \\
&\equiv x_1 \cdots x_{p-1}(x_p \cdots x_q)^{h-1} x_p \cdots x_q x_{q+1} \cdots x_s (x_r \cdots x_s)^{h-1} x_{s+1} \cdots x_m \\
&\equiv x_1 \cdots x_{p-1}(x_p \cdots x_q)^{h} x_{q+1} \cdots x_s (x_r \cdots x_s)^{h-1} x_{s+1} \cdots x_m \\
&\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Y}} x_1 \cdots x_{p-1} x_p \cdots x_q x_{q+1} \cdots x_s (x_r \cdots x_s)^{h-1} x_{s+1} \cdots x_m \\
&\equiv x_1 \cdots x_{r-1} x_r \cdots x_s (x_r \cdots x_s)^{h-1} x_{s+1} \cdots x_m \\
&\equiv x_1 \cdots x_{r-1}(x_r \cdots x_s)^h x_{s+1} \cdots x_m \\
&\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Z}} v.
\end{aligned}
$$

Подслучай 1.3: множества $\{p, p+1, \dots, q\}$ и $\{r, r+1, \dots, s\}$ имеют пустое пересечение. По соображениям симметрии можно считать, что $p \le q < r \le s$. В этом случае последовательность слов

$$
\begin{aligned}
u &\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Y}} x_1 \cdots x_{p-1}(x_p \cdots x_q)^h x_{q+1} \cdots x_m \\
&\equiv x_1 \cdots x_{p-1}(x_p \cdots x_q)^h x_{q+1} \cdots x_{r-1} x_r \cdots x_s x_{s+1} \cdots x_m \\
&\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Z}} x_1 \cdots x_{p-1}(x_p \cdots x_q)^h x_{q+1} \cdots x_{r-1}(x_r \cdots x_s)^h x_{s+1} \cdots x_m \\
&\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Y}} x_1 \cdots x_{p-1} x_p \cdots x_q x_{q+1} \cdots x_{r-1}(x_r \cdots x_s)^h x_{s+1} \cdots x_m \\
&\equiv x_1 \cdots x_{r-1}(x_r \cdots x_s)^h x_{s+1} \cdots x_m \\
&\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Z}} v
\end{aligned}
$$

является выводом тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$.

Случай 2: $k = 3$. В этом случае вывод (6.1) имеет вид $u \longrightarrow w_1 \longrightarrow w_2 \longrightarrow v$, причем тождества $u = w_1$ и $w_2 = v$ выполнены в $\mathcal{Y}$, а тождество $w_1 = w_2$ — в $\mathcal{Z}$. Как и в случае 1, из лемм 2.18 и 2.19 вытекает, что многообразие $\mathcal{Y}$ удовлетворяет тождеству $f(m, p, q, t)$ для некоторого $t > 1$ и некоторых $1 \le p \le q \le m$. Далее, слово w_2 линейно, то есть $w_2 \equiv x_{1\alpha} x_{2\alpha} \cdots x_{m\alpha}$ для некоторой нетривиальной перестановки $\alpha \in S_m$. Таким образом, многообразие $\mathcal{Y}$ удовлетворяет тождествам

$$
\begin{aligned}
&u = x_1 \cdots x_m = x_1 \cdots x_{p-1}(x_p \cdots x_q)^t x_{q+1} \cdots x_m \quad \text{и} \\
&x_{1\alpha} \cdots x_{(p-1)\alpha}(x_{p\alpha} \cdots x_{q\alpha})^t x_{(q+1)\alpha} \cdots x_{m\alpha} = x_{1\alpha} \cdots x_{m\alpha} = v,
\end{aligned}
$$

а многообразие $\mathcal{Z}$ – тождеству $p_m[\alpha]$. Дальнейшие рассуждения разбиваются на два подслучая.

Подслучай 2.1: множества $\{p, p+1, \ldots, q\}$ и $\{p\alpha, (p+1)\alpha, \ldots, q\alpha\}$ совпадают. Поскольку перестановка α нетривиальна, $\ell\alpha \neq \ell$ для некоторого $1 \leq \ell \leq m$. Положим

$$r = \min_{1 \leq \ell \leq m} \{\ell \mid \ell\alpha \neq \ell\} \quad \text{и} \quad s = \max_{1 \leq \ell \leq m} \{\ell \mid \ell\alpha \neq \ell\}.$$

Ясно, что $r < s$. Если $r > q$ или $s < p$, то тождество

$$\begin{aligned}&x_1 \cdots x_{p-1}(x_p \cdots x_q)^t x_{q+1} \cdots x_m = \\ =&x_{1\alpha} \cdots x_{(p-1)\alpha}(x_{p\alpha} \cdots x_{q\alpha})^t x_{(q+1)\alpha} \cdots x_{m\alpha}\end{aligned}$$

получается из тождества $p_m[\alpha]$ подстановкой слова $x_q(x_p \cdots x_q)^{t-1}$ вместо буквы x_q. Поэтому в данном случае выводом тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$ является последовательность слов

$$\begin{aligned}u &\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Y}} x_1 \cdots x_{p-1}(x_p \cdots x_q)^t x_{q+1} \cdots x_m \\ &\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Z}} x_{1\alpha} \cdots x_{(p-1)\alpha}(x_{p\alpha} \cdots x_{q\alpha})^t x_{(q+1)\alpha} \cdots x_{m\alpha} \\ &\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Y}} v.\end{aligned}$$

Пусть теперь $r \leq q$ и $s \geq p$. Обозначим через β ограничение перестановки α на множество $\{r, r+1, \ldots, s\}$. В силу леммы 2.20 существует натуральное число M такое, что тождество

$$x_r x_{r+1} \cdots x_s = x_{r\beta} x_{(r+1)\beta} \cdots x_{s\beta} \tag{6.2}$$

влечет любое перестановочное тождество длины M, а значит и любое перестановочное тождество длины N для любого $N > M$. Пусть h — произвольное натуральное число такое, что

$$h > \frac{M + p - q + r - s - 2}{q - p + 1} + 2$$

и $t_0 = h(t-1) + 1$. Ясно, что $t_0 > h$. Многообразие $\mathcal{Y}$ удовлетворяет тождеству $f(m, p, q, t_0)$, а значит и тождествам

$$\begin{aligned}&u = x_1 \cdots x_m = x_1 \cdots x_{p-1}(x_p \cdots x_q)^{t_0} x_{q+1} \cdots x_m \quad \text{и} \\ &x_{1\alpha} \cdots x_{(p-1)\alpha}(x_{p\alpha} \cdots x_{q\alpha})^{t_0} x_{(q+1)\alpha} \cdots x_{m\alpha} = x_{1\alpha} \cdots x_{m\alpha} = v.\end{aligned}$$

Рассмотрим тождество

$$x_r \cdots x_q(x_p \cdots x_q)^{t_0-2} x_p \cdots x_s = x_{r\beta} \cdots x_{q\beta}(x_{p\beta} \cdots x_{q\beta})^{t_0-2} x_{p\beta} \cdots x_{s\beta}. \tag{6.3}$$

Из условия $\{p, p+1, \ldots, q\} = \{p\alpha, (p+1)\alpha, \ldots, q\alpha\}$ вытекает, что это тождество уравновешенно. Обозначим его длину через N. Тогда

$$\begin{aligned}N &= q - r + 1 + s - p + 1 + (q - p + 1)(t_0 - 2) > \\ &> q - r + s - p + 2 + (q - p + 1)(h - 2) > \\ &> q - r + s - p + 2 + M + p - q + r - s - 2 = M,\end{aligned}$$

т. е. $N > M$. Поскольку тождество (6.3) уравновешенно, оно вытекает из тождества $p_N[\xi]$ для некоторой перестановки $\xi \in S_N$. Далее, поскольку $N > M$, тождество $p_N[\xi]$ вытекает из (6.2). Таким образом, тождество (6.3) вытекает из (6.2). Домножив все слова, входящие в вывод тождества (6.3) из тождества (6.2), на $x_1 \cdots x_{r-1}$ слева и на $x_{s+1} \cdots x_m$ справа, мы получим вывод тождества

$$\begin{aligned}&x_1 \cdots x_{p-1}(x_p \cdots x_q)^{t_0} x_{q+1} \cdots x_m =\\ =&x_{1\alpha} \cdots x_{(p-1)\alpha}(x_{p\alpha} \cdots x_{q\alpha})^{t_0} x_{(q+1)\alpha} \cdots x_{m\alpha}\end{aligned}$$

из тождества $p_m[\alpha]$. Следовательно, это тождество выполнено в многообразии $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$. Это означает, что последовательность слов

$$\begin{aligned}u &\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Y}} x_1 \cdots x_{p-1}(x_p \cdots x_q)^{t_0} x_{q+1} \cdots x_m\\ &\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Z}} x_{1\alpha} \cdots x_{(p-1)\alpha}(x_{p\alpha} \cdots x_{q\alpha})^{t_0} x_{(q+1)\alpha} \cdots x_{m\alpha}\\ &\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Y}} v\end{aligned}$$

является выводом тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{V} \vee \mathcal{Y}$ и $\mathcal{V} \vee \mathcal{Z}$.

Подслучай 2.2: множества $\{p, p+1, \ldots, q\}$ и $\{p\alpha, (p+1)\alpha, \ldots, q\alpha\}$ различны. Так как они равномощны, это означает, что ни одно из них не содержится в другом. Следовательно, найдутся числа $r, s \in \{p, p+1, \ldots, q\}$ такие, что

$$r \notin \{p\alpha, (p+1)\alpha, \ldots, q\alpha\} \quad \text{и} \quad s\alpha \notin \{p, p+1, \ldots, q\}. \tag{6.4}$$

Для всякого $i = 1, 2, \ldots, m$ положим:

$$a_i \equiv \begin{cases} x_i & \text{при } i \neq r,\\ x_r \cdots x_q(x_p \cdots x_q)^{t-2} x_p \cdots x_r & \text{при } i = r;\end{cases}$$

$$b_i \equiv \begin{cases} x_i & \text{при } i \neq s\alpha,\\ x_{s\alpha} \cdots x_{q\alpha}(x_{p\alpha} \cdots x_{q\alpha})^{t-2} x_{p\alpha} \cdots x_{s\alpha} & \text{при } i = s\alpha;\end{cases}$$

$$c_i \equiv \begin{cases} x_i & \text{при } i \neq r, s\alpha,\\ x_r \cdots x_q(x_p \cdots x_q)^{t-2} x_p \cdots x_r & \text{при } i = r,\\ x_{s\alpha} \cdots x_{q\alpha}(x_{p\alpha} \cdots x_{q\alpha})^{t-2} x_{p\alpha} \cdots x_{s\alpha} & \text{при } i = s\alpha.\end{cases}$$

Отметим, что определение слова c_i корректно, поскольку из (6.4) вытекает, что $r \neq s\alpha$. Из (6.4) вытекает также, что

$$c_i \equiv \begin{cases} a_i & \text{при } i \neq s\alpha,\\ a_{s\alpha} \cdots a_{q\alpha}(a_{p\alpha} \cdots a_{q\alpha})^{t-2} a_{p\alpha} \cdots a_{s\alpha} & \text{при } i = s\alpha,\\ b_i & \text{при } i \neq r,\\ b_r \cdots b_q(b_p \cdots b_q)^{t-2} b_p \cdots b_r & \text{при } i = r.\end{cases} \tag{6.5}$$

Последовательность слов

$$
\begin{aligned}
u &\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Y}} x_1\cdots x_{p-1}(x_p\cdots x_q)^t x_{q+1}\cdots x_m\\
&\equiv x_1\cdots x_{p-1}x_p\cdots x_q(x_p\cdots x_q)^{t-2}x_p\cdots x_qx_{q+1}\cdots x_m\\
&\equiv x_1\cdots x_{r-1}(x_r\cdots x_q(x_p\cdots x_q)^{t-2}x_p\cdots x_r)x_{r+1}\cdots x_m\\
&\equiv a_1\cdots a_m \qquad \text{(по определению } a_i\text{)}\\
&\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Z}} a_{1\alpha}\cdots a_{m\alpha}\\
&\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Y}} a_{1\alpha}\cdots a_{(p-1)\alpha}(a_{p\alpha}\cdots a_{q\alpha})^t a_{(q+1)\alpha}\cdots a_{m\alpha}\\
&\equiv a_{1\alpha}\cdots a_{(p-1)\alpha}a_{p\alpha}\cdots a_{q\alpha}(a_{p\alpha}\cdots a_{q\alpha})^{t-2}a_{p\alpha}\cdots a_{q\alpha}a_{(q+1)\alpha}\cdots a_{m\alpha}\\
&\equiv a_{1\alpha}\cdots a_{(s-1)\alpha}(a_{s\alpha}\cdots a_{q\alpha}(a_{p\alpha}\cdots a_{q\alpha})^{t-2}a_{p\alpha}\cdots a_{s\alpha})a_{(s+1)\alpha}\cdots a_{m\alpha}\\
&\equiv c_{1\alpha}\cdots c_{m\alpha} \qquad \text{(в силу (6.5))}\\
&\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Z}} c_1\cdots c_m\\
&\equiv b_1\cdots b_{r-1}(b_r\cdots b_q(b_p\cdots b_q)^{t-2}b_p\cdots b_r)b_{r+1}\cdots b_m \qquad \text{(в силу (6.5))}\\
&\equiv b_1\cdots b_{p-1}b_p\cdots b_q(b_p\cdots b_q)^{t-2}b_p\cdots b_qb_{q+1}\cdots b_m\\
&\equiv b_1\cdots b_{p-1}(b_p\cdots b_q)^t b_{q+1}\cdots b_m\\
&\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Y}} b_1\cdots b_m\\
&\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Z}} b_{1\alpha}\cdots b_{m\alpha}\\
&\equiv x_{1\alpha}\cdots x_{(s-1)\alpha}(x_{s\alpha}\cdots x_{q\alpha}(x_{p\alpha}\cdots x_{q\alpha})^{t-2}x_{p\alpha}\cdots x_{s\alpha})x_{(s+1)\alpha}\cdots x_{m\alpha}\\
&\quad \text{(по определению } b_i\text{)}\\
&\equiv x_{1\alpha}\cdots x_{(p-1)\alpha}x_{p\alpha}\cdots x_{q\alpha}(x_{p\alpha}\cdots x_{q\alpha})^{t-2}x_{p\alpha}\cdots x_{q\alpha}x_{(q+1)\alpha}\cdots x_{m\alpha}\\
&\equiv x_{1\alpha}\cdots x_{(p-1)\alpha}(x_{p\alpha}\cdots x_{q\alpha})^t x_{(q+1)\alpha}\cdots x_{m\alpha}\\
&\xrightarrow{\mathcal{V}\vee\mathcal{Y}} v
\end{aligned}
$$

будет искомым выводом тождества $u = v$ из тождеств многообразий $\mathcal{V}\vee\mathcal{Y}$ и $\mathcal{V}\vee\mathcal{Z}$.

Случай 3: $k > 3$. Здесь, как и в случае 2, слово w_2 в выводе (6.1) имеет вид $x_{1\alpha}x_{2\alpha}\cdots x_{m\alpha}$ для некоторой перестановки $\alpha\in S_m$ и в многообразии $\mathcal{Y}$ выполнено тождество вида

$$w_2 = x_{1\alpha}\cdots x_{(p-1)\alpha}(x_{p\alpha}\cdots x_{q\alpha})^t x_{(q+1)\alpha}\cdots x_{m\alpha}.$$

Обозначим правую часть последнего тождества через w_2'. Тогда последовательности слов

$$u \xrightarrow{\mathcal{Y}} w_1 \xrightarrow{\mathcal{Z}} w_2 \xrightarrow{\mathcal{Y}} w_2' \quad \text{и} \quad w_2' \xrightarrow{\mathcal{Y}} w_2 \xrightarrow{\mathcal{Z}} w_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow w_k \equiv v$$

являются выводами тождеств $u = w_2'$ и $w_2' = v$ соответственно из тождеств многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$. Длина первого из этих выводов равна 3, а длина второго — $k-1$. При этом в многообразии $\mathcal{V}$ выполнены тождества $u = w_2'$ и $w_2' = v$, поскольку $w_2' = 0$ в $\mathcal{V}$. По предположению индукции тождества $u = w_2'$ и $w_2' = v$ выполнены в $(\mathcal{V}\vee\mathcal{Y})\wedge(\mathcal{V}\vee\mathcal{Z})$, а значит и $u = v$ в $(\mathcal{V}\vee\mathcal{Y})\wedge(\mathcal{V}\vee\mathcal{Z})$.

Предложение 3.3 доказано. □

Тем самым мы завершили доказательство теоремы 1.1.

Список литературы

[1] Б. М. Верников. *Специальные элементы решетки надкоммутативных многообразий полугрупп* // Мат. заметки. 2001. Т. 70, № 5. С. 670–678.

[2] Б. М. Верников. *Верхнемодулярные элементы решетки многообразий полугрупп.* II // Фундам. и прикл. матем. 2008. Т. 14, № 7. С. 43–51.

[3] Б. М. Верников, М. В. Волков. *Решетки нильпотентных многообразий полугрупп* // Алгебраич. системы и их многообразия. Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1988. С. 53–65.

[4] М. В. Волков. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий* // Изв. вузов. Матем. 1989. № 6. С. 51–60.

[5] Э. А. Голубов, М. В. Сапир. *Многообразия финитно аппроксимируемых полугрупп* // Изв. вузов. Матем. 1982. № 11. С. 21–29.

[6] Г. Гретцер. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.

[7] М. В. Сапир, Е. В. Суханов. *О многообразиях периодических полугрупп* // Изв. вузов. Матем. 1981. № 4. С. 48–55.

[8] Л. Н. Шеврин, Б. М. Верников, М. В. Волков. *Решетки многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. 2009. № 3. С. 3–36.

[9] T. J. Head. *The lattice of varieties of commutative monoids* // Nieuw Arch. Wiskunde. III Ser. 1968. Vol. 16, № 3. P. 203–206.

[10] J. Ježek, R. N. McKenzie. *Definability in the lattice of equational theories of semigroups* // Semigroup Forum. 1993. Vol. 46, № 2. P. 199–245.

[11] M. S. Putcha, A. Yaqub. *Semigroups satisfying permutation identities* // Semigroup Forum. 1971. Vol. 3, № 1. P. 68–73.

[12] M. V. Sapir. *On Cross semigroup varieties and related questions* // Semigroup Forum. 1991. Vol. 42, № 3. P. 345–364.

[13] V. Yu. Shaprynskiĭ, B. M. Vernikov. *Special elements in the lattice of overcommutative semigroup varieties revisited* // Order, submitted.

[14] B. M. Vernikov. *On modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Comment. Math. Univ. Carol. 2007. Vol. 48, № 4. P. 595–606.

[15] B. M. Vernikov. *Lower-modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Semigroup Forum. 2007. Vol. 75, № 3. P. 554–566.

[16] B. M. Vernikov. *Lower-modular elements of the lattice of semigroup varieties.* II // Acta Sci. Math. (Szeged). 2008. Vol. 74, № 3–4. P. 539–556.

[17] B. M. Vernikov. *Upper-modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Algebra Universalis. 2008. Vol. 59, № 3–4. P. 405–428.

[18] B. M. Vernikov, M. V. Volkov. *Modular elements of the lattice of semigroup varieties.* II // Contrib. General Algebra. 2006. Vol. 17. P. 173–190.

[19] M. V. Volkov. *Modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Contrib. General Algebra. 2005. Vol. 16. P. 275–288.

Уральский госуниверситет, г. Екатеринбург

E-mail address: `Boris.Vernikov@usu.ru, vshapr@yandex.ru`