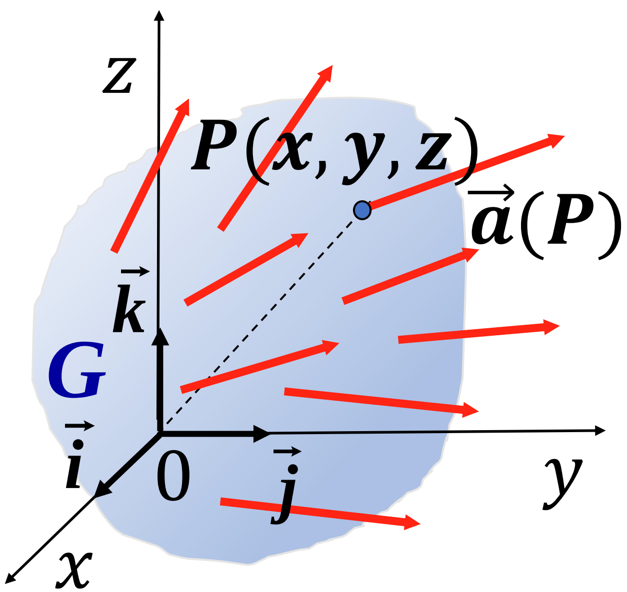
Понятие векторного поля

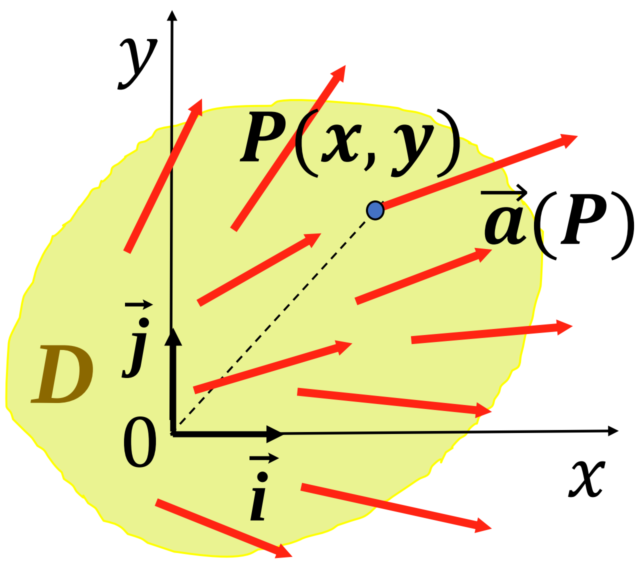
Опр. Если с каждой точкой $P(x,y,z)$ пространственной области G связана векторная функция $\vec{a}=\vec{a}(P)$, то в области G задано векторное поле.



$$\vec{a}=\vec{a}(P)=\vec{a}(x,y,z)=$$
$$=a_x(x,y,z)\vec{i}+$$
$$a_y(x,y,z)\vec{j}+a_z(x,y,z)\vec{k}$$

Понятие векторного поля

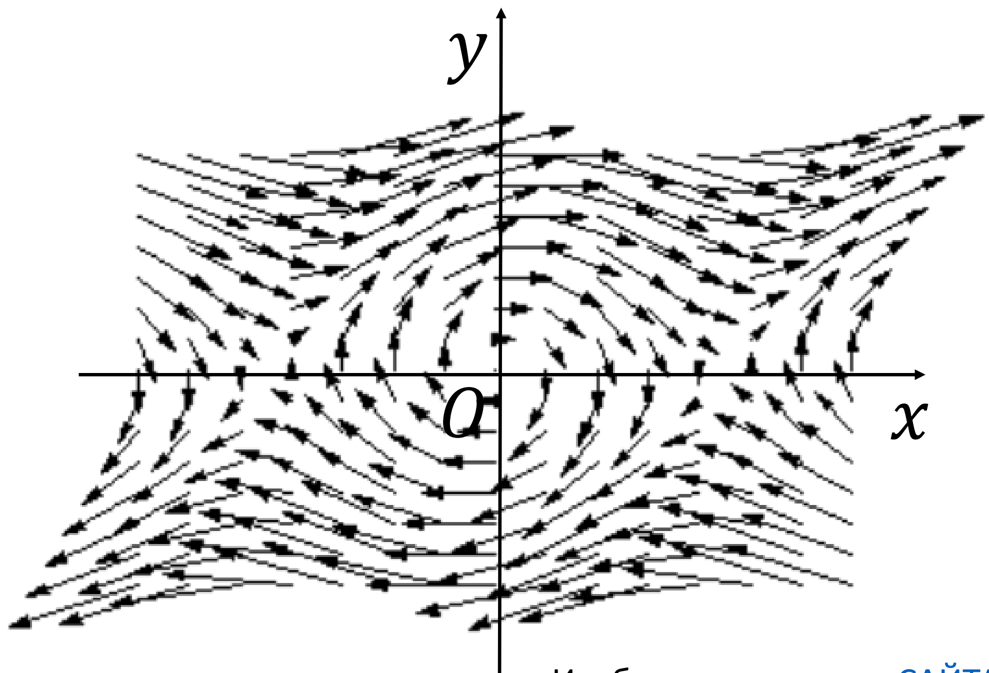
Опр. Если с каждой точкой $P(x,y)$ области D на плоскости связана векторная функция $\vec{a}=\vec{a}(P)$, то в области D задано векторное поле.



$$\vec{a}=\vec{a}(P)=\vec{a}(x,y)=$$
$$=a_x(x,y)\vec{i}+a_y(x,y)\vec{j}$$

Примеры векторных полей. Пример 1

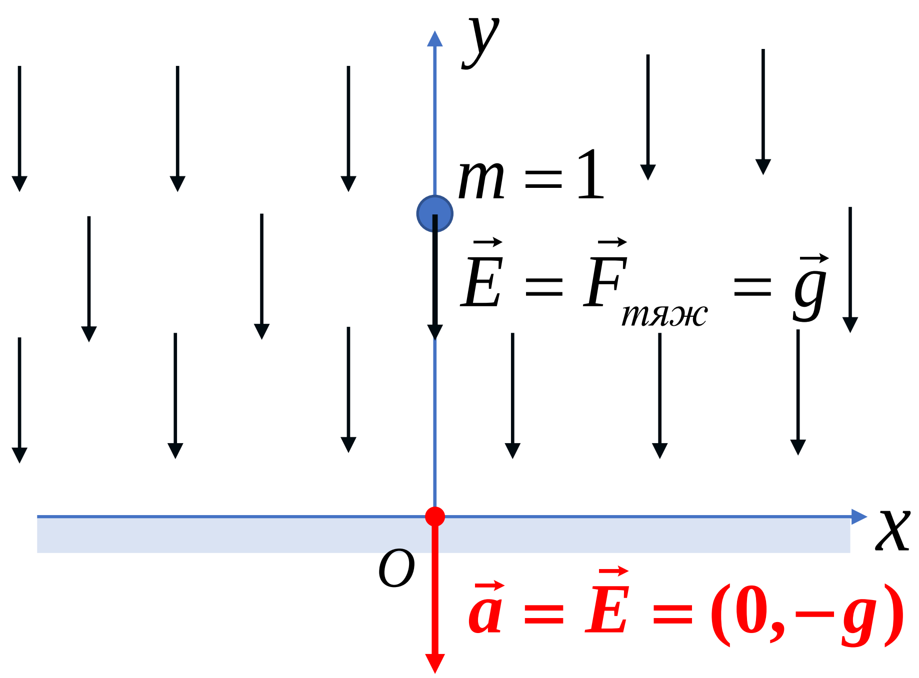
Пример 1. $\vec{a} = (a_x, a_y) = (y, -\sin x)$.



Изображение взято с САЙТА

Примеры векторных полей. Пример 2

Пример 2. Напряженность гравитационного поля у поверхности Земли: $\vec{a} = \vec{E} = \vec{g} = (0, -g)$.



Примеры векторных полей. Пример 3

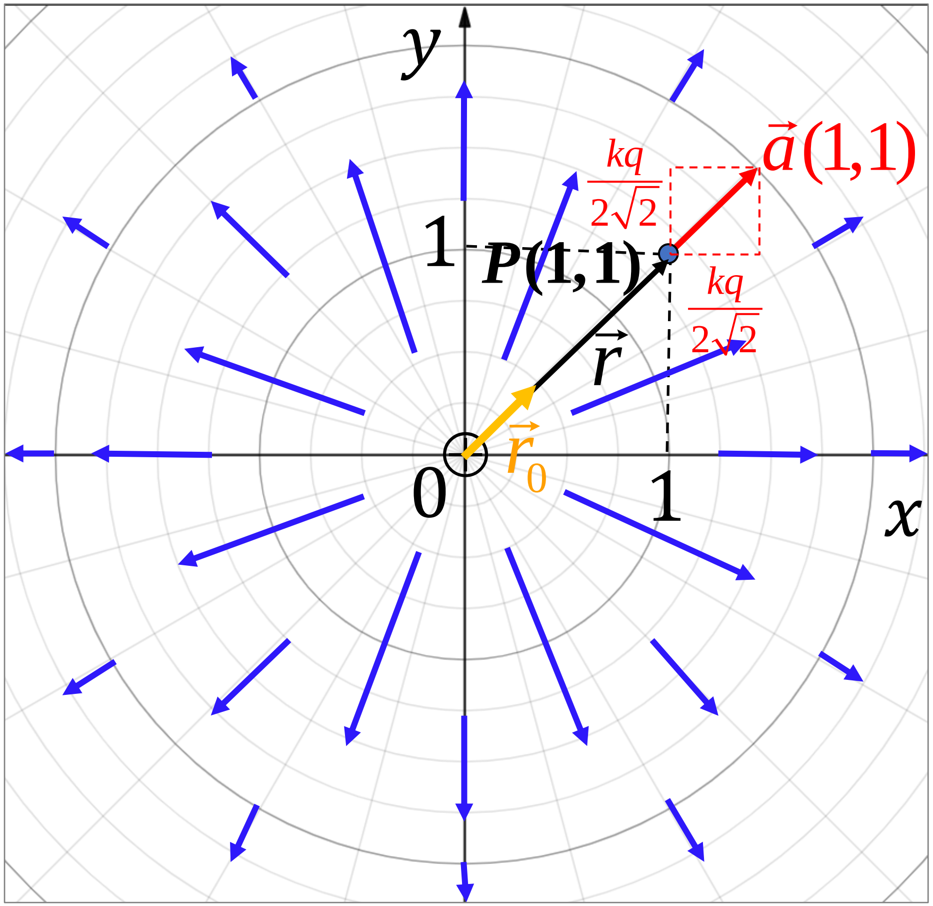
Пример 3. Напряженность электростатического поля точечного заряда: $\vec{a} = \vec{E}$.

$E = \dfrac{k \cdot q}{r^2}, r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Если: $\vec{r}_0 -$ орт $\vec{r}$, то

$$\vec{E} = \frac{k \cdot q}{r^2}\vec{r}_0 = \left[r_0 = \frac{\vec{r}}{r} \right] = \frac{k \cdot q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} = \frac{k \cdot q}{r^3}\vec{r}, \ \vec{r} = (x, y)$$

$$\vec{E} = \frac{k \cdot q}{\sqrt{x^2 + y^2}^3}(x, y) = k \cdot q \left(\frac{x}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}, \frac{y}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} \right)$$

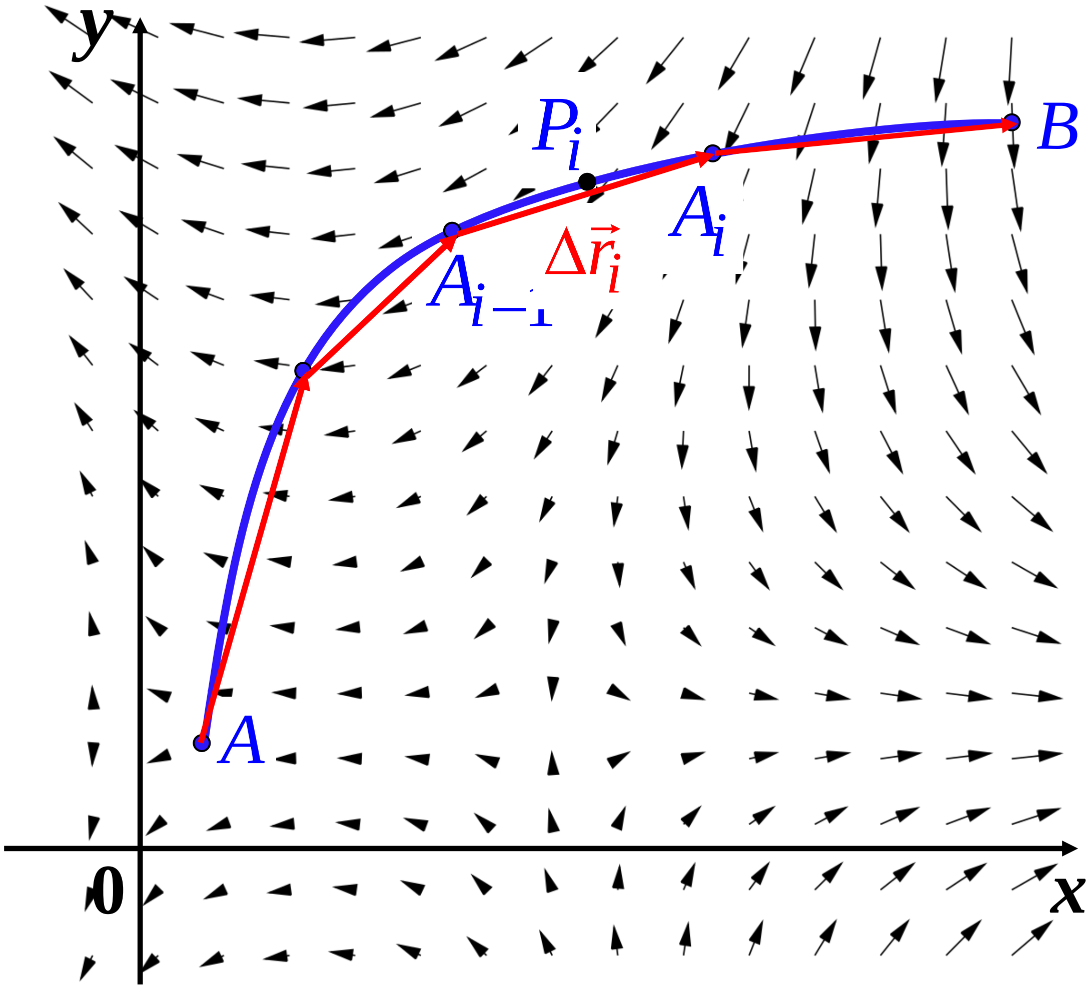
Примеры векторных полей. Пример 3



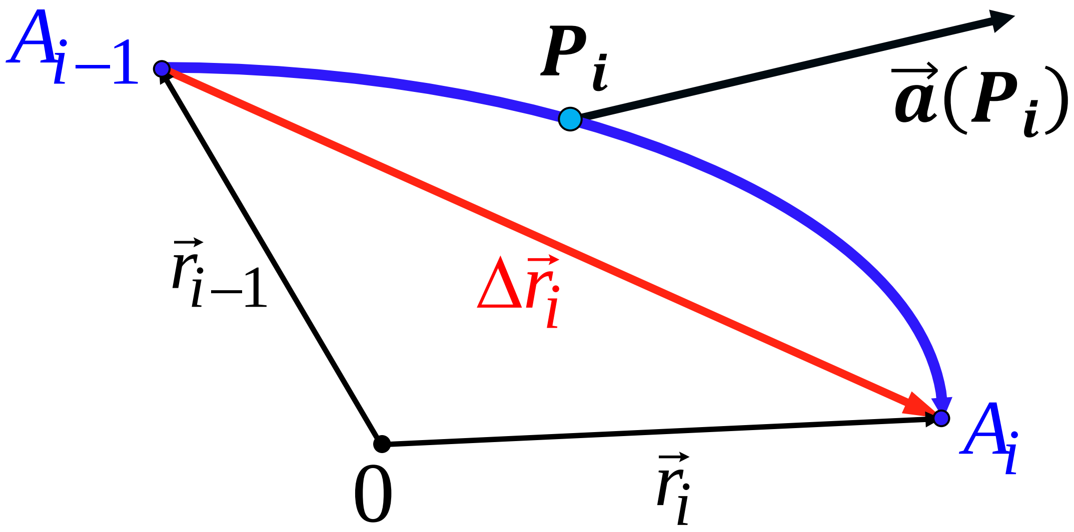
$$\vec{a}(1,1) = \vec{E}(1,1) =$$

$$= k \cdot q\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)$$

Понятие криволинейного интеграла



Понятие криволинейного интеграла



$$\Delta\vec{r}_i = \vec{r}_i - \vec{r}_{i-1}$$

Понятие криволинейного интеграла

Обозначим **интегральную** сумму через

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} (\vec{a}(P_i), \Delta\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{n} \left(a_x(P_i)\Delta x_i + a_y(P_i)\Delta y_i\right)$$

Скалярное произведение векторов

Здесь

$$\vec{a}(P_i) = (a_x(P_i), a_y(P_i)) = (a_x(x_i, y_i), a_y(x_i, y_i))$$

$$\Delta\vec{r}_i = (\Delta x_i, \Delta y_i)$$

Понятие криволинейного интеграла

Рассмотрим предел

$$\lim_{\lambda\to 0}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\vec{a}(P_i),\Delta\vec{r}_i) =$$

$$= \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\big(a_x(x_i,y_i)\Delta x_i + a_y(x_i,y_i)\Delta y_i\big)$$

где $\lambda = \max\limits_i|\Delta\vec{r}_i|$.

Понятие криволинейного интеграла

Если этот предел существует и не зависит от способа разбиения дуги на участки и от выбора точки на дуге, то он называется криволинейным интегралом II рода векторного поля $\vec{a}$ по дуге $\overset{\frown}{AB}$ в направлении от A до B и обозначается

Понятие криволинейного интеграла

$$\int\limits_{\smile{AB}} (\vec{a}(P), d\vec{r}) = \int\limits_{\smile{AB}} a_x(x,y)dx + a_y(x,y)dy$$

Аналогично определяется криволинейный интеграл II рода в пространстве.

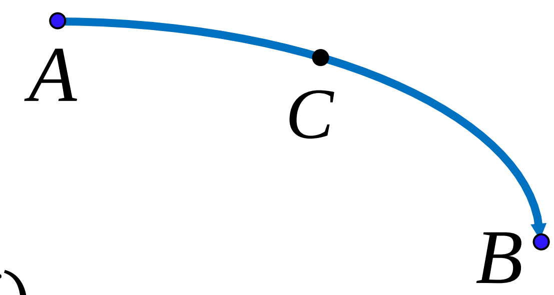
Свойства криволинейного интеграла

$$1)\ \int\limits_{\breve{AB}} (\vec{a}_1 + \vec{a}_2, d\vec{r}) = \int\limits_{\breve{AB}} (\vec{a}_1 d\vec{r}) + \int\limits_{\breve{AB}} (\vec{a}_2 d\vec{r})$$

$$2)\ \int\limits_{\breve{AB}} (\lambda\vec{a}, d\vec{r}) = \lambda \int\limits_{\breve{AB}} (\vec{a}, d\vec{r})$$

Свойства криволинейного интеграла

$$3)\ \int\limits_{\breve{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_{\breve{AC}} (\vec{a}, d\vec{r}) + \int\limits_{\breve{CB}} (\vec{a}, d\vec{r})$$



$$4)\ \int\limits_{\breve{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}) = -\int\limits_{\breve{BA}} (\vec{a}, d\vec{r})$$

Вычисление криволинейного интеграла

<u>Теорема 2</u>. Пусть поле

$$\vec{a}(x,y,z) = \left(a_x(x,y,z), a_y(x,y,z), a_z(x,y,z)\right)$$

непрерывно, а кривая

$$\breve{AB}\colon \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), t \in [\alpha, \beta] - \text{гладкая} \\ z = z(t), \end{cases}$$

(т.е. непрерывно дифференцируема)

Вычисление криволинейного интеграла

Тогда $\int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} a_x dx + a_y dy + a_z dz =$

$$= \int\limits_{\alpha}^{\beta} [a_x(x(t), y(t), z(t))x'(t) + a_y(x(t), y(t), z(t))y'(t) +$$

$$+ a_z(x(t), y(t), z(t))z'(t)]dt$$

Криволинейный интеграл вычисляется сведением к определенному!

Физический смысл криволинейного интеграла II рода

$$A = \int\limits_{\overset{\frown}{AB}} (\vec{F}, d\vec{r}) -$$ работа силового поля $\vec{F}$ по перемещению материальной точки по дуге кривой $\overset{\frown}{AB}$.

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 1

Задача 1. (I способ: непосредств. вычисление) Найти работу силу тяжести поднятия груза массы $m = 1$ по винтовой лестнице радиуса R шага 1 на высоту h.

Решение: $\vec{a} = m\vec{g} = (0, 0, -g)$

$$L: \begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \\ z = \frac{t}{2\pi} \end{cases}, \qquad \left. \begin{array}{l} z = 0 \Rightarrow t = \alpha = 0 \\ z = h \Rightarrow t = \beta = 2\pi h \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t \in [0; 2\pi h]$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 1

$$\begin{cases} dx = -R\sin t\, dt \\ dy = R\cos t\, dt \\ dz = \dfrac{1}{2\pi} dt \end{cases}$$

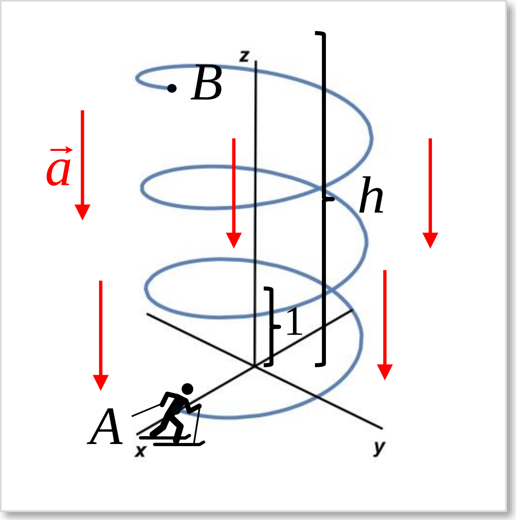
$$A = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_{\overset{\smile}{AB}} a_x dx + a_y dy + a_z dz =$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 1

$$= \int_0^{2\pi h}\left[0\cdot(-R\sin t)dt + 0\cdot(R\cos t)dt - g\cdot\frac{1}{2\pi}\right]dt =$$

$$= -\frac{g}{2\pi}\int_0^{2\pi h} dt = -\frac{g}{2\pi}t\Big|_0^{2\pi h} =$$

$$= -\frac{g}{2\pi}\cdot 2\pi h = -gh = -mgh$$



Вычисление криволинейного интеграла. Задача 2

Задача 2. (I способ: непосредств. вычисление). Найти работу электростатических сил точечного заряда q по перемещению единичного заряда вдоль единичной окружности (циркуляцию) против часовой стрелки.

Решение:
(см. пример 3)

$$\vec{a} = k \cdot q \left(\frac{x}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}}, \frac{y}{\left(x^2 + y^2\right)^{3/2}} \right)$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 2

$$L:\begin{cases} x=\cos t, \\ y=\sin t, \end{cases} \quad t\in[0;\,2\pi] \quad \Rightarrow \begin{cases} dx=-\sin t\,dt \\ dy=\cos t\,dt \end{cases}$$

$$A=\oint\limits_L\left(\vec{a},d\vec{r}\,\right)=\oint\limits_L a_x dx+a_y dy=$$

$$=\oint\limits_L\left[\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}dx+\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}dy\right]=[\underline{\text{Теорема 2}}]$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 2

$$\left[\cos^2 t + \sin^2 t = 1\right]$$

$$= kq \int_0^{2\pi} \left[\frac{\cos t}{\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)^{3/2}} (-\sin t dt) + \right.$$

$$\left. + \frac{\sin t}{\left(\cos^2 t + \sin^2 t\right)^{3/2}} (\cos t dt) \right] =$$

$$= kq \int_0^{2\pi} \left[\cos t(-\sin t) dt + \sin t \cos t dt\right] = 0$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 2