Определение условного экстремума

На практике часто встречаются задачи об отыскании экстремумов функции, аргументы которой не являются независимыми переменными, а удовлетворяют определенным **условиям связи** (уравнениям).

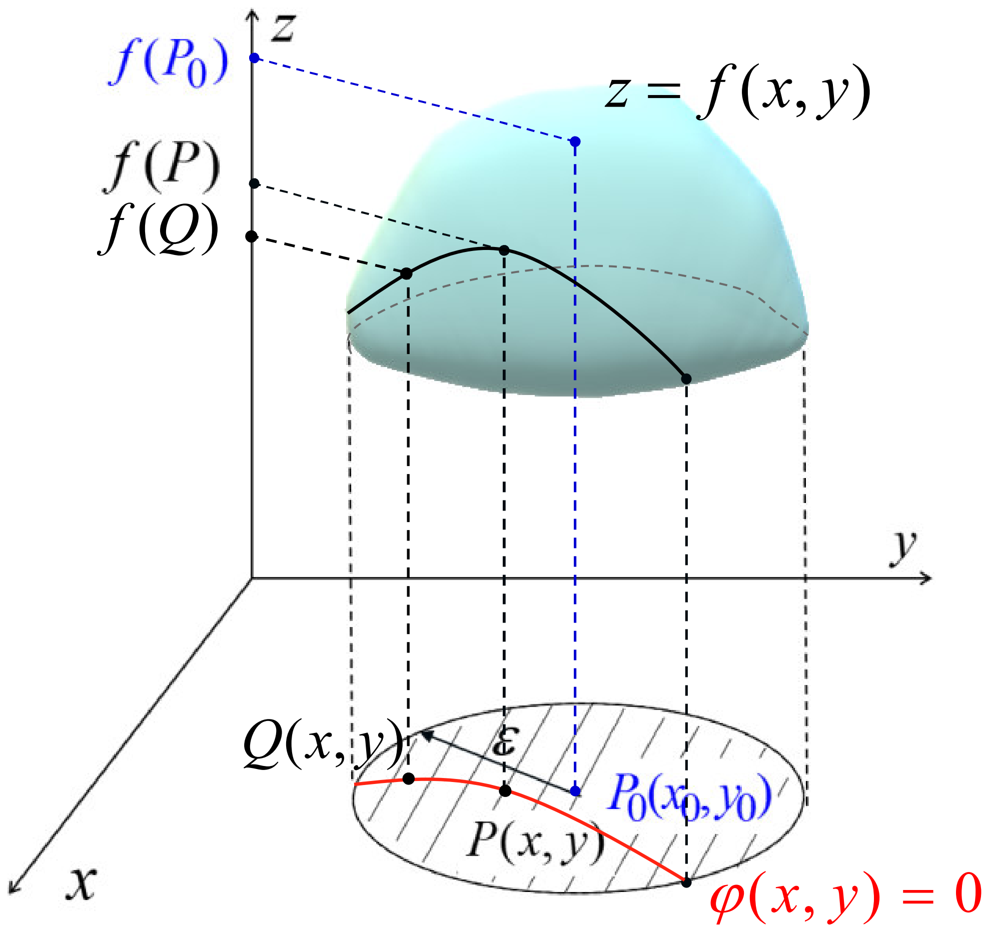
Такие экстремумы называются условными.

Понятие условного экстремума

Опр. (условного экстремума). Пусть функции $f(x,y)$, $\varphi(x,y)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности $O(P)$ точки $P \in D$.

Точка P называется точкой условного локального max (min) функции $z = f(x,y)$ при условии $\varphi(x,y) = 0$, если существует такая окрестность $O_\varepsilon(P)$, что функция $z = f(x,y)$ принимает наибольшее (наименьшее) значение в точке P среди всех точек $Q(x,y) \in O_\varepsilon(P)$, координаты которых удовлетворяют уравнению $\varphi(x,y) = 0$.

Условный экстремум. Иллюстрация



$P_0 -$ т. $loc\max$ функции $z = f(x, y)$

$P -$ т. условн. $loc\max$ функции $z = f(x, y)$ при условии $\varphi(x, y) = 0$

Постановка задачи нахождения условного экстремума

Пусть $f(x,y), \varphi(x,y)$ – непрерывно дифференцируемые функции.

Найти (условные) локальные экстремумы функции $z = f(x,y)$ при условии $\varphi(x,y) = 0$.

Поставленная задача сводится к задаче отыскания локального экстремума функции Лагранжа.

$\varphi(x,y) = 0$ – условие связи

Необходимое геометрическое условие условного экстремума

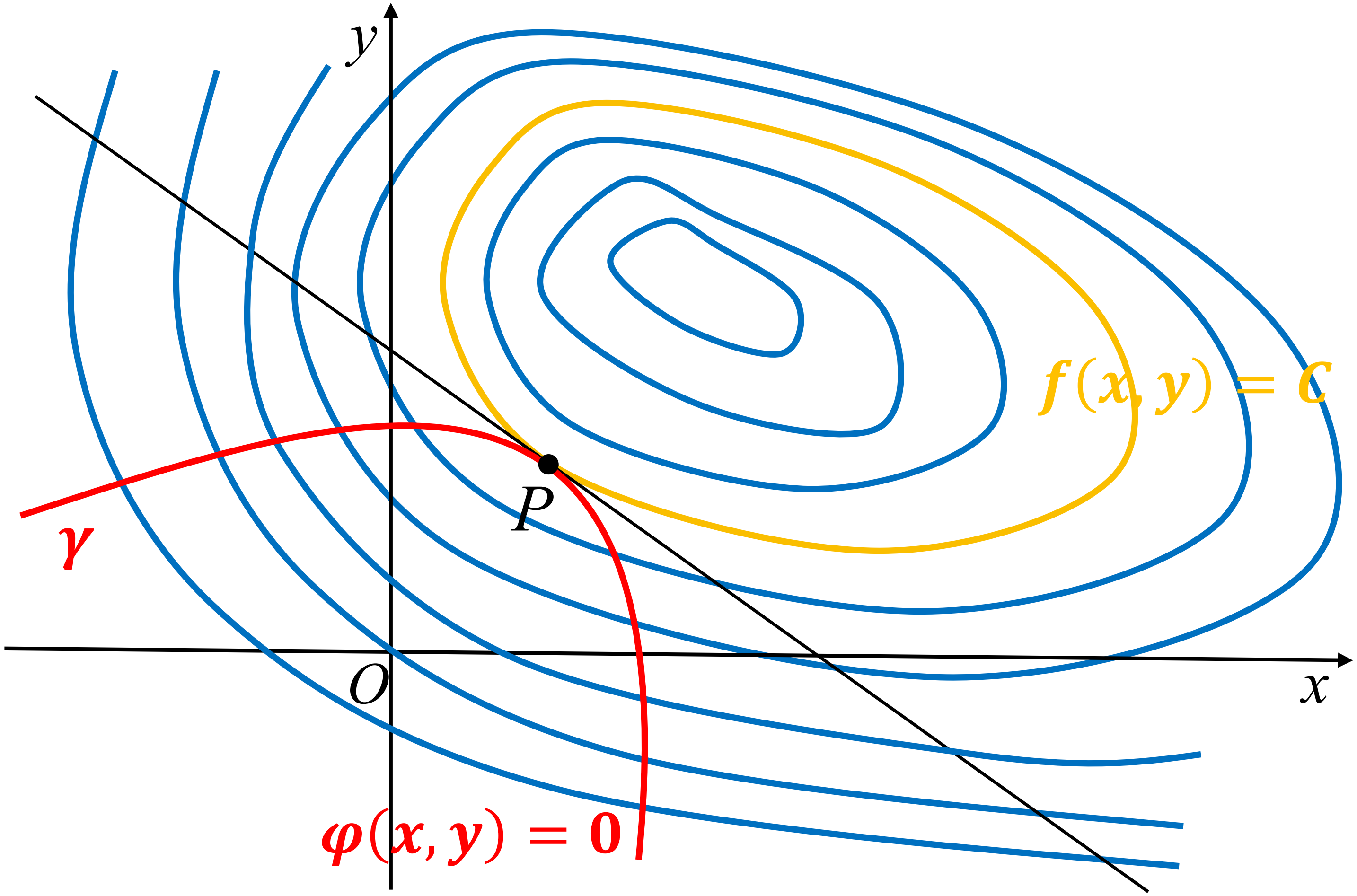
Теорема 4 (необходимое геометрическое условие условного экстремума). Пусть функции $f(x, y)$, $\varphi(x, y)$ непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности $O_{\varepsilon}(P)$ точки $P \in D$ и $\overrightarrow{\mathrm{grad}} f|_{\gamma} \neq \vec{0}$ для линии γ, задаваемая уравнением $\varphi(x, y) = 0$.

Необходимое геометрическое условие условного экстремума

И пусть $P-$ точка условного экстремума функции $z=f(x,y)$ при условии $\varphi(x,y)=0$.

Тогда линия уровня $f(x,y)=C$, проходящая через точку P, и линия γ *касаются* друг друга в точке P.

Необходимое геометрическое условие условного экстремума (иллюстрация)

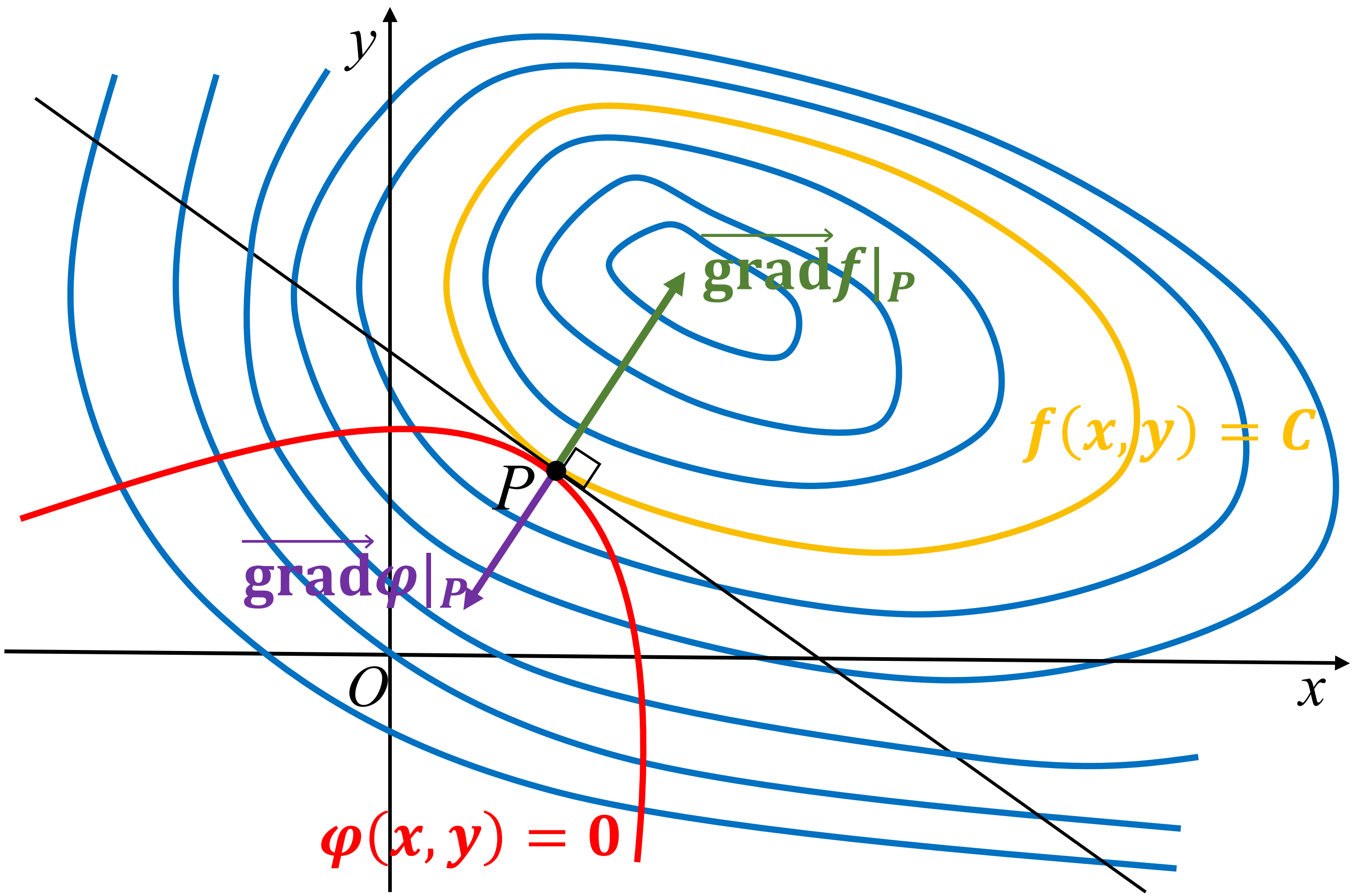


Следствие из необходимого геометричского условия условного экстремума

<u>Теорема 5 (следствие из необходимого условия условного экстремума).</u> Пусть выполняются условия теоремы 4.

Тогда векторы $\overrightarrow{\mathrm{grad}}f|_P$ и $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\varphi|_P$ *параллельны.*

Следствие из необходимого геометрического условия условного экстремума (иллюстрация)



Функция Лагранжа

<u>Опр</u>. **Функцией Лагранжа**, соответствующей данной функции $z = f(x, y)$ и условию связи $\varphi(x, y) = 0$, называется функция

$$\boxed{L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda\varphi(x, y)}$$

Теорема о стационарных точках функции Лагранжа

Теорема 6 (о стационарных точках функции Лагранжа)

Если $P(x, y)$ − точка **условного экстремума** функции $z = f(x, y)$ при условии связи $\varphi(x, y) = 0$,

то $N(x, y; \lambda)$ − *стационарная* точка **локального экстремума** функции Лагранжа $L = L(x, y, \lambda)$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема о стационарных точках функции Лагранжа (доказательство)

<u>Доказательство</u>

Пусть $P(x, y) -$ точка **условного локального экстремума** функции $z = f(x, y)$ при условии связи $\varphi(x, y) = 0$.

Тогда по теореме 5 векторы $\overrightarrow{\text{grad}} f|_P$ и $\overrightarrow{\text{grad}} \varphi|_P$ *параллельны*,

т.е. $\overrightarrow{\text{grad}} f|_P = \lambda \cdot \overrightarrow{\text{grad}} \varphi|_P$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема о стационарных точках функции Лагранжа (доказательство)

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} f|_P = \left(\frac{\partial f}{\partial x}|_P, \frac{\partial f}{\partial y}|_P\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}} \varphi|_P = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}|_P, \frac{\partial \varphi}{\partial y}|_P\right)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial x}|_P = \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}|_P \qquad \frac{\partial f}{\partial y}|_P = \lambda \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}|_P$$

Теорема локальном экстремуме функции Лагранжа (доказательство)

Тогда

$$\begin{cases} \left.\dfrac{\partial L}{\partial x}\right|_N = \left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_P - \lambda \left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial x}\right|_P = 0, \\ \left.\dfrac{\partial L}{\partial y}\right|_N = \left.\dfrac{\partial f}{\partial y}\right|_P - \lambda \left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}\right|_P = 0, \\ \left.\dfrac{\partial L}{\partial \lambda}\right|_N = -\varphi(x, y)\,|_P = 0 \end{cases} \blacksquare$$

Схема отыскания условного экстремума

1. <u>Поиск стационарных точек функции Лагранжа (необходимое условие экстремума):</u>

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -\varphi(x, y) = 0 \end{cases}$$

- система уравнений для отыскания стационарных точек $N(x, y; \lambda)$ функции Лагранжа $L = L(x, y, \lambda)$

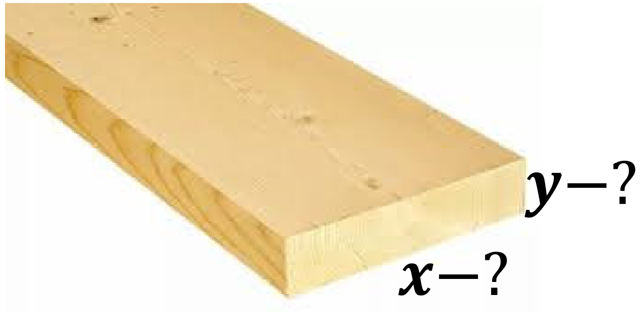
Схема отыскания условного экстремума

2. <u>Определение типа экстремума (достаточное условие экстремума):</u>

   - для установления факта **наличия** экстремума и определения **типа** экстремума нужно исследовать знак $d^2L|_N$ при $\lambda = const$;

   - при этом нужно учитывать, что dx, dy зависят друг от друга из-за условий связи.

Условный экстремум для Ф2П
Пример 2

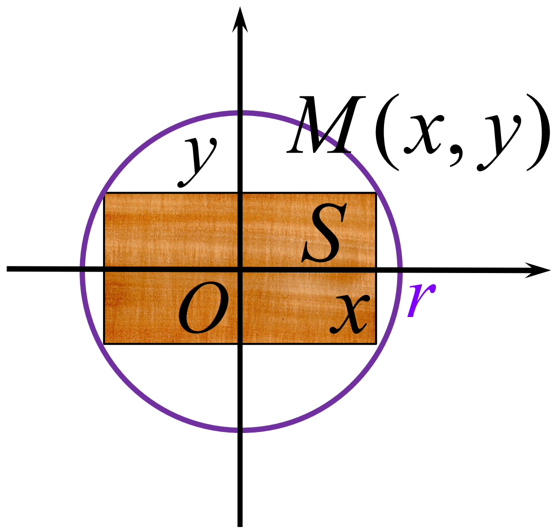


Пример 2. Из круглого бревна диаметра d требуется вырезать балку прямоугольного сечения. Каковы должны быть ширина и высота этого сечения, чтобы балка оказывала наибольшее сопротивление на сжатие.

Сопротивление балки на сжатие пропорционально площади ее поперечного сечения.

Задача взята из [УЧЕБНОГО ПОСОБИЯ]

Условный экстремум. Пример 2



Площадь прямоугольника:

$$f(x, y) = S = 4xy,$$

$$f_{наиб.}(P) \Rightarrow P = ?$$

При этом выполняется условие связи:

$$x^2 + y^2 = r^2, r = \frac{d}{2}$$

$$\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

Условный экстремум. Пример 2

Функция Лагранжа

$$L(x,y,\lambda) = 4xy - \lambda\left(x^2 + y^2 - r^2\right)$$

1. Найдем стационарные точки функции Лагранжа.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 4y - 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 4x - 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = -\left(x^2 + y^2 - r^2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}\lambda x \\ 4x - \lambda^2 x = 0 \\ x^2 + y^2 - r^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

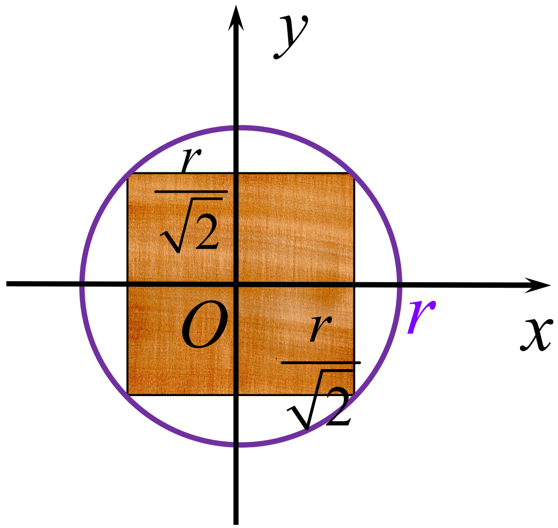
Условный экстремум. Пример 2

$$\begin{cases} y = \dfrac{1}{2}\lambda x \\ 4x - \lambda^2 x = 0 \\ x^2 + y^2 - r^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}\lambda x \\ x(4 - \lambda^2) = 0 \ (: x > 0) \\ x^2 + y^2 - r^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{2}\lambda x \\ \lambda^2 = 4 \\ x^2 + y^2 - r^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_{1,2} = \pm x \\ \lambda_{1,2} = \pm 2 \\ 2x^2 - r^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = x \\ \lambda = 2 \\ x^2 = \dfrac{r^2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y = \dfrac{r}{\sqrt{2}} \ (\text{так как } x > 0, y > 0) \\ \lambda = 2 \end{cases}$$

Условный экстремум. Пример 2

$\Rightarrow$ прямоугольник является КВАДРАТОМ



$$N\left(\frac{r}{\sqrt{2}},\frac{r}{\sqrt{2}},2\right) - \textit{стационарная}$$

точка функции $L(x, y, \lambda)$

Условный экстремум. Пример 2

2. <u>Установим тип экстремума</u>

Вычислим вторые частные производные функции Лагранжа

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -2\lambda, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = 4, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = -2\lambda$$

$$\Downarrow$$

$$d^2 L\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, 2\right) = -4dx^2 + 8dxdy - 4dy^2$$

Условный экстремум. Пример 2

Из условия связи $x^2 + y^2 - r^2 = 0$

следует связь дифференциалов

$$d\left(x^2 + y^2 - r^2\right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + y^2 - r^2\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + y^2 - r^2\right)dy = 0$$

$$2xdx + 2ydy = 0$$

$$x = y = \frac{r}{\sqrt{2}}, \lambda = 2 \Rightarrow 2\frac{r}{\sqrt{2}}dx + 2\frac{r}{\sqrt{2}}dy = 0 \Rightarrow$$

Условный экстремум. Пример 2

$$dy = -dx \Rightarrow$$

$$d^2L\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, 2\right) = -4dx^2 - 8dx^2 - 4dx^2 = -16dx^2 \Rightarrow$$

$$d^2L\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}, 2\right) < 0 \text{ для любого } dx \neq 0 \Rightarrow$$

$P\left(\frac{r}{\sqrt{2}}, \frac{r}{\sqrt{2}}\right)$ – точка условного max функции $f(x, y)$

при условии $x^2 + y^2 = r^2$; *условный* max функции $f(x, y)$

равен $S = 4xy = 4\frac{r}{\sqrt{2}}\frac{r}{\sqrt{2}} = 2r^2$

Условный экстремум для ФЗП. Пример 4

В **примере 1** функция

$V = f(x, y, z) = xyz \to max$ при условии связи

$$\varphi(x, y, z) = x + y + z - a = 0.$$

Решение

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda\varphi(x, y, z) =$$

$$= xyz - \lambda(x + y + z - a)$$