Дифференцирование сложной функции

Рассмотрим функцию $z = f(u, v)$, где $u = u(x, y)$ и $v = v(x, y)$, т.е. $z -$ сложная функция от независимых переменных x, y.

Тогда частные производные сложной функции $z = f(u, v)$ равны

Дифференцирование сложной функции

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\\ \frac{\partial z}{\partial y}&=\frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y}\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}z'_x&=z'_u\cdot u'_x+z'_v\cdot v'_x,\\ z'_y&=z'_u\cdot u'_y+z'_v\cdot v'_y\end{aligned}}$$

Дифференцирование сложной функции
Пример 1

Пример 1. $z = ve^u$, $u = x^2 + y$ и $v = \ln y$, т.е. $z = z(x, y)$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение $\quad \frac{\partial z}{\partial u} = \left(ve^u\right)_u' = ve^u \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = \left(ve^u\right)_v' = e^u$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(x^2 + y\right)_x' = 2x \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \left(x^2 + y\right)_y' = 1$$

Дифференцирование сложной функции
Пример 1

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(\ln y\right)_x' = 0 \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \left(\ln y\right)_y' = \frac{1}{y}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} = ve^u\cdot 2x + e^u\cdot 0 =$$

$$= 2xve^u = 2xe^{x^2+y}\ln y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = ve^u\cdot 1 + e^u\cdot\frac{1}{y} =$$

$$= \ln y\cdot e^{x^2+y} + e^{x^2+y}\cdot\frac{1}{y}$$

Дифференцирование неявной функции 2-х переменных

Опр. Пусть уравнение $F(x, y, z) = 0$ определяет неявную функцию $z = z(x, y)$ двух переменных, т.е. $F(x, y, z(x, y)) = 0$. Тогда

$$\boxed{z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z}} \qquad \boxed{z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}}$$

Дифференцирование неявной функции одной переменной

Следствие. Пусть уравнение $F(x, y) = 0$ задает неявную функцию $y = y(x)$.

Тогда

$$\boxed{y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y}}$$

Дифференцирование неявной функции одной переменной. Пример 2

Пример 2. Найти производную функции, заданную неявно уравнением
$x^2 - 4xy + y^2 + 1 = 0.$

Решение. $F(x, y) = x^2 - 4xy + y^2 + 1$

$F'_x = 2x - 4y \qquad F'_y = -4x + 2y$

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{2x - 4y}{-4x + 2y} = \frac{x - 2y}{2x - y}$$