Определение комплексного числа

<u>Опр</u>. Комплексным числом называ~~ю~~ется выражения вида $z = x + iy$ для действительных чисел x, y, для которых определены операции сложения (I) и умножения (II) (см. слайды). При этом считаем, что

$$\boxed{i^2 = -1}$$

<u>Опр</u>. Число i называется мнимой единицей.

Определение комплексного числа

Опр. Действительные числа x, y называются действительной и мнимой частями комплексного числа $z = x + iy$.

Обозначение: $x = Re\, z, y = Im\, z$.

Выражение $x + iy$ называется алгебраической формой комплексного числа z.

Опр. Комплексные числа $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ называются равными, если $x_1 = x_2$ и $y_1 = y_2$.

Сложение и умножение комплексных чисел

Пусть $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$.

<u>Сложение</u>:

$$\boxed{z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) \quad \text{(I)}}$$

<u>Умножение</u>:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) =$$

$$= x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + \overset{-1}{\cancel{i^2}}\, y_1y_2 \Rightarrow$$

$$\boxed{z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \quad \text{(II)}}$$

Вычитание и деление комплексн. чисел

Вычитание:

$$\boxed{z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \quad \text{(III)}}$$

Деление:

$$\boxed{\text{(IV)}\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2}} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} =$$

$$= \frac{x_1 x_2 - i x_1 y_2 + i y_1 x_2 - \overset{-1}{\cancel{i^2}}\, y_1 y_2}{x_2^2 - (iy_2)^2} =$$

Вычитание и деление комплексн. чисел

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} =$$

$$= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

Операции над комплексными числами в алгебраической форме. Задача 1

Задача 1. Пусть $z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = 1 + 2i$.
Найти $z_1 + z_2,\ z_1 - z_2,\ z_1 z_2,\ \frac{z_1}{z_2}$.

Решение.

$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (1 + 2i) = 3 + 5i$$

$$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (1 + 2i) = 1 + i$$

$$z_1 z_2 = (2 + 3i)(1 + 2i) = 2 + 3i + 4i + 6\cancelto{-1}{i^2} =$$

$$= 2 + 3i + 4i - 6 = -4 + 7i$$

Операции над комплексными числами в алгебраической форме. Задача 1

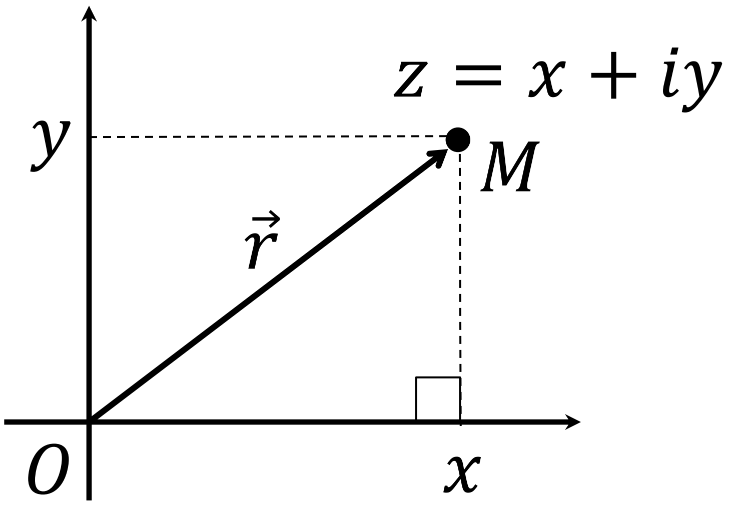
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2+3i}{1+2i} = \frac{(2+3i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} =$$

$$= \frac{2+3i-4i-6\overset{-1}{\cancel{i^2}}}{1-4\underset{-1}{\cancel{i^2}}} = \frac{2+3i-4i+6}{1+4} =$$

$$= \frac{8-i}{5} = \frac{8}{5} - \frac{1}{5}i$$

Геометрическая интерпретация комплексного числа

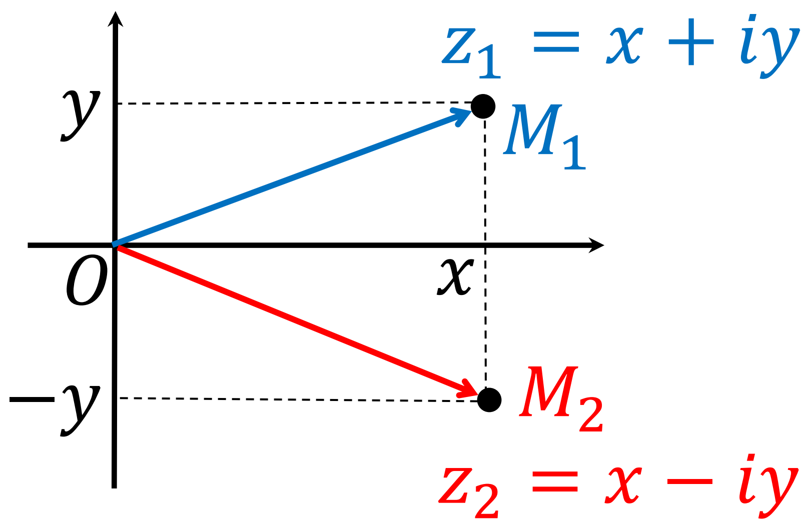
Опр. Геометрическая интерпретация комплексного числа $z = x + iy$ – это точка $M(x, y)$ или радиус-вектор $\vec{r}(x, y)$ в комплексной плоскости Oxy.



Комплексно-сопряженные числа

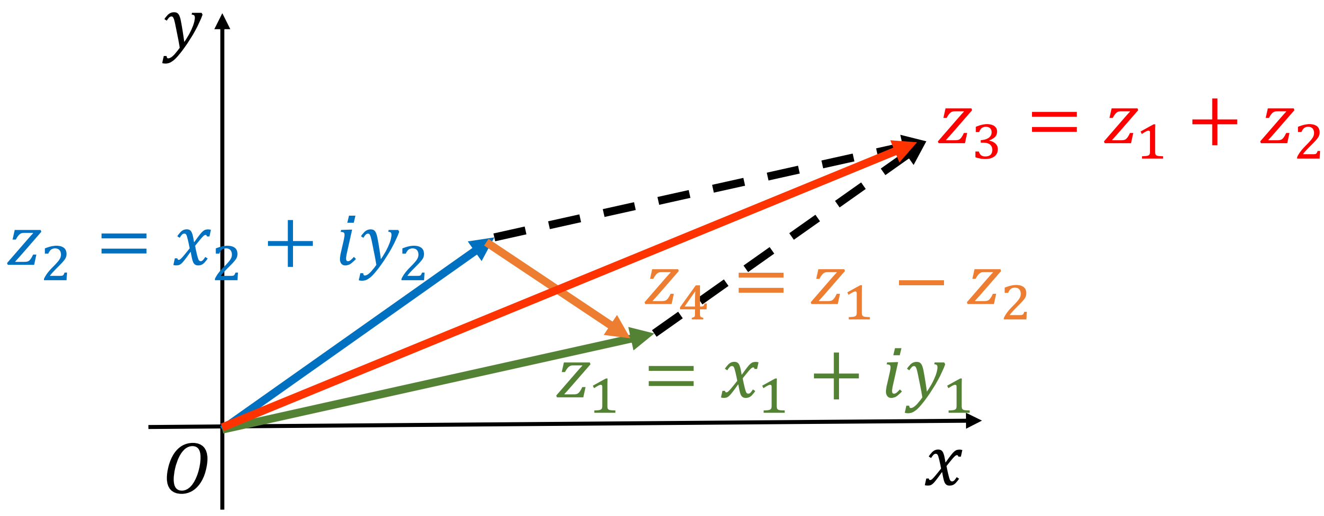
Опр. Число $z = x - iy$ называется (комплексно) сопряженным к числу $z = x + iy$.

Обозначение: $\bar{z} = \overline{x - iy}$. Числа $z_{1,2} = x \pm iy$ называются комплексно-сопряженными.



Геометрическая интерпретация комплексного числа

Операции **сложения** и **вычитания комплексных чисел** согласованы с **операциями сложения** и **вычитания** соответствующих **векторов** (упр).



Решение квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом

Задача 2. Найти корни уравнения $z^2 + z + 1 = 0$.

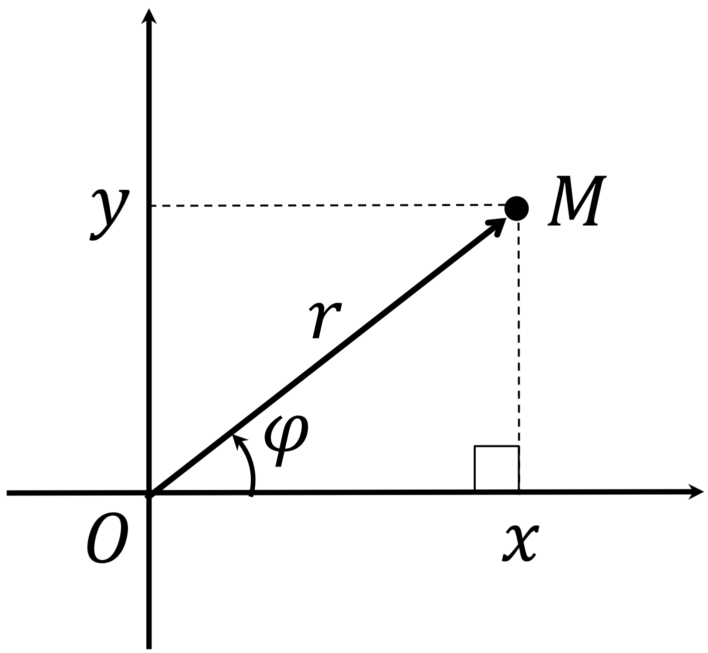
Решение.

$$D = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = -3 < 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

$$z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2} \quad z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа



Пусть (r, φ) – **полярные координаты** точки $M(x, y)$.

Опр. Тригонометрической формой комплексного числа $z = x + iy$ называется выражение

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$$

Связь алгебраической и тригонометрической форм комплексного числа

Опр. Число r называется модулем компл. числа z и обозначается через $|z|$, а число φ – аргументом и обозначается через $\arg z$.

Если $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, то

$$\boxed{\begin{cases} x = r\cos\varphi \\ y = r\sin\varphi \end{cases}} \quad \text{и} \quad \boxed{\begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \operatorname{tg}\varphi = \dfrac{y}{x},\ x \neq 0 \end{cases}}$$

Связь алгебраической и тригонометрической форм комплексного числа

Точнее,

$$\varphi = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x}, \text{ если т. } M(x,y) \text{ в } I \text{ четв.,} \\ \pi - \operatorname{arctg}\left|\dfrac{y}{x}\right|, \text{ если т. } M \text{ во } II \text{ четв.,} \\ \operatorname{arctg}\left|\dfrac{y}{x}\right| - \pi, \text{ если т. } M \text{ в } III \text{ четв.,} \\ -\operatorname{arctg}\left|\dfrac{y}{x}\right|, \text{ если т. } M \text{ в } IV \text{ четв.} \end{cases}$$

Показательная форма комплексного числа

Если использовать **формулу Эйлера**

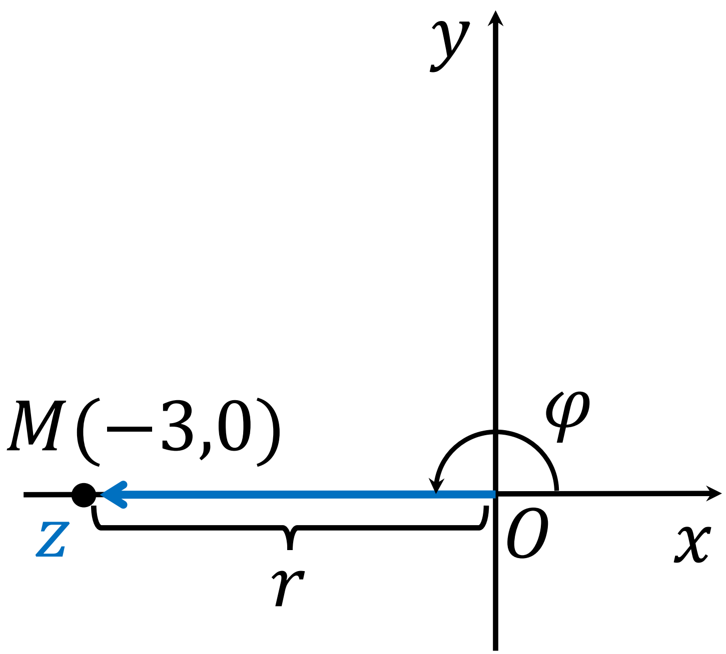
$$\boxed{e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi}$$

то компл. число $z = x + iy = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно представить в виде показательной формы

$$\boxed{z = re^{i\varphi}}$$

Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа. Задача 3

<u>Задача 3</u>. Написать тригонометрическую и показательную формы компл. чисел а) $z = -\cancel{1}3$, б) $z = -\sqrt{3} - i$.



<u>Решение</u>.

а) $x = -1, y = 0$

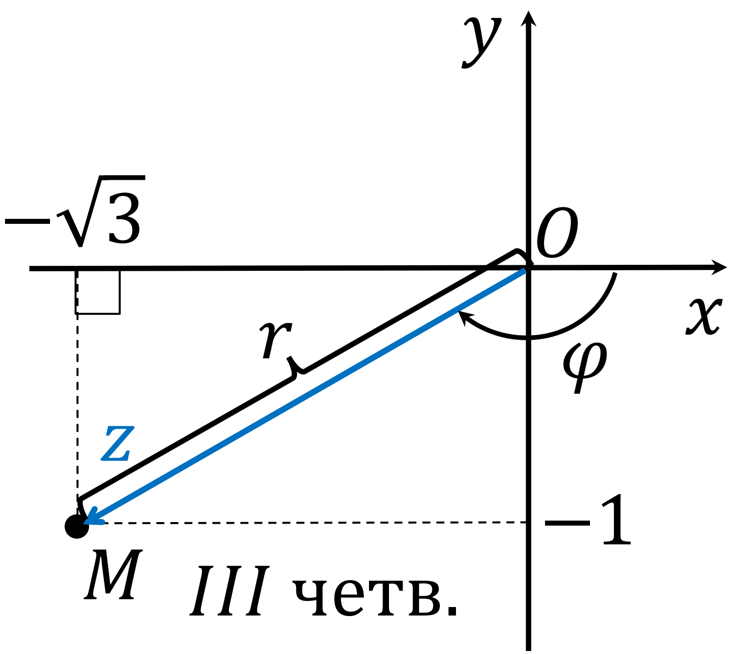
$\Rightarrow \boldsymbol{r = 3, \varphi = \pi}$

$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$

$= \boxed{3(\cos\pi + i\sin\pi)}$

$= \boxed{3e^{i\pi}}$

Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа. Задача 3



б) $x = -\sqrt{3}, y = -1$

$\Rightarrow \boldsymbol{r} = \sqrt{x^2 + y^2} =$

$= \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \mathbf{2}$

$\boldsymbol{\varphi} = \operatorname{arctg}\left|\frac{y}{x}\right| - \pi =$

$$= \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \pi = \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{6}}$$

Тригонометрическая и показательная форма комплексного числа. Задача 3

$$\boldsymbol{\varphi} = \operatorname{arctg}\left|\frac{y}{x}\right| - \pi = \operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{3}} - \pi =$$

$$= \frac{\pi}{6} - \pi = -\frac{\mathbf{5\pi}}{\mathbf{6}}$$

$$\boxed{z = 2\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right)} =$$

$$= \boxed{2e^{-\frac{5\pi}{6}}}$$

Операции над комплексными числами в показательной форме

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = r_1 e^{i\varphi_1}$,

$$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_2 e^{i\varphi_2}$$

Тогда

Умножение:

$$\boxed{\begin{aligned} z_1\cdot z_2 &= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big) = \\ &= r_1 r_2 e^{i(\varphi_1+\varphi_2)} \quad \text{(V)}\end{aligned}}$$

Возведение в степень:

$$\boxed{z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = r^n e^{in\varphi} \quad \text{(VI)}}$$

Операции над комплексными числами в показательной форме

Деление:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\big) = \\ = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad \text{(VII)}$$

Док-во проверяется простым вычислением. Примем без док-ва.

Операции над компексными чисами в показательной форме. Задача 4

<u>Задача 4</u>. Найти $\left(-\sqrt{3}-i\right)^{100}$.

<u>Решение</u>. Пусть $z=-\sqrt{3}-i$ (см. задачу 2).

Тогда $z=2e^{-\frac{5\pi}{6}}$ (см. задачу 2).

$$\Rightarrow z^{100}=\left(2e^{-\frac{5\pi}{6}}\right)^{100}=2^{100}e^{-\frac{5\pi}{6}\cdot 100}=$$

$$=2^{100}\left(\cos\left(-\frac{500\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{500\pi}{6}\right)\right)=$$

Операции над компексными чисами в показательной форме. Задача 3

$$= 2^{100}\left(\cos\frac{250\pi}{3} - i\sin\frac{250\pi}{3}\right) =$$

$$= 2^{100}\left(\cos\left(83\frac{1}{3}\pi\right) - i\sin\left(83\frac{1}{3}\pi\right)\right) =$$

$$= 2^{100}\left(\cos\frac{4}{3}\pi - i\sin\frac{4}{3}\pi\right) =$$

$$= 2^{100}\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = -2^{100}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$