Б. М. Верников, М. В. Волков, Дополнения в решетках многообразий и квазимногообразий, *Изв. вузов. Матем.*, 1982, номер 11, 17–20

ИЗВЕСТИЯ ВЫСШИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ

1982 МАТЕМАТИКА № 11 (246)

Б. М. Верников, М. В. Волков

УДК 512.567.5

ДОПОЛНЕНИЯ В РЕШЕТКАХ МНОГООБРАЗИЙ И КВАЗИМНОГООБРАЗИЙ

В последнее время возрос интерес к изучению многообразий и квазимногообразий алгебраических систем, решетки подмногообразий (соответственно подквазимногообразий) которых удовлетворяют тем или иным теоретико-решеточным ограничениям. К этому направлению принадлежит и данная заметка. В ней охарактеризованы многообразия и квазимногообразия широкого класса универсальных алгебр, включающего в себя большинство „классических" алгебр, с дополняемыми решетками подмногообразий (подквазимногообразий).

Если $\mathfrak{X}$—многообразие (квазимногообразие) универсальных алгебр, то через $L_v(\mathfrak{X})$ ($L_q(\mathfrak{X})$) обозначим решетку всех его подмногообразий (подквазимногообразий).

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{X}$—такое многообразие (квазимногообразие), что на каждой алгебре из $\mathfrak{X}$ каждая нетривиальная конгруэнция обладает неодноэлементным классом, являющимся подалгеброй. Тогда в решетке $L_v(\mathfrak{X})$ ($L_q(\mathfrak{X})$) справедливо квазитождество*

$$(\forall abc)(b \wedge c = 0 \to (a \vee b) \wedge c = a \wedge c). \qquad (1)$$

Доказательство. Рассмотрим сначала случай многообразий. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathbf{C}$—подмногообразия многообразия $\mathfrak{X}$, причем многообразие $\mathfrak{B} \wedge \mathbf{C}$ тривиально. Обозначим через F свободную алгебру счетного ранга в многообразии $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}$, а через α, β и γ—соответственно ее $\mathfrak{A}$-, $\mathfrak{B}$- и $\mathbf{C}$-вербальные конгруэнции. Рассмотрим в алгебре $F/\alpha \cap \gamma$ конгруэнцию $\bar{\alpha} = \alpha/\alpha \cap \gamma$. Если $\bar{B}$—произвольный $\bar{\alpha}$-класс, являющийся подалгеброй, то его полный прообраз B будет α-классом и одновременно подалгеброй в F. Конгруэнция $\alpha \cap \beta$ является $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$-вербальной конгруэнцией на F и потому тривиальной конгруэнцией; отсюда по второй теореме о гомоморфизмах $B \cong B/\alpha \cap \beta \cap B^2 = B/\beta \cap B^2 \in \mathfrak{B}$. С другой стороны, $B/\gamma \cap B^2 \in \mathbf{C}$. Таким образом, алгебра $B/\gamma \cap B^2$ одноэлементна и $\gamma \supseteq B^2$. Учитывая, что B есть α-класс, получим, что $\alpha \cap \gamma \supseteq B^2$, т. е. алгебра $\bar{B}$ одноэлементна. Мы показали, что любой класс конгруэнции $\bar{\alpha}$, являющийся подалгеброй, одноэлементен. В силу условия леммы это означает, что $\bar{\alpha}$—тривиальная конгруэнция. Отсюда $\alpha = \alpha \cap \gamma$ и $\alpha \subseteq \gamma$. По третьей теореме о гомоморфизмах алгебра F/γ является гомоморфным образом алгебры $F/\alpha \in \mathfrak{A}$, откуда $F/\gamma \in \mathfrak{A} \wedge \mathbf{C}$. Но F/γ является свободной алгеброй счетного ранга в многообразии $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \wedge \mathbf{C}$ и порождает это многообразие, следовательно, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \wedge \mathbf{C} \subseteq \mathfrak{A} \wedge \mathbf{C}$. Обратное включение очевидно.

Пусть теперь $\mathfrak{X}$—квазимногообразие, $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathbf{C} \in L_q(\mathfrak{X})$ и $\mathfrak{B} \wedge \mathbf{C}$ тривиально. Если $A \in (\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \wedge \mathbf{C}$, то, как хорошо известно, A будет подпрямым произведением алгебр из $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$. Поэтому конгруэнция $\alpha \cap \beta$ тривиальна, где α и β суть соответственно $\mathfrak{A}$- и $\mathfrak{B}$-квазивербальные конгруэнции на A. Если B есть α-класс, являющийся подалгеброй, то с одной стороны, $B \cong B/\alpha \cap \beta \cap B^2 = B/\beta \cap B^2 \in \mathfrak{B}$, а с другой стороны, B вместе с A лежит в $\mathbf{C}$. Отсюда следует, что алгебра B одноэлементна, а это в силу условия леммы означает, что конгруэнция α тривиальна. Итак, $A \cong A/\alpha \in \mathfrak{A} \wedge \mathbf{C}$ и $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \wedge \mathbf{C} \subseteq \mathfrak{A} \wedge \mathbf{C}$.

Напомним, что решетка L с 0 и 1 называется *решеткой с дополнениями*, если для всякого $x \in L$ существует $y \in L$ такой, что $x \vee y = 1$, $x \wedge y = 0$.

Лемма 2. *Решетка L с дополнениями, удовлетворяющая квазитождеству* (1), *является булевой алгеброй.*

Доказательство. Пусть $x \in L$, c_1, c_2—два дополнения к x в L. Тогда $x \wedge c_1 = x \wedge c_2 = 0$ и в силу (1) $c_1 = c_1 \wedge 1 = c_1 \wedge (x \vee c_2) = c_1 \wedge c_2 = (x \vee c_1) \wedge c_2 = 1 \wedge c_2 = c_2$. Таким образом, L—решетка с единственными дополнениями

Кроме того, L 0-*модулярна*, т. е. удовлетворяет такому следствию квазитождества (1):

$$(\forall abc)(a \leqslant c \,\&\, b \wedge c = 0 \rightarrow (a \vee b) \wedge c = a). \tag{2}$$

По теореме Грийе и Варле [1] 0-модулярная решетка с единственными дополнениями булева.

Через $V_a(Q_a)$ обозначим совокупность всех решеток подмногообразий (подквазимногообразий) многообразий (квазимногообразий) универсальных алгебр.

Лемма 3. *Если булева алгебра принадлежит $V_a \bigcup Q_a$, то она конечна.*

Для случая квазимногообразий лемма доказана в [2] (следствие 3, с. 455), это же доказательство проходит и для решеток многообразий.

Решетка с 0 называется 0-*дистрибутивной*, если она удовлетворяет квазитождеству

$$(\forall abc)(a \wedge c = 0 \,\&\, b \wedge c = 0 \rightarrow (a \vee b) \wedge c = 0). \tag{3}$$

Заметим, что (3) следует из (1). Напомним еще, что *атомом* решетки с 0 называется ее минимальный ненулевой элемент.

Лемма 4. *Пусть L есть 0-дистрибутивная решетка с 1, содержащая такие атомы $a_1, \ldots, a_m$, что $\bigvee_{i=1}^{m} a_i = 1$. Тогда L—решетка с дополнениями.*

Доказательство. Пусть x—произвольный элемент решетки L. Рассмотрим в множестве $\{1, \ldots, m\}$ подмножество $X = \{i \mid a_i \wedge x = 0\}$. Тогда элемент $\bigvee_{i \in X} a_i$ будет, как легко проверить, дополнением к x.

Из лемм 1—4 вытекает основной результат данной работы.

Теорема. *Пусть $\mathfrak{X}$—такое многообразие (квазимногообразие) универсальных алгебр, что на каждой алгебре из $\mathfrak{X}$ каждая нетривиальная конгруэнция обладает неодноэлементным классом, являющимся подалгеброй. Следующие условия эквивалентны:*

(а) *$L_v(\mathfrak{X})$ ($L_q(\mathfrak{X})$)—решетка с дополнениями;*

(б) *$L_v(\mathfrak{X})$ ($L_q(\mathfrak{X})$)—конечная булева алгебра;*

(в) *$\mathfrak{X}$—объединение конечного числа минимальных нетривиальных многообразий (квазимногообразий).*

В силу теоремы условия (а), (б) и (в) эквивалентны для произвольного многообразия или квазимногообразия групп, колец (и более общее, групп с произвольным набором мультиоператоров), луп, идемпотентных группоидов, инверсных и клиффордовых полугрупп (в сигнатуре $\langle \cdot, ^{-1} \rangle$, где a^{-1} интерпретируется как элемент, инверсный к a, и как элемент, обратный к a в наибольшей подгруппе, содержащей a, соответственно). При этом в тех случаях, когда известно описание минимальных нетривиальных многообразий (квазимногообразий), напр., для групп или колец с ассоциативными степенями, все многообразия (квазимногообразия) с дополняемой решеткой подмногообразий (подквазимногообразий) могут быть явным образом перечислены.

Из классических алгебраических систем теорема не охватывает лишь случай полугрупп. Следующий хорошо известный пример показывает, что решетка многообразий полугрупп не 0-модулярна и, следовательно, не удовлетворяет квазитождеству (1).

Пример 1. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathbf{C}$—многообразия полугрупп, заданные тождествами $xy = yx$, $xy = x$, $xyz = xzy = yxz$. Тогда $\mathfrak{A} \subset \mathbf{C}$, многообразие $\mathfrak{B} \wedge \mathbf{C}$ тривиально, но $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \wedge \mathbf{C} = \mathbf{C}$.

Тем не менее справедливо

Предложение 1. *Для любого многообразия полугрупп $\mathfrak{X}$ условия* (а), (б) *и* (в) *эквивалентны.*

Доказательство. (а)$\rightarrow$(б). Обозначим через $\mathfrak{N}$ многообразие всех полугрупп с нулевым умножением и рассмотрим сначала случай, когда $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{X}$. Пусть $\mathfrak{M}$—дополнение к $\mathfrak{N}$ в решетке $L_v(\mathfrak{X})$. Многообразие $\mathfrak{M}$ не содержит полугрупп с нулевым умножением и, следовательно, состоит из клиффордовых полугрупп. Так как $\mathfrak{X} = \mathfrak{M} \vee \mathfrak{N}$, легко проверить, что каждая полугруппа из $\mathfrak{X}$ будет подпрямым произведением полугруппы из $\mathfrak{M}$ на полугруппу из $\mathfrak{N}$. Отсюда с очевидностью вытекает, что решетка $L_v(\mathfrak{X})$ изоморфна прямому произведению решетки $L_v(\mathfrak{M})$ на двухэлементную цепь, при этом решетка $L_v(\mathfrak{M})$ также будет решеткой с дополнениями. Таким образом, можно считать, что многообразие $\mathfrak{X}$ состоит из клиффордовых полугрупп. Но на каждой регулярной полугруппе каждая нетривиальная конгруэнция обладает неодноэлементным классом, являющимся подполугруппой ([3], теорема 7.38), и в этом случае можно воспользоваться доказанной выше теоремой.

(б)$\to$(в) тривиально.

(в)$\to$(а). В силу леммы 4 достаточно проверить, что решетка многообразий полугрупп 0-дистрибутивна. Каждое нетривиальное многообразие содержит минимальное нетривиальное подмногообразие, поэтому остается убедиться, что для любых двух многообразий полугрупп $\mathfrak{B}$ и $\mathbf{C}$ и для любого минимального нетривиального многообразия полугрупп $\mathfrak{A}$ из $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B} \vee \mathbf{C}$ следует, что $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{B}$ или $\mathfrak{A} \subseteq \mathbf{C}$. Поскольку все минимальные нетривиальные многообразия полугрупп известны, такая проверка не составляет труда (см., напр., [4]).

Эквивалентность условий (б) и (в) для многообразий полугрупп независимо доказал Е. В. Суханов (неопубликовано).

Рассмотрим теперь решетку квазимногообразий полугрупп. Как показывает следующий пример, приведенный В. А. Горбуновым ([2], с. 451), и эта решетка не является 0-модулярной.

Пример 2. Пусть $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ и $\mathbf{C}$—квазимногообразия полугрупп, порожденные двухэлементной группой, двухэлементной полугруппой с нулевым умножением и циклической полугруппой типа (2,4). Тогда $\mathfrak{A} \subset \mathbf{C}$, квазимногообразие $\mathfrak{B} \wedge \mathbf{C}$ тривиально, но $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B}) \wedge \mathbf{C} = \mathbf{C}$.

Заметим, что из примера 2 следует, в частности, что решетка $L_q(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$ не является булевой алгеброй. Так как $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$—минимальные нетривиальные квазимногообразия полугрупп, получим, что для квазимногообразий полугрупп условия (б) и (в), вообще говоря, не эквивалентны.

Предложение 2. *Для любого квазимногообразия полугрупп* $\mathfrak{X}$ *условия* (а) *и* (в) *эквивалентны.*

Доказательство. (а)$\to$(в). Докажем сначала, что $\mathfrak{X}$ есть объединение минимальных нетривиальных квазимногообразий. В самом деле, пусть $\mathfrak{A}$—объединение всех минимальных нетривиальных подквазимногообразий квазимногообразия $\mathfrak{X}$, а $\mathfrak{Y}$—дополнение к $\mathfrak{A}$ в $L_q(\mathfrak{X})$. Если квазимногообразие $\mathfrak{Y}$ нетривиально, оно содержит некоторое минимальное нетривиальное подквазимногообразие $\mathfrak{B}$. Но тогда $\mathfrak{A} \wedge \mathfrak{Y} \supseteq \mathfrak{B}$, что невозможно. Таким образом, $\mathfrak{Y}$—тривиальное квазимногообразие, и $\mathfrak{X} = \mathfrak{A} \vee \mathfrak{Y} = \mathfrak{A}$.

Предположим теперь, что в решетке $L_q(\mathfrak{X})$ бесконечно много атомов. Каждое минимальное нетривиальное квазимногообразие полугрупп порождается либо двухэлементной полугруппой, либо группой простого порядка, либо бесконечной циклической полугруппой ([5], теорема 2). Поэтому $\mathfrak{X}$ содержит бесконечное множество групп различных простых порядков, а следовательно, и бесконечную циклическую полугруппу, которая, как легко видеть, аппроксимируется любым таким множеством. Пусть $\mathbf{C}$—квазимногообразие, порожденное бесконечной циклической полугруппой, $\mathfrak{Z}$—дополнение к $\mathbf{C}$ в $L_q(\mathfrak{X})$. Ясно, что $\mathfrak{Z}$ может содержать лишь конечное число минимальных нетривиальных подквазимногообразий. Как замечено в [2] (предложение 6), решетка квазимногообразий полугрупп 0-дистрибутивна, поэтому каждое квазимногообразие, тривиально пересекающееся с $\mathbf{C}$ и $\mathfrak{Z}$, имеет тривиальное пересечение с $\mathbf{C} \vee \mathfrak{Z} = \mathfrak{X}$. Отсюда $\mathfrak{X}$ содержит лишь конечное число минимальных нетривиальных подквазимногообразий, что противоречит нашему предположению. Итак, $\mathfrak{X}$—объединение конечного числа минимальных нетривиальных квазимногообразий.

(в)$\to$(а) следует из леммы 4.

В литературе (напр., в [1]) рассматривалось следующее обобщение решеток с дополнениями. Решетку L с 0 и 1 назовем решеткой *с верхними полу-*

дополнениями, если для любого $x \in L \setminus \{0\}$ существует $y \in L \setminus \{1\}$ такой, что $x \vee y = 1$. Любопытно, что для решеток квазимногообразий это понятие оказывается эквивалентным обычной дополняемости.

Предложение 3. *Решетка с верхними полудополнениями, принадлежащая классу* $\boldsymbol{Q}_a$, *является решеткой с дополнениями.*

Доказательство. Пусть $L \in \boldsymbol{Q}_a$, $x \in L \setminus \{0\}$. Будучи решеткой подквазимногообразий, L удовлетворяет импликации

$$(\forall x y z_i,\ i \in I)\ (\underset{i \in I}{\&}\ x \vee z_i = y \rightarrow x \vee (\bigwedge_{i \in I} z_i) = y) \tag{4}$$

(см. [2], с. 438), в силу которой существует наименьший элемент z со свойством $x \vee z = 1$. Если $x \wedge z \neq 0$, то найдется $t \in L \setminus \{1\}$ такой, что $(x \wedge z) \vee t = 1$. Тогда $x \vee t = 1$ и в силу (4) $x \vee (z \wedge t) = 1$. Но $z \wedge t < z$, т. к. $t < z \vee t = 1$. Получили противоречие.

В связи с предложением 3 естественно возникает

Вопрос 1. Будет ли решетка с верхними полудополнениями, принадлежащая классу $\boldsymbol{V}_a$, решеткой с дополнениями?

Нетрудно убедиться, что для модулярных решеток ответ на этот вопрос положителен. Отметим еще

Вопрос 2. Будет ли решетка с относительными дополнениями, принадлежащая классу $\boldsymbol{V}_a$, булевой алгеброй?

В. А. Горбунов ([2], следствие 4, с. 440) установил, что решетка с относительными дополнениями, принадлежащая классу $\boldsymbol{Q}_a$, является булевой алгеброй.

Авторы признательны профессору Л. Н. Шеврину за постановку задачи и руководство работой.

ЛИТЕРАТУРА

1. Grillet P.-A., Varlet J. C. Complementedness conditions in lattices.—Bull. Soc. roy. sci. Liège, 1967, v. 36, № 11—12, p. 628—642.
2. Горбунов В. А. О решетках квазимногообразий.—Алгебра и логика, 1976, т. 15, № 4, с. 436—457.
3. Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп. Т. 2.—М., 1972.— 424 с.
4. Айзенштат А. Я. О некоторых подрешетках решетки многообразий полугрупп.— В сб.: Современ. алгебра. Л., 1974, вып. 1, с. 3—15.
5. Shafaat A. On implicational completeness.—Canad. J. Math., 1974, v. 26, № 3, p. 761—768.

г. Свердловск

Поступила
26 I 1981