О-символика и формула Стирлинга

Михайлова Инна Анатольевна

Институт математики и естественных наук.
Кафедра алгебры и фундаментальной информатики.

4 октября 2018 г.

Сравнение функций

Определение

Пусть $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Тогда

$$f(n) \prec g(n) \Leftrightarrow \lim_{n \to \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Сравнение функций

Определение

Пусть $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Тогда

$$f(n) \prec g(n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Иерархия

$$1 \prec \log\log n \prec \log n \prec n^{\varepsilon} \prec n^{\log n} \prec c^{n} \prec n^{n} \prec c^{c^{n}}$$

Здесь $0 < \varepsilon < 1 < c$.

Сравнение функций

Определение

Пусть $f, g \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Тогда

$$f(n) \prec g(n) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0$$

Иерархия

$$1 \prec \log\log n \prec \log n \prec n^{\varepsilon} \prec n^{\log n} \prec c^n \prec n^n \prec c^{c^n}$$

Здесь $0 < \varepsilon < 1 < c$.

Заметим, что

$$f(n) \prec g(n) \Leftrightarrow \frac{1}{g(n)} \prec \frac{1}{f(n)}$$

А это значит, что иерархию можно продолжить в левую сторону.

Обозначение O

Определение

Пусть $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Тогда

$$O(g(n)) = \{f(n) \mid \exists C \in \mathbb{R}^+ \quad |f(n)| \leq C|g(n)|\}$$

То есть это класс функций.

Обозначение O

Определение

Пусть $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Тогда

$$O(g(n)) = \{f(n) \mid \exists C \in \mathbb{R}^+ \quad |f(n)| \leq C|g(n)|\}$$

То есть это класс функций.

Пример

Пусть $S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. Известно, что $S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$.

Обозначение O

Определение

Пусть $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Тогда

$$O(g(n)) = \{f(n) \mid \exists C \in \mathbb{R}^+ \quad |f(n)| \leq C|g(n)|\}$$

То есть это класс функций.

Пример

Пусть $S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. Известно, что $S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$. Тогда $S_n = O(n^3)$, так как

$$\left|\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right| \leq \frac{1}{3}|n^3| + \frac{1}{2}|n^3| + \frac{1}{6}|n^3| = |n^3|$$

Обозначение O

Определение

Пусть $g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Тогда

$$O(g(n)) = \{f(n) \mid \exists C \in \mathbb{R}^+ \quad |f(n)| \leq C|g(n)|\}$$

То есть это класс функций.

Пример

Пусть $S_n = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2$. Известно, что $S_n = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$. Тогда $S_n = O(n^3)$, так как

$$\left|\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n\right| \leq \frac{1}{3}|n^3| + \frac{1}{2}|n^3| + \frac{1}{6}|n^3| = |n^3|$$

Можно также записать $S_n = \frac{1}{3}n^3 + O(n^2)$ или $S_n = O(n^{146})$.

Нецелочисленная переменная

Рассмотрим $S(x) = 3x^3 + 2x^2 + 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Верно ли, что $S(x) = O(x^3)$?

Нецелочисленная переменная

Рассмотрим $S(x) = 3x^3 + 2x^2 + 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Верно ли, что $S(x) = O(x^3)$? Да, если $x \to \infty$.

Нецелочисленная переменная

Рассмотрим $S(x) = 3x^3 + 2x^2 + 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Верно ли, что $S(x) = O(x^3)$? Да, если $x \to \infty$. При $x \to 0$ имеем $S(x) = O(x)$.

Нецелочисленная переменная

Рассмотрим $S(x) = 3x^3 + 2x^2 + 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Верно ли, что $S(x) = O(x^3)$? Да, если $x \to \infty$. При $x \to 0$ имеем $S(x) = O(x)$.

Будем считать, что $f(n) = O(g(n))$ при $n \to \infty$, если

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists C \geq 0 \quad |f(n)| \leq C|g(n)| \quad \forall n \geq n_0$$

Нецелочисленная переменная

Рассмотрим $S(x) = 3x^3 + 2x^2 + 3x$, $x \in \mathbb{R}$. Верно ли, что $S(x) = O(x^3)$? Да, если $x \to \infty$. При $x \to 0$ имеем $S(x) = O(x)$.

Будем считать, что $f(n) = O(g(n))$ при $n \to \infty$, если

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists C \geq 0 \quad |f(n)| \leq C|g(n)| \quad \forall n \geq n_0$$

Важное замечание

Когда мы пишем $f(n) = O(g(n))$, то подразумеваем, что функция $f(n)$ принадлежит множеству $O(g(n))$. Таким образом, нельзя написать $O(g(n)) = f(n)$. Аналогично, запись $O(f(n)) = O(g(n))$ означает $O(f(n)) \subseteq O(g(n))$.

Операции с O

- $f(n) = O(f(n))$;

Операции с O

- $f(n) = O(f(n))$;
- $C \cdot O(f(n)) = O(f(n))$;

Операции с O

- $f(n) = O(f(n))$;
- $C \cdot O(f(n)) = O(f(n))$;
- $O(O(f(n))) = O(f(n))$;

Операции с O

- $f(n) = O(f(n))$;
- $C \cdot O(f(n)) = O(f(n))$;
- $O(O(f(n))) = O(f(n))$;
- $O(f(n))O(g(n)) = O(f(n)g(n))$;

Операции с O

- $f(n) = O(f(n))$;
- $C \cdot O(f(n)) = O(f(n))$;
- $O(O(f(n))) = O(f(n))$;
- $O(f(n))O(g(n)) = O(f(n)g(n))$;
- $O(f(n)g(n)) = f(n)O(g(n))$

Операции с O

- $f(n) = O(f(n))$;
- $C \cdot O(f(n)) = O(f(n))$;
- $O(O(f(n))) = O(f(n))$;
- $O(f(n))O(g(n)) = O(f(n)g(n))$;
- $O(f(n)g(n)) = f(n)O(g(n))$

Некоторые ряды Тейлора ($x \to 0$)

Операции с O

- $f(n) = O(f(n))$;
- $C \cdot O(f(n)) = O(f(n))$;
- $O(O(f(n))) = O(f(n))$;
- $O(f(n))O(g(n)) = O(f(n)g(n))$;
- $O(f(n)g(n)) = f(n)O(g(n))$

Некоторые ряды Тейлора ($x \to 0$)

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)$;

Операции с O

- $f(n) = O(f(n))$;
- $C \cdot O(f(n)) = O(f(n))$;
- $O(O(f(n))) = O(f(n))$;
- $O(f(n))O(g(n)) = O(f(n)g(n))$;
- $O(f(n)g(n)) = f(n)O(g(n))$

Некоторые ряды Тейлора ($x \to 0$)

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)$;
- $\ln(1 + x) = x - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$;

Операции с O

- $f(n) = O(f(n))$;
- $C \cdot O(f(n)) = O(f(n))$;
- $O(O(f(n))) = O(f(n))$;
- $O(f(n))O(g(n)) = O(f(n)g(n))$;
- $O(f(n)g(n)) = f(n)O(g(n))$

Некоторые ряды Тейлора ($x \to 0$)

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)$;
- $\ln(1+x) = x - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$;
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + O(x^4)$;

Операции с O

- $f(n) = O(f(n))$;
- $C \cdot O(f(n)) = O(f(n))$;
- $O(O(f(n))) = O(f(n))$;
- $O(f(n))O(g(n)) = O(f(n)g(n))$;
- $O(f(n)g(n)) = f(n)O(g(n))$

Некоторые ряды Тейлора ($x \to 0$)

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + O(x^4)$;
- $\ln(1+x) = x - \frac{x}{2} + \frac{x^3}{3} + O(x^4)$;
- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + O(x^4)$;
- $(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(1+\alpha)}{2}x^2 + O(x^3)$

Вывод формулы Стирлинга

Теорема

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + O(n^{-1}))$$

Вывод формулы Стирлинга

Теорема

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + O(n^{-1}))$$

Рассмотрим функцию

$$\sigma(\lambda) = \frac{e^\lambda}{\lambda^{\lambda+1/2}} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^\lambda dx$$

Вывод формулы Стирлинга

Теорема

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + O(n^{-1}))$$

Рассмотрим функцию

$$\sigma(\lambda) = \frac{e^\lambda}{\lambda^{\lambda+1/2}} \int_0^{+\infty} e^{-x} x^\lambda dx$$

Пусть

$$Int(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^\lambda dx$$

Функция $Int(\lambda)$

При $\lambda > -1$ найдем

$$Int(\lambda + 1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\lambda+1} dx$$

Функция $Int(\lambda)$

При $\lambda > -1$ найдем

$$Int(\lambda+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\lambda+1} dx$$

Возьмем интеграл по частям:

$$\begin{bmatrix} dv = e^{-x}dx, v = -e^{-x} \\ u = x^{\lambda+1}, du = (\lambda+1)x^{\lambda}dx \end{bmatrix} = -x^{\lambda+1}e^{-x}|_0^{+\infty} + (\lambda+1)\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\lambda}dx$$

Функция $Int(\lambda)$

При $\lambda > -1$ найдем

$$Int(\lambda+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\lambda+1} dx$$

Возьмем интеграл по частям:

$$\begin{bmatrix} dv = e^{-x}dx, v = -e^{-x} \\ u = x^{\lambda+1}, du = (\lambda+1)x^{\lambda}dx \end{bmatrix} = -x^{\lambda+1}e^{-x}|_0^{+\infty} + (\lambda+1)\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\lambda}dx$$

$$= (\lambda+1)Int(\lambda)$$

Функция $Int(\lambda)$

При $\lambda > -1$ найдем

$$Int(\lambda+1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{\lambda+1} dx$$

Возьмем интеграл по частям:

$$\begin{bmatrix} dv = e^{-x}dx, v = -e^{-x} \\ u = x^{\lambda+1}, du = (\lambda+1)x^{\lambda}dx \end{bmatrix} = -x^{\lambda+1}e^{-x}|_0^{+\infty} + (\lambda+1)\int_0^{+\infty} e^{-x}x^{\lambda}dx$$

$$= (\lambda+1)Int(\lambda)$$

Поэтому $Int(n) = n \cdot (n-1) \cdots 1 \cdot \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = n!$

Функция $Int(\lambda)$

Кроме того,

$$Int(n+1/2) = (n+1/2)\cdot(n-1/2)\cdots 1/2 \cdot Int(-1/2) =$$

Функция $Int(\lambda)$

Кроме того,

$$Int(n+1/2) = (n+1/2)\cdot(n-1/2)\cdots 1/2\cdot Int(-1/2) =$$

$$= \frac{(2n+1)\cdot(2n)\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot Int(-1/2)}{2^{2n+1}\cdot n!}$$

Функция $Int(\lambda)$

Кроме того,

$$Int(n+1/2) = (n+1/2)\cdot(n-1/2)\cdots 1/2 \cdot Int(-1/2) =$$

$$= \frac{(2n+1)\cdot(2n)\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot Int(-1/2)}{2^{2n+1}\cdot n!}$$

$$Int(-1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

Функция $Int(\lambda)$

Кроме того,

$$Int(n+1/2) = (n+1/2)\cdot(n-1/2)\cdots 1/2 \cdot Int(-1/2) =$$

$$= \frac{(2n+1)\cdot(2n)\cdot(2n-1)\cdot(2n-2)\cdots 2\cdot 1\cdot Int(-1/2)}{2^{2n+1}\cdot n!}$$

$$Int(-1/2) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} e^{-x} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}$$

$$Int(n+1/2) = \frac{\sqrt{\pi}(2n+1)!}{2^{2n+1} n!}$$

Отношение $\frac{\sigma(\lambda+1)}{\sigma(\lambda)}$

$$\sigma(\lambda) = \frac{e^{\lambda}}{\lambda^{\lambda+1/2}} Int(\lambda)$$

Отношение $\frac{\sigma(\lambda+1)}{\sigma(\lambda)}$

$$\sigma(\lambda) = \frac{e^{\lambda}}{\lambda^{\lambda+1/2}} Int(\lambda)$$

$$\frac{\sigma(\lambda+1)}{\sigma(\lambda)} = \frac{e^{\lambda+1}}{(\lambda+1)^{\lambda+3/2}} \cdot \frac{\lambda^{\lambda+1/2}}{e^{\lambda}} \cdot \frac{Int(\lambda+1)}{Int(\lambda)} =$$

Отношение $\frac{\sigma(\lambda+1)}{\sigma(\lambda)}$

$$\sigma(\lambda) = \frac{e^{\lambda}}{\lambda^{\lambda+1/2}} Int(\lambda)$$

$$\frac{\sigma(\lambda+1)}{\sigma(\lambda)} = \frac{e^{\lambda+1}}{(\lambda+1)^{\lambda+3/2}} \cdot \frac{\lambda^{\lambda+1/2}}{e^{\lambda}} \cdot \frac{Int(\lambda+1)}{Int(\lambda)} =$$

$$= e \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{\lambda+1/2} =$$

Отношение $\frac{\sigma(\lambda+1)}{\sigma(\lambda)}$

$$\sigma(\lambda) = \frac{e^{\lambda}}{\lambda^{\lambda+1/2}} Int(\lambda)$$

$$\frac{\sigma(\lambda+1)}{\sigma(\lambda)} = \frac{e^{\lambda+1}}{(\lambda+1)^{\lambda+3/2}} \cdot \frac{\lambda^{\lambda+1/2}}{e^{\lambda}} \cdot \frac{Int(\lambda+1)}{Int(\lambda)} =$$

$$= e \cdot \left(\frac{\lambda}{\lambda+1}\right)^{\lambda+1/2} =$$

$$= e \cdot \left(\frac{\lambda+1}{\lambda}\right)^{-\lambda-1/2} = \{e \cdot \left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^{-\lambda}\} \cdot \{\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^{-1/2}\}$$

Первый множитель

$$e \cdot \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{-\lambda} = e^{1+\ln(1+\frac{1}{\lambda})\cdot(-\lambda)}$$

Первый множитель

$$e \cdot \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{-\lambda} = e^{1+\ln(1+\frac{1}{\lambda})\cdot(-\lambda)}$$

При $\lambda \to +\infty \quad \frac{1}{\lambda} \to 0$, поэтому можно пользоваться рядами:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$$

Первый множитель

$$e \cdot \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{-\lambda} = e^{1+\ln(1+\frac{1}{\lambda})\cdot(-\lambda)}$$

При $\lambda \to +\infty \quad \frac{1}{\lambda} \to 0$, поэтому можно пользоваться рядами:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$$

$$e^{1+(\ln(1+\frac{1}{\lambda}))\cdot(-\lambda)} = e^{1+(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{2\lambda^2}+O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right))\cdot(-\lambda)} =$$

Первый множитель

$$e \cdot \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{-\lambda} = e^{1+\ln(1+\frac{1}{\lambda})\cdot(-\lambda)}$$

При $\lambda \to +\infty \quad \frac{1}{\lambda} \to 0$, поэтому можно пользоваться рядами:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$$

$$e^{1+(\ln(1+\frac{1}{\lambda}))\cdot(-\lambda)} = e^{1+(\frac{1}{\lambda}-\frac{1}{2\lambda^2}+O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right))\cdot(-\lambda)} =$$

$$= e^{\frac{1}{2\lambda}+O(\lambda^{-2})}$$

Первый множитель

$$e \cdot \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{-\lambda} = e^{1+\ln(1+\frac{1}{\lambda})\cdot(-\lambda)}$$

При $\lambda \to +\infty \quad \frac{1}{\lambda} \to 0$, поэтому можно пользоваться рядами:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$$

$$e^{1+(\ln(1+\frac{1}{\lambda}))\cdot(-\lambda)} = e^{1+(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right))\cdot(-\lambda)} =$$

$$= e^{\frac{1}{2\lambda} + O(\lambda^{-2})}$$

Разложим экспоненту в ряд и получим:

$$e^{\frac{1}{2\lambda} + O(\lambda^{-2})} = 1 + \frac{1}{2\lambda} + O(\lambda^{-2}) + O(\{\frac{1}{2\lambda} + O(\lambda^{-2})\}^2)$$

Первый множитель

$$e \cdot \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right)^{-\lambda} = e^{1+\ln(1+\frac{1}{\lambda})\cdot(-\lambda)}$$

При $\lambda \to +\infty \quad \frac{1}{\lambda} \to 0$, поэтому можно пользоваться рядами:

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$$

$$e^{1+(\ln(1+\frac{1}{\lambda}))\cdot(-\lambda)} = e^{1+(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{2\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^3}\right))\cdot(-\lambda)} =$$

$$= e^{\frac{1}{2\lambda} + O(\lambda^{-2})}$$

Разложим экспоненту в ряд и получим:

$$e^{\frac{1}{2\lambda} + O(\lambda^{-2})} = 1 + \frac{1}{2\lambda} + O(\lambda^{-2}) + O(\{\frac{1}{2\lambda} + O(\lambda^{-2})\}^2)$$

$$= 1 + \frac{1}{2\lambda} + O(\lambda^{-2})$$

Второй множитель

Также разложим в ряд

$$(1+\lambda^{-1})^{-1/2} = 1 - \frac{\lambda^{-1}}{2} + O(\lambda^{-2})$$

Второй множитель

Также разложим в ряд

$$(1+\lambda^{-1})^{-1/2} = 1 - \frac{\lambda^{-1}}{2} + O(\lambda^{-2})$$

$$\{e\cdot\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^{-\lambda}\}\cdot\{\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^{-1/2}\} = (1+\frac{1}{2\lambda}+O(\lambda^{-2}))\cdot(1-\frac{1}{2\lambda}+O(\lambda^{-2})) =$$

Второй множитель

Также разложим в ряд

$$(1+\lambda^{-1})^{-1/2} = 1 - \frac{\lambda^{-1}}{2} + O(\lambda^{-2})$$

$$\{e\cdot\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^{-\lambda}\}\cdot\{\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^{-1/2}\} = (1+\frac{1}{2\lambda}+O(\lambda^{-2}))\cdot(1-\frac{1}{2\lambda}+O(\lambda^{-2})) =$$

$$= 1-\frac{1}{4\lambda^2}+(1+\frac{1}{2\lambda})\cdot O(\lambda^{-2})+(1-\frac{1}{2\lambda})\cdot O(\lambda^{-2})+O(\lambda^{-4}) = 1+O(\lambda^{-2})$$

Второй множитель

Также разложим в ряд

$$(1+\lambda^{-1})^{-1/2} = 1 - \frac{\lambda^{-1}}{2} + O(\lambda^{-2})$$

$$\{e\cdot\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^{-\lambda}\}\cdot\{\left(1+\frac{1}{\lambda}\right)^{-1/2}\} = (1+\frac{1}{2\lambda}+O(\lambda^{-2}))\cdot(1-\frac{1}{2\lambda}+O(\lambda^{-2})) =$$

$$= 1-\frac{1}{4\lambda^2}+(1+\frac{1}{2\lambda})\cdot O(\lambda^{-2})+(1-\frac{1}{2\lambda})\cdot O(\lambda^{-2})+O(\lambda^{-4}) = 1+O(\lambda^{-2})$$

$$\frac{\sigma(\lambda+1)}{\sigma(\lambda)} = 1 + O(\lambda^{-2})$$

Следовательно,

$$\ln\left(\frac{\sigma(\lambda+1)}{\sigma(\lambda)}\right) = 1 + O(\lambda^{-2})$$

Следовательно,

$$\ln\left(\frac{\sigma(\lambda+1)}{\sigma(\lambda)}\right) = 1 + O(\lambda^{-2})$$

И снова в ряд при $\lambda \to \infty$:

$$\ln(1 + O(\lambda^{-2})) = O(\lambda^{-2}) + O(\{O(\lambda^{-2}))\}^2) = O(\lambda^{-2})$$

Следовательно,

$$\ln\left(\frac{\sigma(\lambda+1)}{\sigma(\lambda)}\right) = 1 + O(\lambda^{-2})$$

И снова в ряд при $\lambda \to \infty$:

$$\ln(1 + O(\lambda^{-2})) = O(\lambda^{-2}) + O(\{O(\lambda^{-2}))\}^2) = O(\lambda^{-2})$$

Тогда

$$\ln\left(\frac{\sigma(\lambda+1)}{\sigma(\lambda)}\right) = \ln(\sigma(\lambda+1)) - \ln(\sigma(\lambda)) = O(\lambda^{-2})$$

Следовательно,

$$\ln\left(\frac{\sigma(\lambda+1)}{\sigma(\lambda)}\right) = 1 + O(\lambda^{-2})$$

И снова в ряд при $\lambda \to \infty$:

$$\ln(1 + O(\lambda^{-2})) = O(\lambda^{-2}) + O(\{O(\lambda^{-2}))\}^2) = O(\lambda^{-2})$$

Тогда

$$\ln\left(\frac{\sigma(\lambda+1)}{\sigma(\lambda)}\right) = \ln(\sigma(\lambda+1)) - \ln(\sigma(\lambda)) = O(\lambda^{-2})$$

Пусть $\lambda = n$, тогда

$$\ln(\sigma(2n+1)) - \ln(\sigma(n)) = (n+1) \cdot O(n^{-2}) = O(n^{-1})$$

Следовательно,

$$\ln\left(\frac{\sigma(\lambda+1)}{\sigma(\lambda)}\right) = 1 + O(\lambda^{-2})$$

И снова в ряд при $\lambda \to \infty$:

$$\ln(1 + O(\lambda^{-2})) = O(\lambda^{-2}) + O(\{O(\lambda^{-2}))\}^2) = O(\lambda^{-2})$$

Тогда

$$\ln\left(\frac{\sigma(\lambda+1)}{\sigma(\lambda)}\right) = \ln(\sigma(\lambda+1)) - \ln(\sigma(\lambda)) = O(\lambda^{-2})$$

Пусть $\lambda = n$, тогда

$$\ln(\sigma(2n+1)) - \ln(\sigma(n)) = (n+1) \cdot O(n^{-2}) = O(n^{-1})$$

Тогда

$$\frac{\sigma(2n+1)}{\sigma(n)} = e^{O(n^{-1})} = 1 + O(n^{-1}) \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

$$\sigma(\lambda) = \frac{e^{\lambda}}{\lambda^{\lambda+1/2}} Int(\lambda)$$

$$\sigma(n) = \frac{e^{n}}{n^{n+1/2}} n!$$

$$\sigma(\lambda) = \frac{e^{\lambda}}{\lambda^{\lambda+1/2}} Int(\lambda)$$

$$\sigma(n) = \frac{e^{n}}{n^{n+1/2}} n!$$

$$n! = \sigma(n) \frac{n^{n+1/2}}{e^{n}}$$

$$\sigma(\lambda) = \frac{e^{\lambda}}{\lambda^{\lambda+1/2}} Int(\lambda)$$

$$\sigma(n) = \frac{e^{n}}{n^{n+1/2}} n!$$

$$n! = \sigma(n) \frac{n^{n+1/2}}{e^{n}}$$

$$(2n+1)! = \sigma(2n+1) \frac{(2n+1)^{2n+3/2}}{e^{2n+1}}$$

$$\sigma(\lambda) = \frac{e^{\lambda}}{\lambda^{\lambda+1/2}} Int(\lambda)$$

$$\sigma(n) = \frac{e^{n}}{n^{n+1/2}} n!$$

$$n! = \sigma(n) \frac{n^{n+1/2}}{e^{n}}$$

$$(2n+1)! = \sigma(2n+1) \frac{(2n+1)^{2n+3/2}}{e^{2n+1}}$$

$$\sigma(n+1/2) = \frac{e^{n+1/2}}{(n+1/2)^{n+1}} Int(n+1/2) = \frac{e^{n+1/2}}{(n+1/2)^{n+1}} \frac{\sqrt{\pi}(2n+1)!}{2^{2n+1} n!}$$

$$n! = \sigma(n)\frac{n^{n+1/2}}{e^n}$$

$$(2n+1)! = \sigma(2n+1)\frac{(2n+1)^{2n+3/2}}{e^{2n+1}}$$

$$\sigma(n+1/2) = \frac{e^{n+1/2}}{(n+1/2)^{n+1}} Int(n+1/2) = \frac{e^{n+1/2}}{(n+1/2)^{n+1}} \frac{\sqrt{\pi}(2n+1)!}{2^{2n+1}n!}$$

$$= \sqrt{2\pi}\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n+1/2} e^{-1/2}\frac{\sigma(2n+1)}{\sigma(2n)} = \sqrt{2\pi}exp\{\ln(1+\frac{1}{2n})(n+1/2)-1/2\}$$

$$\ln(1+\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$$

$$\ln(1+\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$$

$$\ln(1+\frac{1}{2n})(n+1/2) = \ln(1+\frac{1}{2n})n(1+\frac{1}{2n}) = (\frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2}))n(1+\frac{1}{2n})$$

$$\ln(1+\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$$

$$\ln(1+\frac{1}{2n})(n+1/2) = \ln(1+\frac{1}{2n})n(1+\frac{1}{2n}) = (\frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2}))n(1+\frac{1}{2n})$$

$$= (1/2 + O(\frac{1}{n}))(1+\frac{1}{2n}) = 1/2 + O(\frac{1}{n})$$

$$\ln(1+\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$$

$$\ln(1+\frac{1}{2n})(n+1/2) = \ln(1+\frac{1}{2n})n(1+\frac{1}{2n}) = (\frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2}))n(1+\frac{1}{2n})$$

$$= (1/2 + O(\frac{1}{n}))(1+\frac{1}{2n}) = 1/2 + O(\frac{1}{n})$$

Тогда

$$\sigma(n+1/2) = \sqrt{2\pi}\exp\{1/2 + O(\frac{1}{n}) - 1/2\} = \sqrt{2\pi}\exp\{O(\frac{1}{n})\}$$

$$\ln(1+\frac{1}{2n}) = \frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2})$$

$$\ln(1+\frac{1}{2n})(n+1/2) = \ln(1+\frac{1}{2n})n(1+\frac{1}{2n}) = (\frac{1}{2n} + O(\frac{1}{n^2}))n(1+\frac{1}{2n})$$

$$= (1/2 + O(\frac{1}{n}))(1+\frac{1}{2n}) = 1/2 + O(\frac{1}{n})$$

Тогда

$$\sigma(n+1/2) = \sqrt{2\pi}\exp\{1/2 + O(\frac{1}{n}) - 1/2\} = \sqrt{2\pi}\exp\{O(\frac{1}{n})\}$$

$$\sigma(n+1/2) = \sqrt{2\pi}(1 + O(\frac{1}{n}))$$

Следующую лемму примем без доказательства

Лемма

Для любого $0 \leq \alpha < 1 \quad \sigma(n+\alpha) = \sigma(n+1/2) = \sqrt{2\pi}(1 + O(\frac{1}{n}))$

Следующую лемму примем без доказательства

Лемма

Для любого $0 \leq \alpha < 1 \quad \sigma(n+\alpha) = \sigma(n+1/2) = \sqrt{2\pi}(1+O(\frac{1}{n}))$

Тогда

$$n! = \sigma(n)\frac{n^{n+1/2}}{e^n} = \sqrt{2\pi}\frac{n^{n+1/2}}{e^n}(1+O(\frac{1}{n}))$$

Следствия из формулы Стирлинга

Следствие 1. Асимптотика для среднего биномиального коэффициента

$$C_{2n}^{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 4^n (1 + O(\frac{1}{n}))$$

Следствия из формулы Стирлинга

Следствие 1. Асимптотика для среднего биномиального коэффициента

$$C_{2n}^{n} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 4^n (1 + O(\frac{1}{n}))$$

Используя формулу Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + O(\frac{1}{n}))}$, получаем:

$$C_{2n}^{n} = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{\sqrt{2\pi 2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} (1 + O(\frac{1}{n}))}{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} (1 + O(\frac{1}{n}))^2}$$

Следствия из формулы Стирлинга

Следствие 1. Асимптотика для среднего биномиального коэффициента

$$C_{2n}^n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 4^n (1 + O(\frac{1}{n}))$$

Используя формулу Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + O(\frac{1}{n}))}$, получаем:

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{\sqrt{2\pi 2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} (1 + O(\frac{1}{n}))}{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} (1 + O(\frac{1}{n}))^2}$$

$(1 + O(\frac{1}{n}))^2 = 1 + O(\frac{1}{n})$, в то же время $\frac{1+O(\frac{1}{n})}{1+O(\frac{1}{n})} \neq 1$, так как под $O(\frac{1}{n})$ мы понимаем множество функций, поэтому в числи теле и знаменателе могут стоять разные функции.

Следствия из формулы Стирлинга

Следствие 1. Асимптотика для среднего биномиального коэффициента

$$C_{2n}^n = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 4^n (1 + O(\frac{1}{n}))$$

Используя формулу Стирлинга $n! = \sqrt{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^n (1 + O(\frac{1}{n}))}$, получаем:

$$C_{2n}^n = \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{\sqrt{2\pi 2n} \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} (1 + O(\frac{1}{n}))}{2\pi n \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} (1 + O(\frac{1}{n}))^2}$$

$(1 + O(\frac{1}{n}))^2 = 1 + O(\frac{1}{n})$, в то же время $\frac{1+O(\frac{1}{n})}{1+O(\frac{1}{n})} \neq 1$, так как под $O(\frac{1}{n})$ мы понимаем множество функций, поэтому в числи теле и знаменателе могут стоять разные функции. Используем $\frac{1}{1+x} = 1 + x + x^2 + \ldots$ и получим $\frac{1}{1+O(\frac{1}{n})} = 1 + O(\frac{1}{n})$

Число сравнений для сортировки массива (оценка снизу)

Будем подсчитывать только количество сравнений.

Число сравнений для сортировки массива (оценка снизу)

Будем подсчитывать только количество сравнений. Рассмотрим все возможные перестановки $P(n)$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, их $n!$. Запишем эту перестановку в массив $a_1, \ldots, a_n$. Пусть A — алгоритм, который сортирует эту перестановку, получая упорядоченный массив.

Число сравнений для сортировки массива (оценка снизу)

Будем подсчитывать только количество сравнений. Рассмотрим все возможные перестановки $P(n)$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, их $n!$. Запишем эту перестановку в массив $a_1, \ldots, a_n$. Пусть A — алгоритм, который сортирует эту перестановку, получая упорядоченный массив. Алгоритм берет два элемента массива, сравнивает их и получает один из двух ответов: 0 или 1 (да или нет), затем переходит к сравнению другой пары элементов массива.

Число сравнений для сортировки массива (оценка снизу)

Будем подсчитывать только количество сравнений. Рассмотрим все возможные перестановки $P(n)$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, их $n!$.
Запишем эту перестановку в массив $a_1, \ldots, a_n$. Пусть A — алгоритм, который сортирует эту перестановку, получая упорядоченный массив.
Алгоритм берет два элемента массива, сравнивает их и получает один из двух ответов: 0 или 1 (да или нет), затем переходит к сравнению другой пары элементов массива.
Следовательно, каждому массиву можно сопоставить набор ответов на сравнения. Ясно, что если ответы одинаковы, то массивы отсортируются одинаково (то есть такое отображение инъективно).

Число сравнений для сортировки массива (оценка снизу)

Будем подсчитывать только количество сравнений. Рассмотрим все возможные перестановки $P(n)$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, их $n!$. Запишем эту перестановку в массив $a_1, \ldots, a_n$. Пусть A — алгоритм, который сортирует эту перестановку, получая упорядоченный массив. Алгоритм берет два элемента массива, сравнивает их и получает один из двух ответов: 0 или 1 (да или нет), затем переходит к сравнению другой пары элементов массива.
Следовательно, каждому массиву можно сопоставить набор ответов на сравнения. Ясно, что если ответы одинаковы, то массивы отсортируются одинаково (то есть такое отображение инъективно). Мы имеем инъекцию $f\colon P(n) \to Ans(A)$, где f — инъекция, тогда по принципу Дирихле $|Ans(A)| \geq |P(n)|$. Ответы — это массивы из 0 и 1 длины $\geq k$, где k — искомое минимальное количество сравнений, т.е. $|Ans(A)| \geq 2^k$.

Число сравнений для сортировки массива (оценка снизу)

Будем подсчитывать только количество сравнений. Рассмотрим все возможные перестановки $P(n)$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, их $n!$. Запишем эту перестановку в массив $a_1, \ldots, a_n$. Пусть A — алгоритм, который сортирует эту перестановку, получая упорядоченный массив. Алгоритм берет два элемента массива, сравнивает их и получает один из двух ответов: 0 или 1 (да или нет), затем переходит к сравнению другой пары элементов массива.
Следовательно, каждому массиву можно сопоставить набор ответов на сравнения. Ясно, что если ответы одинаковы, то массивы отсортируются одинаково (то есть такое отображение инъективно). Мы имеем инъекцию $f\colon P(n) \to Ans(A)$, где f — инъекция, тогда по принципу Дирихле $|Ans(A)| \geq |P(n)|$. Ответы — это массивы из 0 и 1 длины $\geq k$, где k — искомое минимальное количество сравнений, т.е. $|Ans(A)| \geq 2^k$. Получим $n! \leq 2^k$, т.е. $k \geq \log n!$. Пусть A — самый эффективный (имеет место равенство,), тогда

Число сравнений для сортировки массива (оценка снизу)

Будем подсчитывать только количество сравнений. Рассмотрим все возможные перестановки $P(n)$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, их $n!$. Запишем эту перестановку в массив $a_1, \ldots, a_n$. Пусть A — алгоритм, который сортирует эту перестановку, получая упорядоченный массив. Алгоритм берет два элемента массива, сравнивает их и получает один из двух ответов: 0 или 1 (да или нет), затем переходит к сравнению другой пары элементов массива.
Следовательно, каждому массиву можно сопоставить набор ответов на сравнения. Ясно, что если ответы одинаковы, то массивы отсортируются одинаково (то есть такое отображение инъективно). Мы имеем инъекцию $f\colon P(n) \to Ans(A)$, где f — инъекция, тогда по принципу Дирихле $|Ans(A)| \geq |P(n)|$. Ответы — это массивы из 0 и 1 длины $\geq k$, где k — искомое минимальное количество сравнений, т.е. $|Ans(A)| \geq 2^k$. Получим $n! \leq 2^k$, т.е. $k \geq \log n!$. Пусть A — самый эффективный (имеет место равенство,), тогда

$$k = \log n! = \log(\sqrt{2\pi n}) + n \log n - n \log e + O(\frac{1}{n})$$