Рекуррентные соотношения

Михайлова Инна Анатольевна

Институт математики и естественных наук.
Кафедра алгебры и фундаментальной информатики.

30 сентября 2018 г.

Примеры

Числа Фибоначчи

Числа Фибоначчи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

удовлетворяют соотношению $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 0$, с начальными условиями $F_0 = F_1 = 1$.

Примеры

Числа Фибоначчи

Числа Фибоначчи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$$

удовлетворяют соотношению $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 0$, с начальными условиями $F_0 = F_1 = 1$.

Числа Каталана

Числа Каталана удовлетворяют соотношению $C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot C_{n-1-i}$ с начальным условием $C_0 = 1$

Примеры

Числа Фибоначчи

Числа Фибоначчи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots$$

удовлетворяют соотношению $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$, $n \geq 0$, с начальными условиями $F_0 = F_1 = 1$.

Числа Каталана

Числа Каталана удовлетворяют соотношению $C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot C_{n-1-i}$ с начальным условием $C_0 = 1$

Определение

Рекуррентным соотношением называется выражение $a_n = f(a_0, \dots, a_{n-1})$, которое позволяет вычислять a_n через предыдущие члены последовательности.

Линейные однородные рекуррентные соотношения

Определение

Линейным однородным рекуррентным соотношением с постоянными коэффициентами называется

$$x_{n+k} = a_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n,$$

где $n \geq 0$, k — фиксированное число, $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{C}$

Линейные однородные рекуррентные соотношения

Определение

Линейным однородным рекуррентным соотношением с постоянными коэффициентами называется

$$x_{n+k} = a_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n,$$

где $n \geq 0$, k — фиксированное число, $a_0, \ldots, a_{k-1} \in \mathbb{C}$

Его характеристическим уравнением называется уравнение от числовой переменной t:

$$t^k = a_{k-1}t^{k-1} + \ldots + a_1 t + a_0$$

Частный случай: геометрическая прогрессия

Напомним, что геометрической прогрессией со знаменателем q называется последовательность $\{x_n\}_{n\geq 0}$, удовлетворяющая рекуррентному соотношению $x_{n+1} = q \cdot x_n$. Для геометрической прогрессии известна явная формула, по которой можно посчитать ее n-ый член: $x_n = x_0 \cdot q^n$.

Частный случай: геометрическая прогрессия

Напомним, что геометрической прогрессией со знаменателем q называется последовательность $\{x_n\}_{n\geq 0}$, удовлетворяющая рекуррентному соотношению $x_{n+1} = q \cdot x_n$. Для геометрической прогрессии известна явная формула, по которой можно посчитать ее n-ый член: $x_n = x_0 \cdot q^n$.

Рассмотрим характеристическое уравнение для соотношения $x_{n+1} = q \cdot x_n$:

$$t = q.$$

Таким образом, явная формула зависит от x_0 (т.е. от начальных условий) и от корня характеристического уравнения.

Теорема

Пусть

$$x_{n+k} = a_{k-1}x_{n+k-1} + \ldots + a_1 x_{n+1} + a_0 x_n$$

рекуррентное соотношение такое, что у его характеристического уравнения различные корни $q_1, \ldots, q_s$ кратности соответственно $r_1, \ldots, r_s$. Тогда явная формула имеет вид:

$$x_n = P_1(n)q_1^n + \ldots + P_s(n)q_s^n,$$

где $P_1(n), \ldots, P_s(n)$ — многочлены с неизвестными коэффициентами степени $r_1 - 1, \ldots, r_s - 1$ соответственно

Пример

Найдите формулу для решения рекуррентного соотношения $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$ с начальными условиями $x_0 = 1, x_1 = 2$.

Пример

Найдите формулу для решения рекуррентного соотношения $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$ с начальными условиями $x_0 = 1, x_1 = 2$.
Напишем характеристическое уравнение: $t^2 = 2t - 1$. У него один корень $t = 1$ кратности 2.

Пример

Найдите формулу для решения рекуррентного соотношения $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$ с начальными условиями $x_0 = 1, x_1 = 2$. Напишем характеристическое уравнение: $t^2 = 2t - 1$. У него один корень $t = 1$ кратности 2. Согласно теореме решение выглядит $x_n = P(n)1^n = P(n)$, где $P(n)$ — многочлен с неопределенными коэффициентами степени $2 - 1 = 1$, т.е. $P(n) = an + b$.

Пример

Найдите формулу для решения рекуррентного соотношения $x_{n+2} = 2x_{n+1} - x_n$ с начальными условиями $x_0 = 1, x_1 = 2$.
Напишем характеристическое уравнение: $t^2 = 2t - 1$. У него один корень $t = 1$ кратности 2. Согласно теореме решение выглядит $x_n = P(n)1^n = P(n)$, где $P(n)$ — многочлен с неопределенными коэффициентами степени $2 - 1 = 1$, т.е. $P(n) = an + b$.
Итак, $x_n = an + b$. Так как нам даны начальные условия, то можно найти коэффициенты из системы $\begin{cases} x_0 = b = 1 \\ x_1 = a + b = 2 \end{cases}$
Ответ: $x_n = n + 1$

Доказательство теоремы для случая различных корней кратности 1

Докажем теорему в предположении, что у характеристического уравнения k корней кратности 1. Тогда решение имеет вид $x_n = a_1 q_1^n + \ldots + a_k q_k^n$ (сумма геометрических прогрессий).

Доказательство теоремы для случая различных корней кратности 1

Докажем теорему в предположении, что у характеристического уравнения k корней кратности 1. Тогда решение имеет вид $x_n = a_1 q_1^n + \ldots + a_k q_k^n$ (сумма геометрических прогрессий).
Рассмотрим линейное пространство всех бесконечных последовательностей действительных чисел $\mathbb{R}^\infty$ над полем $\mathbb{R}$ относительно покомпонентного сложения и умножения на число.
Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{D} : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$, который "отрезает" у последовательности первый элемент, т.е.

$$\mathcal{D}(\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}) = \{a_1, a_2, \ldots\}$$

Доказательство теоремы для случая различных корней кратности 1

Докажем теорему в предположении, что у характеристического уравнения k корней кратности 1. Тогда решение имеет вид $x_n = a_1 q_1^n + \ldots + a_k q_k^n$ (сумма геометрических прогрессий). Рассмотрим линейное пространство всех бесконечных последовательностей действительных чисел $\mathbb{R}^\infty$ над полем $\mathbb{R}$ относительно покомпонентного сложения и умножения на число. Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{D} : \mathbb{R}^\infty \to \mathbb{R}^\infty$, который "отрезает" у последовательности первый элемент, т.е.

$$\mathcal{D}(\{a_0, a_1, a_2, \ldots\}) = \{a_1, a_2, \ldots\}$$

Рассмотрим геометрическую прогрессию со знаменателем q и подействуем на нее оператором $\mathcal{D}$:

$$D(\{x_0, x_0 \cdot q, x_0 \cdot q^2, \ldots\}) = \{x_0 \cdot q, x_0 \cdot q^2, \ldots\} = q \cdot \{x_0, x_0 \cdot q, \ldots\}$$

Получается, что всякая геометрическая прогрессия со знаменателем q является собственным вектором оператора $\mathcal{D}$ соответствующем собственному значению q.

Доказательство теоремы для случая различных корней кратности 1

По рекуррентному соотношению

$$x_{n+k} - a_{k-1}x_{n+k-1} - \ldots - a_1 x_{n+1} - a_0 x_n = 0 \quad \forall n \geq 0 \qquad (1)$$

построим оператор $\mathcal{A} = \mathcal{D}^k - a_{k-1}\mathcal{D}^{k-1} + \ldots + a_1\mathcal{D}^1 + a_0\mathcal{E}$

Доказательство теоремы для случая различных корней кратности 1

По рекуррентному соотношению

$$x_{n+k} - a_{k-1}x_{n+k-1} - \ldots - a_1x_{n+1} - a_0x_n = 0 \quad \forall n \geq 0 \qquad (1)$$

построим оператор $\mathcal{A} = \mathcal{D}^k - a_{k-1}\mathcal{D}^{k-1} + \ldots + a_1\mathcal{D}^1 + a_0\mathcal{E}$
Тогда последовательность $\{x_n\}_{n\geq 0}$ является решением (1) тогда и только тогда, когда $\{x_n\}_{n\geq 0} \in Ker(\mathcal{A})$. Останется найти $Ker(\mathcal{A})$

Доказательство теоремы для случая различных корней кратности 1

По рекуррентному соотношению

$$x_{n+k} - a_{k-1}x_{n+k-1} - \ldots - a_1 x_{n+1} - a_0 x_n = 0 \quad \forall n \geq 0 \qquad (1)$$

построим оператор $\mathcal{A} = \mathcal{D}^k - a_{k-1}\mathcal{D}^{k-1} + \ldots + a_1\mathcal{D}^1 + a_0\mathcal{E}$
Тогда последовательность $\{x_n\}_{n\geq 0}$ является решением (1) тогда и только тогда, когда $\{x_n\}_{n\geq 0} \in Ker(\mathcal{A})$. Останется найти $Ker(\mathcal{A})$
Так как у характеристического уравнения k различных корней $q_1, \ldots, q_k$, то $\mathcal{A} = (\mathcal{D} - q_1\mathcal{E})\cdots(\mathcal{D} - q_k\mathcal{E})$. Из линейной алгебры известно, что $Ker(\mathcal{A}) = \bigoplus_{i=1}^{k} Ker(\mathcal{D} - q_i\mathcal{E})$.

Доказательство теоремы для случая различных корней кратности 1

По рекуррентному соотношению

$$x_{n+k} - a_{k-1}x_{n+k-1} - \ldots - a_1 x_{n+1} - a_0 x_n = 0 \quad \forall n \geq 0 \qquad (1)$$

построим оператор $\mathcal{A} = \mathcal{D}^k - a_{k-1}\mathcal{D}^{k-1} + \ldots + a_1\mathcal{D}^1 + a_0\mathcal{E}$
Тогда последовательность $\{x_n\}_{n\geq 0}$ является решением (1) тогда и только тогда, когда $\{x_n\}_{n\geq 0} \in Ker(\mathcal{A})$. Останется найти $Ker(\mathcal{A})$
Так как у характеристического уравнения k различных корней $q_1, \ldots, q_k$, то $\mathcal{A} = (\mathcal{D} - q_1\mathcal{E}) \cdots (\mathcal{D} - q_k\mathcal{E})$. Из линейной алгебры известно, что $Ker(\mathcal{A}) = \bigoplus_{i=1}^{k} Ker(\mathcal{D} - q_i\mathcal{E})$. Из определения прямой суммы следует, что всякий вектор из $Ker(\mathcal{A})$ представим (однозначно) в виде суммы векторов из $Ker(\mathcal{D} - q_i\mathcal{E})$. То есть, как мы выяснили выше, в виде суммы геометрических прогрессий.

Последовательность Фибоначчи

Последовательность Фибоначчи задается рекуррентным соотношением $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ с начальными условиями $F_0 = 1, F_1 = 1$.
Записываем характеристическое уравнение $t^2 = t + 1$, находим его два различных корня $q_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ и $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Тогда $F_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n$.

Последовательность Фибоначчи

Последовательность Фибоначчи задается рекуррентным соотношением $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ с начальными условиями $F_0 = 1, F_1 = 1$.
Записываем характеристическое уравнение $t^2 = t + 1$, находим его два различных корня $q_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ и $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Тогда $F_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n$.
Найдем неопределенные коэффициенты из системы

$$\begin{cases} F_0 = c_1 + c_2 = 1 \\ F_1 = c_1 q_1 + c_2 q_2 = 1 \end{cases}$$

Откуда $c_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}, c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$

Последовательность Фибоначчи

Последовательность Фибоначчи задается рекуррентным соотношением $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ с начальными условиями $F_0 = 1, F_1 = 1$.
Записываем характеристическое уравнение $t^2 = t + 1$, находим его два различных корня $q_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$ и $q_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Тогда $F_n = c_1 q_1^n + c_2 q_2^n$.
Найдем неопределенные коэффициенты из системы
$\begin{cases} F_0 = c_1 + c_2 = 1 \\ F_1 = c_1 q_1 + c_2 q_2 = 1 \end{cases}$ Откуда $c_1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}, c_2 = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$
Ответ:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

Количество сравнений при сортировке слиянием

Обозначим через T_n — число операций при сортировке слиянием массива из n элементов. Тогда

$$T_n = T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + T_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + n - 1$$

Количество сравнений при сортировке слиянием

Обозначим через T_n — число операций при сортировке слиянием массива из n элементов. Тогда

$$T_n = T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + T_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + n - 1$$

Пусть $n = 2^m$, тогда

$$T_{2^m} = 2T_{2^{m-1}} + 2^m - 1$$

Количество сравнений при сортировке слиянием

Обозначим через T_n — число операций при сортировке слиянием массива из n элементов. Тогда

$$T_n = T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + T_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + n - 1$$

Пусть $n = 2^m$, тогда

$$T_{2^m} = 2T_{2^{m-1}} + 2^m - 1$$

Нелинейные рекуррентные соотношения

Количество сравнений при сортировке слиянием

Обозначим через T_n — число операций при сортировке слиянием массива из n элементов. Тогда

$$T_n = T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + T_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + n - 1$$

Пусть $n = 2^m$, тогда

$$T_{2^m} = 2T_{2^{m-1}} + 2^m - 1 = 2(2T_{2^{m-2}} + 2^{m-1} - 1) + 2^m - 1 =$$

$$= 4T_{2^{m-2}} + 2^m - 2 + 2^m - 1 = 8T_{2^{m-3}} + 2^m - 4 + 2^m - 2 + 2^m - 1 =$$

Количество сравнений при сортировке слиянием

Обозначим через T_n — число операций при сортировке слиянием массива из n элементов. Тогда

$$T_n = T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + T_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + n - 1$$

Пусть $n = 2^m$, тогда

$$T_{2^m} = 2T_{2^{m-1}} + 2^m - 1 = 2(2T_{2^{m-2}} + 2^{m-1} - 1) + 2^m - 1 =$$

$$= 4T_{2^{m-2}} + 2^m - 2 + 2^m - 1 = 8T_{2^{m-3}} + 2^m - 4 + 2^m - 2 + 2^m - 1 =$$

$$= \ldots = 2^m T_{2^0} + m2^m - (2^{m-1} + \ldots + 2 + 1) = 2^m T_1 + m2^m - 2^m + 1$$

Так как $T_1 = 0$, то

$$T_{2^m} = (m-1)2^m + 1$$

Осталось найти T_n при $2^m < n < 2^{m+1}$.

Осталось найти T_n при $2^m < n < 2^{m+1}$.
Пусть

$$T_n = T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + T_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + n - 1$$

Найдем $T_{n+1} = T_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} + T_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + n$.

Нелинейные рекуррентные соотношения

Осталось найти T_n при $2^m < n < 2^{m+1}$.
Пусть
$$T_n = T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + T_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + n - 1$$
Найдем $T_{n+1} = T_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} + T_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + n$.
Отметим, что выполняется одно из двух

- $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil = \lceil \frac{n}{1} \rceil$ и $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$
- $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil = \lceil \frac{n}{1} \rceil + 1$ и $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

В любом из случаев мы получаем, что
$T_{n+1} = T_n + \lfloor \log n \rfloor + 1 = T_n + \lceil \log n \rceil$. Пусть $k = n - 2^m$, тогда
$T_n = T_{2^m + k} = T_{2^m} + k \lceil \log n \rceil$. Откуда
$$T_n = (m-1)2^m + 1 + (n - 2^m)\lceil \log n \rceil + n - 2^m =$$

Нелинейные рекуррентные соотношения

Осталось найти T_n при $2^m < n < 2^{m+1}$.
Пусть

$$T_n = T_{\lceil \frac{n}{2} \rceil} + T_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} + n - 1$$

Найдем $T_{n+1} = T_{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil} + T_{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor} + n$.
Отметим, что выполняется одно из двух

- $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil = \lceil \frac{n}{1} \rceil$ и $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$
- $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil = \lceil \frac{n}{1} \rceil + 1$ и $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$

В любом из случаев мы получаем, что
$T_{n+1} = T_n + \lfloor \log n \rfloor + 1 = T_n + \lceil \log n \rceil$. Пусть $k = n - 2^m$, тогда
$T_n = T_{2^m+k} = T_{2^m} + k\lceil \log n \rceil$. Откуда

$$T_n = (m-1)2^m + 1 + (n - 2^m)\lceil \log n \rceil + n - 2^m =$$

Приведем подобные, учитывая $\lceil \log n \rceil = m + 1$, и получим

$$T_n = n\lceil \log n \rceil - 2^{\lceil \log n \rceil} + 1$$