Мощность объединения множеств

Пусть A_1, A_2 — конечные множества, тогда $|A_1 \cup A_2| = ?$

Мощность объединения множеств

Пусть A_1, A_2 — конечные множества, тогда $|A_1 \cup A_2| = ?$

- $|A_1| + |A_2|$, если $A_1 \cap A_2 = \emptyset$;

Мощность объединения множеств

Пусть A_1, A_2 — конечные множества, тогда $|A_1 \cup A_2| = ?$

- $|A_1| + |A_2|$, если $A_1 \cap A_2 = \emptyset$;
- $|A_2| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$ в общем случае.

Мощность объединения множеств

Пусть A_1, A_2 — конечные множества, тогда $|A_1 \cup A_2| = ?$

- $|A_1| + |A_2|$, если $A_1 \cap A_2 = \emptyset$;
- $|A_2| + |A_2| - |A_1 \cap A_2|$ в общем случае.

Формула для трех множеств:

$$|A_1 \cup A_2 \cup A_3| = |A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$

Общая формула включений-исключений

Пусть на множестве мощности N заданы n свойств $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Обозначим через $N(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}, \alpha'_{j_1}, \ldots, \alpha'_{j_p})$ число элементов этого множества, которые удовлетворяют свойствами $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}$ и не удовлетворяют свойствами $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_p}$.

Общая формула включений-исключений

Пусть на множестве мощности N заданы n свойств $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Обозначим через $N(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}, \alpha'_{j_1}, \ldots, \alpha'_{j_p})$ число элементов этого множества, которые удовлетворяют свойствами $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}$ и не удовлетворяют свойствами $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_p}$.

Теорема

$$\begin{aligned} N(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) = N - (N(\alpha_1) + N(\alpha_2) + \ldots + N(\alpha_n)) + \\ + (N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + \ldots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n)) + \ldots \\ \ldots + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \end{aligned} \quad (1)$$

Общая формула включений-исключений

Пусть на множестве мощности N заданы n свойств $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Обозначим через $N(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}, \alpha'_{j_1}, \ldots, \alpha'_{j_p})$ число элементов этого множества, которые удовлетворяют свойствами $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_s}$ и не удовлетворяют свойствами $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_p}$.

Теорема

$$\begin{aligned} N(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) = N - (N(\alpha_1) + N(\alpha_2) + \ldots + N(\alpha_n)) + \\ + (N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + \ldots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n)) + \ldots \\ \ldots + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \end{aligned} \quad (1)$$

Доказательство по индукции по числу переменных n.
База индукции: $N(\alpha') = N - N(\alpha)$

Доказательство принципа включения-исключения

Для n признаков по предположению индукции:

$$N(\alpha_1', \ldots, \alpha_n') = N - (N(\alpha_1) + N(\alpha_2) + \ldots + N(\alpha_n)) +$$
$$+ (N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + \ldots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n)) + \ldots$$
$$\ldots + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

Доказательство принципа включения-исключения

Для n признаков по предположению индукции:

$$N(\alpha_1', \ldots, \alpha_n') = N - (N(\alpha_1) + N(\alpha_2) + \ldots + N(\alpha_n)) + \\ + (N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + \ldots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n)) + \ldots \\ \ldots + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

Напишем формулу 1 для n признаков на множестве $N(\alpha_{n+1})$:

$$N(\alpha_1', \ldots, \alpha_n', \alpha_{n+1}) = \\ N(\alpha_{n+1}) - (N(\alpha_1, \alpha_{n+1}) + N(\alpha_2, \alpha_{n+1}) + \ldots + N(\alpha_n, \alpha_{n+1})) + \\ \ldots + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$$

Доказательство принципа включения-исключения

Для n признаков по предположению индукции:

$$N(\alpha_1', \ldots, \alpha_n') = N - (N(\alpha_1) + N(\alpha_2) + \ldots + N(\alpha_n)) + \\ + (N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + \ldots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n)) + \ldots \\ \ldots + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

Напишем формулу 1 для n признаков на множестве $N(\alpha_{n+1})$:

$$N(\alpha_1', \ldots, \alpha_n', \alpha_{n+1}) = \\ N(\alpha_{n+1}) - (N(\alpha_1, \alpha_{n+1}) + N(\alpha_2, \alpha_{n+1}) + \ldots + N(\alpha_n, \alpha_{n+1})) + \\ \ldots + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1})$$

Имеем $N(\alpha_1', \ldots, \alpha_n', \alpha_n') = N(\alpha_1', \ldots, \alpha_n') - N(\alpha_1', \ldots, \alpha_n', \alpha_{n+1})$
Вычитая из верхней формулы нижнюю получим искомое.

Следствия принципа включения-исключения

Утверждение 1

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — подмножества множества S. Тогда

$$\begin{aligned}|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + \ldots + |A_n| - \\ - |A_1 \cap A_2| - \ldots - |A_{n-1} \cap A_n| + \ldots \\ + \ldots + (-1)^{n-1}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)\end{aligned}$$

Следствия принципа включения-исключения

Утверждение 1

Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — подмножества множества S. Тогда

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = |A_1| + \ldots + |A_n| - \\ - |A_1 \cap A_2| - \ldots - |A_{n-1} \cap A_n| + \ldots \\ + \ldots + (-1)^{n-1}(A_1 \cap \ldots \cap A_n)$$

Пусть $N(\alpha_i) = |A_i|$, тогда $N(\alpha_i, \alpha_j) = |A_i \cap A_j|$ и
$N(\alpha'_1, \ldots \alpha'_n) = |\overline{A_1} \cap \ldots \cap \overline{A_n}| = |S| - |A_1 \cup \ldots \cup A_n|$
Подставим все в формулу 1, сократим и получим искомое.

Следствие из принципа включения-исключения

Пусть в принципе включения-исключения свойства $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ таковы, что $N(\alpha_i) = N_1$, $N(\alpha_i, \alpha_j) = N_2$, ..., $N(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = N_n$, то есть мощности множеств не зависят от самих свойств, а только от их количества. Обозначим через N' количество элементов, которые не зависят ни от одного из свойств.

(2)

Следствие из принципа включения-исключения

Пусть в принципе включения-исключения свойства $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ таковы, что $N(\alpha_i) = N_1$, $N(\alpha_i, \alpha_j) = N_2$, ..., $N(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = N_n$, то есть мощности множеств не зависят от самих свойств, а только от их количества. Обозначим через N' количество элементов, которые не зависят ни от одного из свойств. Тогда формула

$$N(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) = \\ N - (N(\alpha_1) + N(\alpha_2) + \ldots + N(\alpha_n)) + \\ (N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + \ldots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n)) + \\ \ldots + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

превратится в

(2)

Следствие из принципа включения-исключения

Пусть в принципе включения-исключения свойства $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ таковы, что $N(\alpha_i) = N_1$, $N(\alpha_i, \alpha_j) = N_2$, ..., $N(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = N_n$, то есть мощности множеств не зависят от самих свойств, а только от их количества. Обозначим через N' количество элементов, которые не зависят ни от одного из свойств. Тогда формула

$$N(\alpha'_1, \ldots, \alpha'_n) = \\ N - (N(\alpha_1) + N(\alpha_2) + \ldots + N(\alpha_n)) + \\ (N(\alpha_1, \alpha_2) + N(\alpha_1, \alpha_3) + \ldots + N(\alpha_{n-1}, \alpha_n)) + \\ \ldots + (-1)^n N(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$$

превратится в

$$N' = N - C_n^1 N_1 + C_n^2 N_2 + \ldots + (-1)^n C_n^n N_n \qquad (2)$$

Число сюръекций

Теорема 2

Пусть $|A| = k$, $|B| = n$, $S = \{f : A \to B$ – сюръекция $\}$. Тогда

$$|S| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i \cdot i^k$$

Число сюръекций

Теорема 2

Пусть $|A| = k$, $|B| = n$, $S = \{f\colon A \to B$ – сюръекция $\}$. Тогда

$$|S| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i \cdot i^k$$

Воспользуемся методом включения-исключения. Пусть $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Будем считать, что отображение $f\colon A \to B$ обладает свойством α_j, если у элемента b_j нет прообраза при отображении f. Тогда ясно, что отображение, которое не удовлетворяют ни одному из свойств, является сюръекцией.

Число сюръекций

Теорема 2

Пусть $|A| = k$, $|B| = n$, $S = \{f\colon A \to B$ – сюръекция $\}$. Тогда

$$|S| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i \cdot i^k$$

Воспользуемся методом включения-исключения. Пусть $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Будем считать, что отображение $f\colon A \to B$ обладает свойством α_j, если у элемента b_j нет прообраза при отображении f. Тогда ясно, что отображение, которое не удовлетворяют ни одному из свойств, является сюръекцией. Найдем число N_i — число отображений $f\colon A \to B \setminus Y$, где $|Y| = i$. Оно равно $(n-i)^k$. Подставим в формулу 2 и получим:

$$|S| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} C_n^i \cdot (n-i)^k$$

Число сюръекций

Теорема 2

Пусть $|A| = k$, $|B| = n$, $S = \{f\colon A \to B$ – сюръекция $\}$. Тогда

$$|S| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} C_n^i \cdot i^k$$

Воспользуемся методом включения-исключения. Пусть $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$. Будем считать, что отображение $f\colon A \to B$ обладает свойством α_j, если у элемента b_j нет прообраза при отображении f. Тогда ясно, что отображение, которое не удовлетворяют ни одному из свойств, является сюръекцией. Найдем число N_i — число отображений $f\colon A \to B \setminus Y$, где $|Y| = i$. Оно равно $(n-i)^k$. Подставим в формулу 2 и получим:

$$|S| = \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} C_n^i \cdot (n-i)^k$$

Чтобы получить искомую формулу, нужно сделать замену $j = n - i$.

Функция Эйлера

Определение

Функцией Эйлера называется отображение $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, где $\varphi(n)$ — число чисел меньших n, которые взаимнопросты с n.

Функция Эйлера

Определение

Функцией Эйлера называется отображение $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, где $\varphi(n)$ — число чисел меньших n, которые взаимнопросты с n.

Теорема 3

Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ — разложение числа n на простые делители. Тогда

$$\varphi(n) = n \prod_{i=1}^{k} (1 - \frac{1}{p_i})$$

Разбиения множества на n частей

Определение

Числом Стирлинга 2-го рода называется число $S(k, n)$ разбиений k-элементного множества на n частей.

Пример

$S(3, 2) = 3$, так как соответствующие разбиения

$$\{\{1\}, \{2, 3\}\}, \quad \{\{2\}, \{1, 3\}\}, \quad \{\{3\}, \{1, 2\}\}$$

Число Стирлинга 2-го рода

Следствие 1

$$S(k,n) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i \cdot i^k$$

Число Стирлинга 2-го рода

Следствие 1

$$S(k,n) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i \cdot i^k$$

Пусть $A = \{1,\ldots,k\}$, $B = \{1,\ldots,n\}$. Рассмотрим сюръекцию $f\colon A \to B$ и следующее отношение эквивалентности на A: $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Так как f — сюръекция, то такое отношение эквивалентности задает разбиение на множестве A, в котором ровно n множеств.

Число Стирлинга 2-го рода

Следствие 1

$$S(k,n) = \frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}C_n^i \cdot i^k$$

Пусть $A = \{1,\ldots,k\}$, $B = \{1,\ldots,n\}$. Рассмотрим сюръекцию $f\colon A \to B$ и следующее отношение эквивалентности на A: $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$. Так как f — сюръекция, то такое отношение эквивалентности задает разбиение на множестве A, в котором ровно n множеств. Если в разбиении поменять классы местами, то разбиение не изменится, а отображение станет другим. Следовательно, число сюръекций в $n!$ раз больше $S(k,n)$. Откуда получим нужную формулу.

Числа Белла

Определение

Числом Белла B_k называется число всех неупорядоченных разбиений k-элементного множества.

Числа Белла

Определение

Числом Белла B_k называется число всех неупорядоченных разбиений k-элементного множества.

$B_k = \sum_{n=0}^{k} S(k, n)$

Числа Белла

Определение

Числом Белла B_k называется число всех неупорядоченных разбиений k-элементного множества.

$B_k = \sum_{n=0}^{k} S(k, n)$

Упражнение. Докажите, что

- $S(k+1, n) = nS(k, n) + S(k, n-1)$;
- $B_{k+1} = \sum_{n=0}^{k} C_k^n B_n$