

Биномиальные коэффициенты и числа Каталана

Михайлова Инна Анатольевна

Институт математики и естественных наук.
Кафедра алгебры и фундаментальной информатики.

25 сентября 2018 г.

Биномиальные коэффициенты

Определение

Биномиальным коэффициентом C_n^k называется число способов выбрать k -элементное подмножество (неупорядоченный набор из k элементов) в n -элементном множестве.

Биномиальные коэффициенты

Определение

Биномиальным коэффициентом C_n^k называется число способов выбрать k -элементное подмножество (неупорядоченный набор из k элементов) в n -элементном множестве.

Свойства биномиальных коэффициентов:

$$(1) C_n^k = C_n^{n-k}$$

Биномиальные коэффициенты

Определение

Биномиальным коэффициентом C_n^k называется число способов выбрать k -элементное подмножество (неупорядоченный набор из k элементов) в n -элементном множестве.

Свойства биномиальных коэффициентов:

(1) $C_n^k = C_n^{n-k}$

Следует из того, что $f(A) = \bar{A}$ — биекция, т.е. можно выбирать не само множество, а его дополнение;

(2) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

Определение

Биномиальным коэффициентом C_n^k называется число способов выбрать k -элементное подмножество (неупорядоченный набор из k элементов) в n -элементном множестве.

Свойства биномиальных коэффициентов:

(1) $C_n^k = C_n^{n-k}$

Следует из того, что $f(A) = \bar{A}$ — биекция, т.е. можно выбирать не само множество, а его дополнение;

(2) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

Выделим в исходном множестве элемент, тогда k -элементное подмножество либо его содержит (и останется выбрать еще $k - 1$ элемент), либо не содержит;

Свойства биномиальных коэффициентов. Бином Ньютона

(3) Бином Ньютона

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$$

Свойства биномиальных коэффициентов. Бином Ньютона

(3) Бином Ньютона

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$$

Чтобы доказать равенство "раскроем скобки". Ясно, что каждое слагаемое будет иметь вид $x^k y^{n-k}$, где $k = 0, \dots, n$. Остается найти число таких слагаемых для каждого k : оно равно количеству способов выбрать k множителей, из которых мы будем выбирать x , т.е. C_n^k .

$$(4) C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$$

Свойства биномиальных коэффициентов. Бином Ньютона

(3) Бином Ньютона

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k y^{n-k}$$

Чтобы доказать равенство "раскроем скобки". Ясно, что каждое слагаемое будет иметь вид $x^k y^{n-k}$, где $k = 0, \dots, n$. Остается найти число таких слагаемых для каждого k : оно равно количеству способов выбрать k множителей, из которых мы будем выбирать x , т.е. C_n^k .

(4) $C_n^0 + C_n^1 + \dots + C_n^n = 2^n$

Так как C_n^k — число k -элементных подмножеств, то слева написано число всех подмножеств n -элементного множества, т.е. 2^n .

(5)

$$\sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2m+1} = \sum_{m=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} C_n^{2m}$$

$$(6) \sum_{k=0}^n k C_n^k = n 2^{n-1}$$

Свойства биномиальных коэффициентов

(6) $\sum_{k=0}^n k C_n^k = n 2^{n-1}$

Заметим, что каждое слагаемое слева — это

$|B_k| \cdot |\{B_k \mid |B_k| = k\}|$. Поэтому сумма слева равна $\sum_{B \subseteq \{1 \dots n\}} |B|$ — сумма количества элементов во всех подмножествах n -элементного множества.

Свойства биномиальных коэффициентов

$$(6) \sum_{k=0}^n k C_n^k = n 2^{n-1}$$

Заметим, что каждое слагаемое слева — это

$|B_k| \cdot |\{B_k \mid |B_k| = k\}|$. Поэтому сумма слева равна $\sum_{B \subseteq \{1 \dots n\}} |B|$ — сумма количества элементов во всех подмножествах n -элементного множества. Так как $f : B \rightarrow \bar{B}$ — биекция, то

$$\sum_{B \subseteq \{1 \dots n\}} |B| = \frac{1}{2} \sum_{B \subseteq \{1 \dots n\}} (|B| + |\bar{B}|) = n \cdot 2^{n-1}$$

Свойства биномиальных коэффициентов

$$(6) \sum_{k=0}^n k C_n^k = n 2^{n-1}$$

Заметим, что каждое слагаемое слева — это

$|B_k| \cdot |\{B_k \mid |B_k| = k\}|$. Поэтому сумма слева равна $\sum_{B \subseteq \{1 \dots n\}} |B|$ — сумма количества элементов во всех подмножествах n -элементного множества. Так как $f : B \rightarrow \bar{B}$ — биекция, то

$$\sum_{B \subseteq \{1 \dots n\}} |B| = \frac{1}{2} \sum_{B \subseteq \{1 \dots n\}} (|B| + |\bar{B}|) = n \cdot 2^{n-1}$$

Упражнение. Докажите, что

$$① \quad C_{2n}^n = \sum_{m=0}^n C_n^m C_n^{n-m}$$

$$② \quad C_n^k C_k^m = C_n^m C_{n-m}^{k-m}$$

Свойства биномиальных коэффициентов.

Полиномиальные коэффициенты

(7)

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_n = n} P_{k_1, k_2, \dots, k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n},$$

где $P_{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!}.$

Свойства биномиальных коэффициентов.

Полиномиальные коэффициенты

(7)

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \dots + k_n = n} P_{k_1, k_2, \dots, k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n},$$

где $P_{k_1, k_2, \dots, k_n} = \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_n!}$.

Аналогично доказательству бинома, чтобы найти коэффициент перед произведением $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ нужно посчитать количество способов выбрать k_1 скобок, из которых будем брать x_1 , потом из оставшихся k_2 скобок, из которых будем брать x_2 и т.д. Это число равно $C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} \dots C_{n-k_1-\dots-k_i}^{k_{i+1}} \dots$

Свойства биномиальных коэффициентов.

Полиномиальные коэффициенты

(7)

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n)^n = \sum_{k_1+k_2+\dots+k_n=n} P_{k_1,k_2,\dots,k_n} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \dots x_n^{k_n},$$

где $P_{k_1,k_2,\dots,k_n} = \frac{n!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$.

Аналогично доказательству бинума, чтобы найти коэффициент перед произведением $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$ нужно посчитать количество способов выбрать k_1 скобок, из которых будем брать x_1 , потом из оставшихся k_2 скобок, из которых будем брать x_2 и т.д. Это число равно $C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} \dots C_{n-k_1-\dots-k_i}^{k_{i+1}} \dots$. Это число можно посчитать другим способом: на самом деле мы выбираем кортеж из n элементов, в котором есть k_1 элементов первого сорта, k_2 второго и т.д. Отсюда мы и получаем знакомую нам формулу перестановок с повторениями.

Формула сочетаний с повторениями

Задача

Пусть имеются предметы k типов. Сколькими способами можно составить коллекцию из n предметов, используя для составления только те типы предметов, которые есть в наличии?

Формула сочетаний с повторениями

Задача

Пусть имеются предметы k типов. Сколькими способами можно составить коллекцию из n предметов, используя для составления только те типы предметов, которые есть в наличии?

Ясно, что однотипные предметы между собой неотличимы. Поэтому рассмотрим какой-нибудь набор из n предметов и закодируем его следующим образом: 110111001011. В примере $k = 5$, $n = 8$. Здесь 1 обозначает предмет, а 0 отделяет предметы одного типа от другого. В примере взято 2 элемента первого типа, 3 — второго, 0 — третьего, 1 — четвертого и 2 — пятого.

Формула сочетаний с повторениями

Задача

Пусть имеются предметы k типов. Сколькими способами можно составить коллекцию из n предметов, используя для составления только те типы предметов, которые есть в наличии?

Ясно, что однотипные предметы между собой неотличимы. Поэтому рассмотрим какой-нибудь набор из n предметов и закодируем его следующим образом: 110111001011. В примере $k = 5$, $n = 8$. Здесь 1 обозначает предмет, а 0 отделяет предметы одного типа от другого. В примере взято 2 элемента первого типа, 3 — второго, 0 — третьего, 1 — четвертого и 2 — пятого.

Ясно, что отображение из множества различных способов выбрать нужное число предметов в такие последовательности из 0 и 1 является биекцией. Осталось посчитать количество наборов. Всего в них n единиц и $k - 1$ нулей. Число всевозможных наборов равно количеству способов выбрать $k - 1$ позицию для нулей.

Отсюда

$$\overline{C}_n^k = C_{n+k-1}^{k-1}$$

Число решений диофантового уравнения

Утверждение 1

Пусть $n \geq 0$, тогда число целочисленных неотрицательных решений уравнения

$$x_0 + x_1 + \dots + x_k = n$$

равно C_{n+k}^k .

Число решений диофантового уравнения

Утверждение 1

Пусть $n \geq 0$, тогда число целочисленных неотрицательных решений уравнения

$$x_0 + x_1 + \dots + x_k = n$$

равно C_{n+k}^k .

Каждое решение это набор чисел $(s_0, s_1, \dots, s_k)$. Можно считать, что у нас есть предметы $k + 1$ типа и мы должны выбрать из них набор из n предметов. Тогда задача сводится к формуле сочетаний с повторениями $\overline{C}_n^{k+1} = C_{n+k}^k$.

Число путей в решетке $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Число путей в решетке $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Рассмотрим сетку, узлами которой являются всевозможные пары целых чисел (k, n) , $k, n \in \mathbb{Z}$. Пусть $k \geq p$, $n \geq r$ тогда **путем** из точки (p, r) в точку (k, m) называется путь по ребрам решетки, каждый участок которого либо ведет $(m, s) \rightarrow (m + 1, s)$ вверх $\uparrow$, либо $(m, s) \rightarrow (m, s + 1)$ вправо $\rightarrow$.

Число путей в решетке $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Рассмотрим сетку, узлами которой являются всевозможные пары целых чисел (k, n) , $k, n \in \mathbb{Z}$. Пусть $k \geq p$, $n \geq r$ тогда **путем** из точки (p, r) в точку (k, m) называется путь по ребрам решетки, каждый участок которого либо ведет $(m, s) \rightarrow (m + 1, s)$ вверх $\uparrow$, либо $(m, s) \rightarrow (m, s + 1)$ вправо $\rightarrow$.

Утверждение 2

Число путей из точки $(0, 0)$ в точку (m, n) в решетке $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ равно C_{n+m}^n .

Число путей в решетке $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$

Рассмотрим сетку, узлами которой являются всевозможные пары целых чисел (k, n) , $k, n \in \mathbb{Z}$. Пусть $k \geq p$, $n \geq r$ тогда **путем** из точки (p, r) в точку (k, m) называется путь по ребрам решетки, каждый участок которого либо ведет $(m, s) \rightarrow (m + 1, s)$ вверх $\uparrow$, либо $(m, s) \rightarrow (m, s + 1)$ вправо $\rightarrow$.

Утверждение 2

Число путей из точки $(0, 0)$ в точку (m, n) в решетке $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ равно C_{n+m}^n .

Каждый путь — это последовательность $n + m$ шагов, каждый шаг — это либо $\uparrow$, либо $\rightarrow$.

Число наддиагональных путей в целочисленной решетке

Путь из точки $(0, 0)$ в (n, n) называется **наддиагональным**, если он проходит только через точки вида (k, s) , где $k \geq s$.

Утверждение 3

Число наддиагональных путей в целочисленной решетке из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) равно $\frac{1}{n+1} C_{2n}^n$

Число наддиагональных путей в целочисленной решетке

Путь из точки $(0, 0)$ в (n, n) называется **наддиагональным**, если он проходит только через точки вида (k, s) , где $k \geq s$.

Утверждение 3

Число наддиагональных путей в целочисленной решетке из точки $(0, 0)$ в точку (n, n) равно $\frac{1}{n+1} C_{2n}^n$

Будем называть путь из $(0, 0)$ в (n, n) "плохим", если он проходит через хотя бы одну точку (k, s) , где $k < s$. Обозначим через B множество всех "плохих" путей, а через U — множество всех путей. Тогда число наддиагональных путей равно $|U| - |B|$. Из утверждения 2 получаем $|U| = C_{2n}^n$.

Число наддиагональных путей в целочисленной решетке

Найдем число "плохих" путей. Рассмотрим произвольный такой путь и закодируем его 0 и 1 по правилу 0 соответствует шагу $\rightarrow$, 1 — $\uparrow$. Получим последовательность $a_0 a_1 \dots a_{2n}$ из n нулей и n единиц.

Число наддиагональных путей в целочисленной решетке

Найдем число "плохих" путей. Рассмотрим произвольный такой путь и закодируем его 0 и 1 по правилу 0 соответствует шагу $\rightarrow$, 1 — $\uparrow$. Получим последовательность $a_0 a_1 \dots a_{2n}$ из n нулей и n единиц. Найдем наименьшее число m такое, что в нашем пути есть шаг $(m, m) \rightarrow (m, m+1)$, этот шаг соответствует a_{2m+1} . Обозначим $\bar{0} = 1, \bar{1} = 0$.

Число наддиагональных путей в целочисленной решетке

Найдем число "плохих" путей. Рассмотрим произвольный такой путь и закодируем его 0 и 1 по правилу 0 соответствует шагу $\rightarrow$, 1 — $\uparrow$.

Получим последовательность $a_0 a_1 \dots a_{2n}$ из n нулей и n единиц.

Найдем наименьшее число m такое, что в нашем пути есть шаг $(m, m) \rightarrow (m, m+1)$, этот шаг соответствует a_{2m+1} . Обозначим $\overline{0} = 1, \overline{1} = 0$.

Построим отображение f по правилу:

$$f(a_0 a_1 \dots a_{2m} a_{2m+1} a_{2m+2} \dots a_{2n}) = \overline{a_0} \cdot \overline{a_1} \dots \overline{a_{2m}} \cdot \overline{a_{2m+1}} a_{2m+2} \dots a_{2n}.$$

Это отображение $f: B \rightarrow C$, где C — множество всех последовательностей из $n-1$ нулей и $n+1$ единицы.

Число наддиагональных путей в целочисленной решетке

Найдем число "плохих" путей. Рассмотрим произвольный такой путь и закодируем его 0 и 1 по правилу 0 соответствует шагу $\rightarrow$, 1 — $\uparrow$.

Получим последовательность $a_0 a_1 \dots a_{2n}$ из n нулей и n единиц.

Найдем наименьшее число m такое, что в нашем пути есть шаг $(m, m) \rightarrow (m, m+1)$, этот шаг соответствует a_{2m+1} . Обозначим $\overline{0} = 1, \overline{1} = 0$.

Построим отображение f по правилу:

$$f(a_0 a_1 \dots a_{2m} a_{2m+1} a_{2m+2} \dots a_{2n}) = \overline{a_0} \cdot \overline{a_1} \dots \overline{a_{2m}} \cdot \overline{a_{2m+1}} a_{2m+2} \dots a_{2n}.$$

Это отображение $f: B \rightarrow C$, где C — множество всех последовательностей из $n-1$ нулей и $n+1$ единицы.

Это отображение является инъекцией, так как если два пути различны, то их кодировки различны.

Число наддиагональных путей в целочисленной решетке

Найдем число "плохих" путей. Рассмотрим произвольный такой путь и закодируем его 0 и 1 по правилу 0 соответствует шагу $\rightarrow$, 1 — $\uparrow$. Получим последовательность $a_0 a_1 \dots a_{2n}$ из n нулей и n единиц. Найдем наименьшее число m такое, что в нашем пути есть шаг $(m, m) \rightarrow (m, m+1)$, этот шаг соответствует a_{2m+1} . Обозначим $\bar{0} = 1, \bar{1} = 0$.

Построим отображение f по правилу:

$$f(a_0 a_1 \dots a_{2m} a_{2m+1} a_{2m+2} \dots a_{2n}) = \bar{a}_0 \cdot \bar{a}_1 \dots \bar{a}_{2m} \cdot \bar{a}_{2m+1} a_{2m+2} \dots a_{2n}.$$

Это отображение $f: B \rightarrow C$, где C — множество всех последовательностей из $n-1$ нулей и $n+1$ единицы.

Это отображение является инъекцией, так как если два пути различны, то их кодировки различны. Это отображение является сюръекцией, так как для каждой последовательности из $n+1$ единиц и $n-1$ нуля найдется такое число (наименьшее) s , что число единиц в ее подпоследовательности $a_0 a_1 \dots a_s$ равно $m+1$, а нулей m . Ясно, что $a_s = 1$ и тогда $s = 2m+1$.

Число наддиагональных путей в целочисленной решетке

Найдем число "плохих" путей. Рассмотрим произвольный такой путь и закодируем его 0 и 1 по правилу 0 соответствует шагу $\rightarrow$, 1 — $\uparrow$. Получим последовательность $a_0 a_1 \dots a_{2n}$ из n нулей и n единиц. Найдем наименьшее число m такое, что в нашем пути есть шаг $(m, m) \rightarrow (m, m+1)$, этот шаг соответствует a_{2m+1} . Обозначим $\overline{0} = 1, \overline{1} = 0$.

Построим отображение f по правилу:

$$f(a_0 a_1 \dots a_{2m} a_{2m+1} a_{2m+2} \dots a_{2n}) = \overline{a_0} \cdot \overline{a_1} \dots \overline{a_{2m}} \cdot \overline{a_{2m+1}} a_{2m+2} \dots a_{2n}.$$

Это отображение $f: B \rightarrow C$, где C — множество всех последовательностей из $n-1$ нулей и $n+1$ единицы.

Это отображение является инъекцией, так как если два пути различны, то их кодировки различны. Это отображение является сюръекцией, так как для каждой последовательности из $n+1$ единиц и $n-1$ нуля найдется такое число (наименьшее) s , что число единиц в ее подпоследовательности $a_0 a_1 \dots a_s$ равно $m+1$, а нулей m . Ясно, что $a_s = 1$ и тогда $s = 2m+1$. Тогда в первых $2m+1$ элементе последовательности $\overline{a_0} \dots \overline{a_{2m}} \overline{a_{2m+1}} a_{2m+2} \dots a_{2n}$ нулей больше, чем единиц. Следовательно, прообраз является "плохим" путем.

Итак, $|C| = C_{2n}^{n-1} = |B|$. Следовательно, число наддиагональных путей равно

$$C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

Итак, $|C| = C_{2n}^{n-1} = |B|$. Следовательно, число наддиагональных путей равно

$$C_{2n}^n - C_{2n}^{n-1} = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$$

Определение

Числами Каталана называются $C_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n$

Число правильных скобочных последовательностей

Последовательность из n открывающихся и n закрывающихся скобок называется **правильной**, если в любой ее начальной подпоследовательности открывающихся скобок больше, чем закрывающихся.

Утверждение 4

Число правильных скобочных последовательностей из n пар скобок равно C_n .

Число правильных скобочных последовательностей

Последовательность из n открывающихся и n закрывающихся скобок называется **правильной**, если в любой ее начальной подпоследовательности открывающихся скобок больше, чем закрывающихся.

Утверждение 4

Число правильных скобочных последовательностей из n пар скобок равно C_n .

Каждой правильной скобочной последовательности сопоставим путь в целочисленной решетке, где '(' будет соответствовать шагу $\uparrow$, а ')' — шагу $\rightarrow$.

Число правильных скобочных последовательностей

Последовательность из n открывающихся и n закрывающихся скобок называется **правильной**, если в любой ее начальной подпоследовательности открывающихся скобок больше, чем закрывающихся.

Утверждение 4

Число правильных скобочных последовательностей из n пар скобок равно C_n .

Каждой правильной скобочной последовательности сопоставим путь в целочисленной решетке, где '(' будет соответствовать шагу $\uparrow$, а ')' — шагу $\rightarrow$.

Упражнение. Докажите, что число всех бинарных деревьев с $n + 1$ листом равно C_n .

Утверждение 5

Числа Каталана удовлетворяют соотношению

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot C_{n-1-i}, C_0 = 1$$

Утверждение 5

Числа Каталана удовлетворяют соотношению

$$C_n = \sum_{i=0}^{n-1} C_i \cdot C_{n-1-i}, C_0 = 1$$

Рассмотрим правильную скобочную последовательность. Она начнется с открывающей скобки. Найдем соответствующую закрывающую: $(Z_1)Z_2$. Очевидно, что последовательности Z_1, Z_2 правильные. Пусть в Z_1 i пар скобок, тогда в Z_2 останется $n - 1 - i$ пар. Тогда существует C_i способов построить последовательность Z_1 и C_{n-1-i} способов построить Z_2 . Тогда $C_i C_{n-1-i}$ — количество способов построить последовательность вида $(Z_1)Z_2$. Соотношение для чисел Каталана получается из принципа суммы.

Число триангуляций выпуклого $(n + 2)$ -угольника

Триангуляцией называется разбиение выпуклого многоугольника на треугольники, вершинами которых являются вершины многоугольника.

Утверждение 6

Число триангуляций выпуклого $(n + 2)$ -угольника T_{n+2} равно C_n ($n \geq 1$).

Число триангуляций выпуклого $(n + 2)$ -угольника

Утверждение 6

Число триангуляций выпуклого $(n + 2)$ -угольника T_{n+2} равно C_n ($n \geq 1$).

Докажем утверждение по индукции по n . Будем считать, что $T_2 = 1$.
Очевидно, что $T_3 = 1$.

Число триангуляций выпуклого $(n + 2)$ -угольника

Утверждение 6

Число триангуляций выпуклого $(n + 2)$ -угольника T_{n+2} равно C_n ($n \geq 1$).

Докажем утверждение по индукции по n . Будем считать, что $T_2 = 1$. Очевидно, что $T_3 = 1$.

Рассмотрим выпуклый $(n + 2)$ -угольник и зафиксируем одну сторону d . Эта сторона принадлежит одному из треугольников $\triangle$ триангуляции, проведем соответствующие диагонали, которые выходят из одной вершины.

Число триангуляций выпуклого $(n + 2)$ -угольника

Утверждение 6

Число триангуляций выпуклого $(n + 2)$ -угольника T_{n+2} равно C_n ($n \geq 1$).

Докажем утверждение по индукции по n . Будем считать, что $T_2 = 1$. Очевидно, что $T_3 = 1$.

Рассмотрим выпуклый $(n + 2)$ -угольник и зафиксируем одну сторону d . Эта сторона принадлежит одному из треугольников $\triangle$ триангуляции, проведем соответствующие диагонали, которые выходят из одной вершины.

Этими диагоналями он разобьется на два выпуклых многоугольника, в одном из которых $i + 2$ вершины (если $i = 0$, то треугольник образован двумя сторонами многоугольника), а во втором $n + 2 - i - 1$.

Число триангуляций выпуклого $(n + 2)$ -угольника

Утверждение 6

Число триангуляций выпуклого $(n + 2)$ -угольника T_{n+2} равно C_n ($n \geq 1$).

Докажем утверждение по индукции по n . Будем считать, что $T_2 = 1$. Очевидно, что $T_3 = 1$.

Рассмотрим выпуклый $(n + 2)$ -угольник и зафиксируем одну сторону d . Эта сторона принадлежит одному из треугольников $\triangle$ триангуляции, проведем соответствующие диагонали, которые выходят из одной вершины.

Этими диагоналями он разобьется на два выпуклых многоугольника, в одном из которых $i + 2$ вершины (если $i = 0$, то треугольник образован двумя сторонами многоугольника), а во втором $n + 2 - i - 1$. Тогда первый имеет C_i триангуляций, а второй C_{n-1-i} . Тогда количество триангуляций исходного многоугольника, в которые входит треугольник $\triangle$, содержащий сторону d , равна $C_i C_{n-1-i}$.

Тогда $T_{n+2} = \sum_{i=0}^{n-1} C_i C_{n-1-i} = C_n$