Основы комбинаторики

Михайлова Инна Анатольевна

Институт математики и естественных наук.
Кафедра алгебры и фундаментальной информатики.

21 сентября 2018 г.

Задача

Задача

Дано конечное множество A. Найти $|A|$.

Задача

Задача

Дано конечное множество A. Найти $|A|$.

Решение

Найти множество B такое, что $|B|$ — известно (или считается проще, чем $|A|$). Построить биекцию $f\colon A \to B$, чтобы доказать, что $|A| = |B|$.

Размещения, сочетания, перестановки

Пример

1. Сколькими способами в группе из n студентов можно выбрать k человек, которые будут отчислены?

Размещения, сочетания, перестановки

Пример

1. Сколькими способами в группе из n студентов можно выбрать k человек, которые будут отчислены?
2. Сколькими способами можно выбрать n студентов можно выбрать k человек, которые будут получать стипендию, размер которой зависит от номера студента в списке?

Размещения, сочетания, перестановки

Пример

1. Сколькими способами в группе из n студентов можно выбрать k человек, которые будут отчислены?
2. Сколькими способами можно выбрать n студентов можно выбрать k человек, которые будут получать стипендию, размер которой зависит от номера студента в списке?
3. Сколькими способами можно составить список из n студентов?

Размещения, сочетания, перестановки

Пример

1. Сколькими способами в группе из n студентов можно выбрать k человек, которые будут отчислены?
2. Сколькими способами можно выбрать n студентов можно выбрать k человек, которые будут получать стипендию, размер которой зависит от номера студента в списке?
3. Сколькими способами можно составить список из n студентов?

Сочетания, размещения, перестановки

1. Выбираем из n-элементного множества его k-элементное подмножество (сочетание): $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Размещения, сочетания, перестановки

Пример

1. Сколькими способами в группе из n студентов можно выбрать k человек, которые будут отчислены?
2. Сколькими способами можно выбрать n студентов можно выбрать k человек, которые будут получать стипендию, размер которой зависит от номера студента в списке?
3. Сколькими способами можно составить список из n студентов?

Сочетания, размещения, перестановки

1. Выбираем из n-элементного множества его k-элементное подмножество (сочетание): $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
2. Выбираем кортеж из k различных элементов n-элементного множества (размещение): $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$

Размещения, сочетания, перестановки

Пример

1. Сколькими способами в группе из n студентов можно выбрать k человек, которые будут отчислены?
2. Сколькими способами можно выбрать n студентов можно выбрать k человек, которые будут получать стипендию, размер которой зависит от номера студента в списке?
3. Сколькими способами можно составить список из n студентов?

Сочетания, размещения, перестановки

1. Выбираем из n-элементного множества его k-элементное подмножество (сочетание): $C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$
2. Выбираем кортеж из k различных элементов n-элементного множества (размещение): $A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}$
3. Выбираем перестановку — упорядоченный набор из n элементов: $P_n = n!$

Размещения и перестановки с повторениями

Пример

1. Сколько существует различных k-значных PIN кодов из n символов?

Размещения и перестановки с повторениями

Пример

1. Сколько существует различных k-значных PIN кодов из n символов?
2. Аня забыла свой пароль из n символов, она помнит только что в нем было k_1 букв a_1, k_2 букв a_2, $\ldots, k_s$ букв a_s $(k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n)$. Сколько различных паролей с таким условием существует?

Размещения и перестановки с повторениями

Пример

1. Сколько существует различных k-значных PIN кодов из n символов?
2. Аня забыла свой пароль из n символов, она помнит только что в нем было k_1 букв a_1, k_2 букв a_2, $\ldots, k_s$ букв a_s $(k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n)$. Сколько различных паролей с таким условием существует?

1. Число размещений (упорядоченных наборов) с повторениями равно $\overline{A}_n^k = n^k$;

Размещения и перестановки с повторениями

Пример

1. Сколько существует различных k-значных PIN кодов из n символов?
2. Аня забыла свой пароль из n символов, она помнит только что в нем было k_1 букв a_1, k_2 букв a_2, $\ldots$, k_s букв a_s $(k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n)$. Сколько различных паролей с таким условием существует?

1. Число размещений (упорядоченных наборов) с повторениями равно $\overline{A}_n^k = n^k$;
2. Число перестановок с повторениями равно $P_{k_1,k_2,\ldots,k_n} = \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_s!}$

Число отображений и инъекций

Утверждение 1

Пусть $|A| = k$, $|B| = n$. Тогда существует n^k различных отображений из A в B.

Число отображений и инъекций

Утверждение 1

Пусть $|A| = k$, $|B| = n$. Тогда существует n^k различных отображений из A в B.

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ и $f\colon A \to B$ — отображение. Тогда его можно задать кортежем $(f(a_1), \ldots, f(a_k))$, где $f(a_i) \in B$. Таких кортежей n^k.

Число отображений и инъекций

Утверждение 1

Пусть $|A| = k$, $|B| = n$. Тогда существует n^k различных отображений из A в B.

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ и $f\colon A \to B$ — отображение. Тогда его можно задать кортежем $(f(a_1), \ldots, f(a_k))$, где $f(a_i) \in B$. Таких кортежей n^k.

Утверждение 2

Пусть $|A| = k$, $|B| = n$. Существует A_n^k различных инъекций из A в B.

Число отображений и инъекций

Утверждение 1

Пусть $|A| = k$, $|B| = n$. Тогда существует n^k различных отображений из A в B.

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ и $f\colon A \to B$ — отображение. Тогда его можно задать кортежем $(f(a_1), \ldots, f(a_k))$, где $f(a_i) \in B$. Таких кортежей n^k.

Утверждение 2

Пусть $|A| = k$, $|B| = n$. Существует A_n^k различных инъекций из A в B.

Пусть $A = \{a_1, \ldots, a_k\}$ и $f\colon A \to B$ — инъекция. Тогда ее можно задать кортежем $(f(a_1), \ldots, f(a_k))$, где $f(a_i) \in B$ все различны. Тогда ясно, что число таких кортежей равно A_n^k.

Правило суммы и произведения

Правило суммы

Пусть множество A можно разбить на непересекающиеся классы, тогда число объектов в A равняется сумме объектов во всех классах.

Правило суммы и произведения

Правило суммы

Пусть множество A можно разбить на непересекающиеся классы, тогда число объектов в A равняется сумме объектов во всех классах.

Правило произведения

Пусть мы хотим составить комбинацию из двух элементов, первый из которых выбирается из n-элементного множества A, а второй — из k-элементного множества B, причем после выбора первого объекта второй объект можно выбрать любым из множества B. Тогда число таких комбинаций равно nk.

Правило суммы и произведения

Правило суммы

Пусть множество A можно разбить на непересекающиеся классы, тогда число объектов в A равняется сумме объектов во всех классах.

Правило произведения

Пусть мы хотим составить комбинацию из двух элементов, первый из которых выбирается из n-элементного множества A, а второй — из k-элементного множества B, причем после выбора первого объекта второй объект можно выбрать любым из множества B. Тогда число таких комбинаций равно nk.

Пример

Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было бы приложить друг к другу?

Пример

Пример

Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было бы приложить друг к другу?

Пример

Пример

Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было бы приложить друг к другу?

Сначала выберем произвольную кость. Ясно, что если эта кость вида nn, где $n \in 0 \ldots 6$, то вторая кость может быть только вида nm, где $m \neq n$. Пользуясь правилом произведения получаем, что число пар (nn, nm) равно $7 \cdot 6$.

Пример

Пример

Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было бы приложить друг к другу?

Сначала выберем произвольную кость. Ясно, что если эта кость вида nn, где $n \in 0 \ldots 6$, то вторая кость может быть только вида nm, где $m \neq n$. Пользуясь правилом произведения получаем, что число пар (nn, nm) равно $7 \cdot 6$.
Если же первая кость вида mn, где $n \neq m$ (таких костей $(7 \cdot 6)/2$), то вторая может содержать либо m, либо n (таких $2 \cdot 6$), в этом случае число пар равно $21 \cdot 12$. По правилу суммы мы получим $42 + 252 = 294$. Учитывая то, что мы пары (mn, ks) и (ks, mn) считали разными, то нужно это число разделить на $2! = 2$. Ответ 147.

Правило разности

Пусть U — универсальное множество (все возможные исходы). Тогда

$$|A| = |U| - |U \setminus A|$$

Правило разности

Пусть U — универсальное множество (все возможные исходы). Тогда

$$|A| = |U| - |U \setminus A|$$

Пример

Стрелок стреляет пять раз по пяти мишеням. Какова вероятность того, что он попадет более одного раза?
Вероятность равна $\frac{|A|}{|U|}$, где $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_i \in \{0, 1\}\}$ — множество всех возможных способов стрелять по мишеням,
$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 1\}$ — множество способов выстрелить так, чтобы попасть более одного раза.

Правило разности

Пусть U — универсальное множество (все возможные исходы). Тогда

$$|A| = |U| - |U \setminus A|$$

Пример

Стрелок стреляет пять раз по пяти мишеням. Какова вероятность того, что он попадет более одного раза?
Вероятность равна $\frac{|A|}{|U|}$, где $U = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_i \in \{0, 1\}\}$ — множество всех возможных способов стрелять по мишеням,
$A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 > 1\}$ — множество способов выстрелить так, чтобы попасть более одного раза.
Ясно, что $|U| = 2^5 = 32$. Число элементов в множестве A можно посчитать по правилу суммы: сложить количество вариантов, когда стрелок попал ровно 2 раза, ровно 3 раза, ровно 4 раза и, наконец, ровно 5 раз. Вместо этого найдем $|U \setminus A|$ — количество способов попасть 0 или ровно 1 раз. $|U \setminus A| = C_5^0 + C_5^1 = 6$. Тогда
$|A| = 32 - 6 = 26$ и вероятность равна $\frac{26}{32} = 0,8125$, т.е. больше 80%.

Принцип Дирихле

Формальная версия

Пусть $f\colon A \to B$ — отображение и $|A| > |B|$. Тогда f не является инъекцией.

Принцип Дирихле

Формальная версия

Пусть $f\colon A \to B$ — отображение и $|A| > |B|$. Тогда f не является инъекцией.

Кролики в клетке (англ. pigeon-hole principle)

Пусть у нас есть n клеток и по крайней мере $n+1$ кролик. Тогда есть клетка, в которой сидят по крайней мере 2 кролика.

Пример

Одна сложная олимпиадная задача

Даны n целых чисел. Докажите, что среди них найдется несколько (может быть только одно), сумма которых делится на n.

Пример

Одна сложная олимпиадная задача

Даны n целых чисел. Докажите, что среди них найдется несколько (может быть только одно), сумма которых делится на n.

Пусть $c_1, \ldots, c_n$ — эти числа. Рассмотрим $S_1 = c_1$, $S_2 = c_1 + c_2$, ..., $S_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$. В этом списке n сумм. Рассмотрим в качестве "клеток" остатки при делении на n. Этих остатков n штук.
Предположим, что одна из сумм имеет остаток 0 при делении на n. Но тогда задача решена и эта сумма искомая.

Пример

Одна сложная олимпиадная задача

Даны n целых чисел. Докажите, что среди них найдется несколько (может быть только одно), сумма которых делится на n.

Пусть $c_1, \ldots, c_n$ — эти числа. Рассмотрим $S_1 = c_1$, $S_2 = c_1 + c_2$, ..., $S_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n$. В этом списке n сумм. Рассмотрим в качестве "клеток" остатки при делении на n. Этих остатков n штук.
Предположим, что одна из сумм имеет остаток 0 при делении на n. Но тогда задача решена и эта сумма искомая.
Остался случай, когда ни одна из сумм не делится на n. Но тогда остатков-клеток $n - 1$. Следовательно, существуют суммы S_i и S_j, которые имеют одинаковый остаток при делении на n. Тогда (полагая $j > i$) сумма $S_j - S_i$ искомая.