Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
, , с. 1–10 *e-mail: izvuz.matem@ksu.ru*

Б. М. ВЕРНИКОВ

КОДИСТРИБУТИВНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ РЕШЕТКИ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

Аннотация. Показано, что всякое многообразие полугрупп, являющееся кодистрибутивным элементом решетки **SEM** всех многообразий полугрупп, либо совпадает с многообразием всех полугрупп, либо является многообразием полугрупп с вполне регулярным квадратом. Полностью описаны строго перестановочные многообразия, являющиеся кодистрибутивными элементами в **SEM**. Показано, что многообразие полугрупп является костандартным элементом решетки **SEM** тогда и только тогда, когда оно является нейтральным элементом этой решетки. С учетом более ранних результатов это дает полное описание костандартных элементов решетки **SEM**.

Ключевые слова: полугруппа, многообразие, решетка, кодистрибутивный элемент, костандартный элемент, нейтральный элемент.

УДК: 512.532.2

Abstract. We prove that if a semigroup variety is a codistributive element of the lattice **SEM** of all semigroup varieties then it either coincides with the variety of all semigroups or is a variety of semigroups with completely regular square. Strongly permutative varieties that are codistributive elements of **SEM** are completely classified. It is proved that a semigroup variety is a costandard element of the lattice **SEM** if and only if it is a neutral element of this lattice. In view of results obtained earlier, this gives a complete description of costandard elements of the lattice **SEM**.

Keywords: semigroup, variety, lattice, codistributive element, costandard element, neutral element.

1. Введение и формулировки основных результатов

Совокупность всех многообразий полугрупп образует решетку относительно включения. Изучение этой решетки активно ведется начиная с первой половины 1960-х годов. Систематическому обзору современного состояния дел в этой области посвящен недавний обзор [1].

В теории решеток заметное внимание уделяется изучению специальных элементов различных типов. Напомним определения тех из них, которые будут возникать в данной работе. Элемент x решетки $\langle L; \vee, \wedge \rangle$ называется *дистрибутивным*, если

$$\forall y, z \in L: \quad x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z);$$

Поступила 13.04.2010

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №№ 09-01-12142, 10-01-00524) и программы «Развитие научного потенциала высшей школы» Федерального агентства по образованию Российской Федерации (проект № 2.1.1/3537).

стандартным, если
$$\forall y,z\in L\colon\quad (x\vee y)\wedge z=(x\wedge z)\vee(y\wedge z);$$
модулярным, если
$$\forall y,z\in L\colon\quad y\le z\longrightarrow (x\vee y)\wedge z=(x\wedge z)\vee y;$$
верхнемодулярным, если
$$\forall y,z\in L\colon\quad y\le x\longrightarrow x\wedge(y\vee z)=y\vee(x\wedge z);$$
нейтральным, если для любых элементов $y,z\in L$ элементы x, y и z порождают дистрибутивную подрешетку в L.

Кодистрибутивные, *костандартные* и *нижнемодулярные* элементы определяются двойственно к дистрибутивным, стандартным и верхнемодулярным соответственно.

Обширную информацию о [ко]дистрибутивных, [ко]стандартных и нейтральных элементах, показывающую естественность и важность их изучения, можно найти, например, в § III.2 монографии [2]. Очевидно, что всякий нейтральный элемент стандартен и костандартен, всякий [ко]стандартный элемент модулярен, а всякий [ко]дистрибутивный элемент нижнемодулярен [верхнемодулярен]. Хорошо известно также, что всякий [ко]стандартный элемент [ко]дистрибутивен (доказательство этого факта можно найти, например, в [2], теорема III.2.3).

Для краткости мы будем применять прилагательные, обозначающие типы специальных элементов решеток, и к многообразиям полугрупп, являющимся элементами соответствующих типов в решетке всех полугрупповых многообразий. Именно в этом смысле мы будем говорить о *кодистрибутивных, костандартных, нейтральных* и т. п. многообразиях. В работах [3]–[12] изучались модулярные, верхнемодулярные и нижнемодулярные многообразия полугрупп. Кроме того, в [5] получено полное описание нейтральных многообразий. Отметим, что изложению результатов большей части указанных работ посвящен § 14 обзора [1]. Однако [ко]дистрибутивные и [ко]стандартные многообразия полугрупп до последнего времени в литературе не рассматривались.

Полное описание дистрибутивных многообразий полугрупп получено в недавней работе автора и В. Ю. Шапрынского [13]. Из результатов этой работы легко вытекает также, что многообразие полугрупп стандартно тогда и только тогда, когда оно дистрибутивно[1]. В данной работе изучаются кодистрибутивные и костандартные многообразия полугрупп. В ней получено достаточно сильное необходимое условие кодистрибутивности многообразия, описание кодистрибутивных многообразий в обширном частном случае и полное описание костандартных многообразий. Чтобы сформулировать основные результаты работы, нам понадобятся некоторые определения и обозначения.

Напомним, что многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ называется *многообразием полугрупп с вполне регулярным квадратом*, если квадрат всякой полугруппы из $\mathcal{V}$ является вполне регулярной полугруппой, или, что эквивалентно, если $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $xy=(xy)^{n+1}$ для некоторого натурального n. Через $\mathcal{T}$, $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM}$ и $\mathcal{SEM}$ мы будем обозначать тривиальное многообразие, многообразие полурешеток, многообразие полугрупп с нулевым умножением и многообразие всех полугрупп соответственно.

Первым из трех основных результатов работы является

Теорема 1.1. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ кодистрибутивно, то либо $\mathcal{V}=\mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{V}$ является многообразием полугрупп с вполне регулярным квадратом.*

---

[1] В самом деле, легко понять, что если элемент решетки дистрибутивен и модулярен одновременно, то он стандартен, а в [13] показано, что всякое дистрибутивное многообразие полугрупп модулярно.

Многообразие полугрупп, удовлетворяющее тождеству вида

$$x_1x_2\cdots x_n = x_{1\alpha}x_{2\alpha}\cdots x_{n\alpha}, \tag{1}$$

где α — перестановка на множестве $\{1,2,\ldots,n\}$ такая, что $1\alpha \ne 1$ и $n\alpha \ne n$, называется *строго перестановочным.* Говорят, что многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ является *многообразием ступени* n, если все нильполугруппы из $\mathcal{V}$ нильпотентны ступени $\le n$ и n — наименьшее число с таким свойством. Многообразие, не являющееся многообразием ступени $\le n$, будем называть *многообразием ступени* $> n$. Многообразие полугрупп называется *собственным*, если оно отлично от многообразия $\mathcal{SEM}$. Из теоремы 1.1 данной работы и леммы 1 работы [14] вытекает, что всякое собственное кодистрибутивное многообразие имеет ступень ≤ 2. Следующий результат показывает, в частности, что для строго перестановочных многообразий верно и обратное утверждение.

Теорема 1.2. *Для строго перестановочного многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

а) *$\mathcal{V}$ кодистрибутивно;*
б) *$\mathcal{V}$ — многообразие ступени ≤ 2;*
в) *$\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{X}$, где $\mathcal{G}$ — многообразие периодических абелевых групп, а $\mathcal{X}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$, $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM}$ и $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$.*

Третьим основным результатом работы является

Теорема 1.3. *Для многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны:*

а) *$\mathcal{V}$ костандартно;*
б) *$\mathcal{V}$ нейтрально;*
в) *$\mathcal{V}$ совпадает с одним из многообразий $\mathcal{T}$, $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM}$, $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$ и $\mathcal{SEM}$.*

Поскольку всякий нейтральный элемент стандартен, из теоремы 1.3 вытекает

Следствие 1.1. *Всякое костандартное многообразие полугрупп стандартно.* □

Работа состоит из четырех параграфов. В § 2 собраны необходимые для дальнейшего дополнительные определения и обозначения, а также вспомогательные результаты, § 3 посвящен доказательству теорем 1.1–1.3, а § 4 содержит заключительные замечания и открытые вопросы.

2. Предварительные сведения

2.1. **Специальные элементы в абстрактных решетках.** Нам понадобятся следующие три теоретико-решеточных наблюдения.

Лемма 2.1. *Если x — кодистрибутивный, а w — нейтральный элемент решетки L, то $x \vee w$ — кодистрибутивный элемент в L.*

Доказательство. Пусть $y, z \in L$. Тогда:

$$\begin{aligned}
(x \vee w) \wedge (y \vee z) &= \bigl(x \wedge (y \vee z)\bigr) \vee \bigl(w \wedge (y \vee z)\bigr) && \text{(так как } w \text{ нейтрален)}\\
&= \bigl((x \wedge y) \vee (x \wedge z)\bigr) \vee && \text{(так как } x \text{ кодистрибути-}\\
&\quad \vee \bigl((w \wedge y) \vee (w \wedge z)\bigr) && \text{вен, а } w \text{ нейтрален)}\\
&= \bigl((x \wedge y) \vee (w \wedge y)\bigr) \vee \\
&\quad \vee \bigl((x \wedge z) \vee (w \wedge z)\bigr) \\
&= \bigl((x \vee w) \wedge y\bigr) \vee \bigl((x \vee w) \wedge z\bigr) && \text{(так как } w \text{ нейтрален).}
\end{aligned}$$

Итак, $(x \vee w) \wedge (y \vee z) = \big((x \vee w) \wedge y\big) \vee \big((x \vee w) \wedge z\big)$, т. е. элемент $x \vee w$ кодистрибутивен. $\square$

Для всякого элемента x решетки L положим $(x] = \{y \in L \mid y \leq x\}$.

Лемма 2.2. *Пусть x — кодистрибутивный элемент решетки L. Решетка $(x]$ дистрибутивна тогда и только тогда, когда каждый ее элемент кодистрибутивен в L.*

Доказательство. Достаточность очевидна. Докажем необходимость. Пусть $w \in (x]$ и $y, z \in L$. Тогда

$$\begin{aligned}
w \wedge (y \vee z) &= \big(w \wedge (y \vee z)\big) \wedge x && (\text{так как } w \wedge (y \vee z) \leq w \leq x) \\
&= \big(x \wedge (y \vee z)\big) \wedge w \\
&= \big((x \wedge y) \vee (x \wedge z)\big) \wedge w && (\text{так как } x \text{ кодистрибутивен}) \\
&= \big((x \wedge y) \wedge w\big) \vee \big((x \wedge z) \wedge w\big) && (\text{так как } x \wedge y, x \wedge z, w \in (x], \\
& && \ \text{а решетка } (x] \text{ дистрибутивна}) \\
&= \big((w \wedge y) \wedge x\big) \vee \big((w \wedge z) \wedge x\big) \\
&= (w \wedge y) \vee (w \wedge z) && (\text{так как } w \wedge y, w \wedge z \leq w \leq x).
\end{aligned}$$

Таким образом, $w \wedge (y \vee z) = (w \wedge y) \vee (w \wedge z)$, т. е. элемент w кодистрибутивен. $\square$

Напомним, что решетка L с 0 называется 0-*дистрибутивной*, если

$$\forall x, y, z \in L\colon \quad x \wedge y = x \wedge z = 0 \longrightarrow x \wedge (y \vee z) = 0,$$

и *атомной*, если для всякого $x \in L \setminus \{0\}$ существует атом $a \in L$ такой, что $a \leq x$.

Лемма 2.3. *Пусть L — атомная 0-дистрибутивная решетка, $a_1, a_2, \ldots, a_k$ — атомы L и $x = \bigvee\limits_{i=1}^{k} a_i$. Если решетка $(x]$ является конечной булевой алгеброй, то x — кодистрибутивный элемент решетки L.*

Доказательство. Для всякого элемента $w \in L$ обозначим через $A(w)$ множество всех атомов $a \in L$ таких, что $a \leq w$. Поскольку $(x]$ — конечная булева алгебра, $w = \bigvee A(w)$ для всех $w \leq x$ (мы полагаем здесь, что объединение пустого множества атомов равно 0). Пусть $b, c \in L$. Тогда

$$A(b \vee c) = A(b) \cup A(c) \quad \text{и} \quad A(b \wedge c) = A(b) \cap A(c) \tag{2}$$

(первое равенство вытекает из 0-дистрибутивности решетки L, а второе очевидно). Пусть $A(L)$ — множество всех атомов решетки L и $y, z \in L$. Тогда

$$\begin{aligned}
x \wedge (y \vee z) &= \bigvee A\big(x \wedge (y \vee z)\big) && (\text{так как } x \wedge (y \vee z) \leq x) \\
&= \bigvee \big[A(x) \cap \big(A(y) \cup A(z)\big)\big] && (\text{в силу (2)}) \\
&= \bigvee \big[\big(A(x) \cap A(y)\big) \cup && (\text{так как решетка подмножеств} \\
&\qquad \cup \big(A(x) \cap A(z)\big)\big] && \ \text{множества } A(L) \text{ дистрибутивна}) \\
&= \bigvee A\big((x \wedge y) \vee (x \wedge z)\big) && (\text{в силу (2)}) \\
&= (x \wedge y) \vee (x \wedge z) && (\text{так как } (x \wedge y) \vee (x \wedge z) \leq x).
\end{aligned}$$

Таким образом, $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, что и требовалось доказать. $\square$

2.2. **Специальные элементы в решетке многообразий полугрупп.** Как уже упоминалось в § 1, в работе [5] получено полное описание нейтральных многообразий полугрупп. Сформулируем это описание.

Предложение 2.1 ([5], предложение 4.1)**.** *Нейтральными многообразиями полугрупп являются многообразия $\mathcal{T}$, $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM}$, $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$, $\mathcal{SEM}$ и только они.* □

Из леммы 2.1 и предложения 2.1 непосредственно вытекает

Следствие 2.1. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ кодистрибутивно, а $\mathcal{X}$ — одно из многообразий $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM}$ и $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$, то многообразие $\mathcal{V} \vee \mathcal{X}$ также кодистрибутивно.* □

Из теоремы 1 работы [9] непосредственно вытекает

Предложение 2.2. *Если $\mathcal{V}$ — собственное верхнемодулярное многообразие полугрупп степени > 2, то $\mathcal{V}$ коммутативно.* □

Через $\operatorname{var} \Sigma$ обозначается многообразие полугрупп, заданное системой тождеств Σ. Положим $\mathcal{LZ} = \operatorname{var}\{xy = x\}$, $\mathcal{RZ} = \operatorname{var}\{xy = y\}$, $\mathcal{P} = \operatorname{var}\{xy = x^2y, x^2y^2 = y^2x^2\}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}} = \operatorname{var}\{xy = xy^2, x^2y^2 = y^2x^2\}$.

Предложение 2.3 ([9], теорема 2)**.** *Если $\mathcal{V}$ — верхнемодулярное многообразие полугрупп ступени ≤ 2, то выполнено одно из следующих условий:*

(i) *$\mathcal{V} = \mathcal{K} \vee \mathcal{P}$, где $\mathcal{K}$ — вполне регулярное многообразие полугрупп такое, что $\mathcal{K} \not\supseteq \mathcal{RZ}$;*
(ii) *$\mathcal{V} = \mathcal{K} \vee \overleftarrow{\mathcal{P}}$, где $\mathcal{K}$ — вполне регулярное многообразие полугрупп такое, что $\mathcal{K} \not\supseteq \mathcal{LZ}$;*
(iii) *$\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп с вполне регулярным квадратом.* □

Нам понадобится также следующая информация о модулярных многообразиях.

Предложение 2.4. *Если собственное многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ модулярно, то $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие.* □

Это утверждение доказано (в другой терминологии и в чуть более слабом виде) в [4] (см. там предложение 1.6). В приведенном только что виде оно сформулировано и проверено в [7], предложение 2.1.

2.3. **Разложение некоторых многообразий в объединение подмногообразий.** Из леммы 2 работы [15] и доказательства предложения 1 той же работы вытекает

Лемма 2.4. *Если периодическое многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ не содержит многообразий $\mathcal{LZ}$, $\mathcal{RZ}$, $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$, то $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — многообразие, порожденное моноидом, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие.* □

Для всякого натурального числа m положим $\mathcal{C}_m = \operatorname{var}\{x^m = x^{m+1}, xy = yx\}$. В частности, $\mathcal{C}_1 = \mathcal{SL}$ Для удобства изложения положим также $\mathcal{C}_0 = \mathcal{T}$. Из результатов работы [16] вытекает

Лемма 2.5. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ порождается коммутативным моноидом, то $\mathcal{V} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m$ для некоторого многообразия периодических абелевых групп $\mathcal{G}$ и некоторого $m \ge 0$.* □

2.4. **Тождества некоторых многообразий.** Нам понадобится описание тождеств, выполненных в многообразиях $\mathcal{RZ}$, $\mathcal{C}_2$ и $\mathcal{P}$.

Лемма 2.6. *Тождество $v = w$ выполнено:*

а) *в многообразии $\mathcal{RZ}$ тогда и только тогда, когда слова v и w заканчиваются на одну и ту же букву;*

б) *в многообразии $\mathcal{C}_2$ тогда и только тогда, когда слова v и w зависят от одних и тех же букв и всякая буква, входящая в v и w, либо входит в каждое из этих слов ровно один раз, либо входит в каждое из них более одного раза;*

в) *в многообразии $\mathcal{P}$ тогда и только тогда, когда слова v и w зависят от одних и тех же букв и либо последняя буква каждого из слов v и w входит в это слово более одного раза, либо слова v и w заканчиваются на одну и ту же букву и эта буква входит в каждое из слов v и w ровно один раз.*

Утверждения этой леммы о тождествах многообразий $\mathcal{RZ}$ и $\mathcal{C}_2$ хорошо известны и легко проверяются, а утверждение о тождествах многообразия $\mathcal{P}$ вытекает из леммы 7 работы [17].

2.5. **Некоторые свойства решетки полугрупповых многообразий.** Для краткости будем обозначать решетку всех многообразий полугрупп через **SEM**. Следующее утверждение хорошо известно (см., например, § 1 в [1]).

Лемма 2.7. *Атомами решетки* **SEM** *являются многообразия абелевых групп произвольной простой экспоненты, многообразия $\mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}, \mathcal{SL}, \mathcal{ZM}$ и только они.* $\square$

Общеизвестно, что решетка **SEM** атомна. Легко понять, что для атомной решетки L 0-дистрибутивность эквивалентна следующему условию: если a — атом в L и $x, y \in L$, то из того, что $x \ngeq a$ и $y \ngeq a$, вытекает, что $x \vee y \ngeq a$. С учетом этого наблюдения, из результатов работы [18] вытекает

Лемма 2.8. *Решетка* **SEM** 0*-дистрибутивна.* $\square$

Как обычно, решетка подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$ обозначается через $L(\mathcal{V})$. Из предложения 1 работы [19] непосредственно вытекает

Лемма 2.9. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ является объединением конечного числа атомов решетки* **SEM**, *то решетка $L(\mathcal{V})$ является конечной булевой алгеброй.* $\square$

3. Доказательства основных результатов

Доказательство теоремы 1.1. Пусть $\mathcal{V}$ — собственное кодистрибутивное многообразие полугрупп. Очевидно, что многообразие $\mathcal{V}$ верхнемодулярно. Предположим, что $\mathcal{V}$ — многообразие ступени > 2. Предложение 2.2 показывает, что многообразие $\mathcal{V}$ коммутативно. Следовательно, многообразия $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$ не содержатся в $\mathcal{V}$. Хорошо известно, что многообразие $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$ является наибольшим собственным подмногообразием каждого из многообразий $\mathcal{P}$ и $\overleftarrow{\mathcal{P}}$. Следовательно, $(\mathcal{V} \wedge \mathcal{P}) \vee (\mathcal{V} \wedge \overleftarrow{\mathcal{P}}) \subseteq \mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$. В частности, $(\mathcal{V} \wedge \mathcal{P}) \vee (\mathcal{V} \wedge \overleftarrow{\mathcal{P}})$ — многообразие ступени ≤ 2. С другой стороны, хорошо известно, что $\mathcal{P} \vee \overleftarrow{\mathcal{P}}$ — многообразие ступени 3. Поскольку $\mathcal{V}$ — многообразие ступени > 2, получаем, что $\mathcal{V} \wedge (\mathcal{P} \vee \overleftarrow{\mathcal{P}})$ — многообразие ступени 3. Следовательно, $\mathcal{V} \wedge (\mathcal{P} \vee \overleftarrow{\mathcal{P}}) \neq (\mathcal{V} \wedge \mathcal{P}) \vee (\mathcal{V} \wedge \overleftarrow{\mathcal{P}})$ вопреки кодистрибутивности $\mathcal{V}$.

Мы показали, что $\mathcal{V}$ — многообразие ступени ≤ 2. Предположим, что $\mathcal{V}$ не является многообразием полугрупп с вполне регулярным квадратом. В силу предложения 2.3 $\mathcal{V}$ удовлетворяет одному из условий (i) и (ii) этого предложения. По соображениям симметрии можно считать, что выполнено условие (i), т. е. $\mathcal{V} = \mathcal{K} \vee \mathcal{P}$, где $\mathcal{K}$ — вполне регулярное многообразие полугрупп такое, что $\mathcal{K} \not\supseteq \mathcal{RZ}$. Из леммы 2.6 легко вытекает, что $\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{RZ} \supseteq \mathcal{P}$. Следовательно, $\mathcal{V} \wedge (\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{RZ}) \supseteq \mathcal{P}$. С другой стороны, хорошо известно и легко проверяется, что наибольшим подмногообразием ступени ≤ 2 многообразия $\mathcal{C}_2$ является многообразие $\mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$. Следовательно, $\mathcal{V} \wedge \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}$. Поскольку $\mathcal{K}, \mathcal{P} \not\supseteq \mathcal{RZ}$, из лемм 2.7 и 2.8 вытекает, что $\mathcal{V} = \mathcal{K} \vee \mathcal{P} \not\supseteq \mathcal{RZ}$, и потому $\mathcal{V} \wedge \mathcal{RZ} = \mathcal{T}$. Объединяя сказанное, имеем

$$(\mathcal{V} \wedge \mathcal{C}_2) \vee (\mathcal{V} \wedge \mathcal{RZ}) = (\mathcal{V} \wedge \mathcal{C}_2) \vee \mathcal{T} = \mathcal{V} \wedge \mathcal{C}_2 \subseteq \mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM} \subset \mathcal{P} \subseteq \mathcal{V} \wedge (\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{RZ}).$$

Мы доказали, что $\mathcal{V} \wedge (\mathcal{C}_2 \vee \mathcal{RZ}) \ne (\mathcal{V} \wedge \mathcal{C}_2) \vee (\mathcal{V} \wedge \mathcal{RZ})$, т. е. $\mathcal{V}$ не кодистрибутивно.

Полученное противоречие завершает доказательство теоремы 1.1. □

Доказательство теоремы 1.2. Импликация а) $\longrightarrow$ б) вытекает из теоремы 1.1.

б) $\longrightarrow$ в). Пусть $\mathcal{V}$ — строго перестановочное многообразие ступени ≤ 2. Очевидно, что $\mathcal{LZ}, \mathcal{RZ} \not\subseteq \mathcal{V}$, а из леммы 2.6 вытекает, что $\mathcal{P}, \overleftarrow{\mathcal{P}} \not\subseteq \mathcal{V}$. Ясно, что $\mathcal{V}$ — периодическое многообразие. Из леммы 2.4 вытекает теперь, что $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — многообразие, порожденное моноидом, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. Поскольку $\mathcal{V}$ — многообразие ступени ≤ 2, $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{ZM}$. Учитывая лемму 2.7, мы получаем, что $\mathcal{N}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{ZM}$.

Поскольку всякий моноид, удовлетворяющий нетривиальному тождеству вида (1), коммутативен, многообразие $\mathcal{M}$ коммутативно. Поэтому из леммы 2.5 вытекает, что $\mathcal{M} = \mathcal{G} \vee \mathcal{C}_m$ для некоторого многообразия периодических абелевых групп $\mathcal{G}$ и некоторого $m \ge 0$. Из того, что $\mathcal{C}_2$ — многообразие ступени > 2, вытекает, что $m \le 1$. Таким образом, $\mathcal{M} = \mathcal{G} \vee \mathcal{K}$, где $\mathcal{K}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$. Мы доказали, что многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию в).

в) $\longrightarrow$ а). В силу следствия 2.1 достаточно доказать, что произвольное многообразие периодических абелевых групп $\mathcal{G}$ кодистрибутивно. Пусть $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ — произвольные многообразия полугрупп. Общеизвестно, что всякое многообразие полугрупп либо *надкоммутативно* (т. е. содержит многообразие $\mathcal{COM}$ всех коммутативных полугрупп), либо является периодическим многообразием. Предположим сначала, что хотя бы одно из многообразий $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ надкоммутативно. Для определенности будем считать, что $\mathcal{Y} \supseteq \mathcal{COM}$. Тогда $\mathcal{Y} \vee \mathcal{Z} \supseteq \mathcal{Y} \supseteq \mathcal{COM} \supseteq \mathcal{G}$, откуда

$$\mathcal{G} \wedge (\mathcal{Y} \vee \mathcal{Z}) = \mathcal{G} = \mathcal{G} \vee (\mathcal{G} \wedge \mathcal{Z}) = (\mathcal{G} \wedge \mathcal{Y}) \vee (\mathcal{G} \wedge \mathcal{Z}).$$

Поэтому далее можно считать, что многообразия $\mathcal{Y}$ и $\mathcal{Z}$ являются периодическими. Ясно, что $\mathcal{G} \wedge (\mathcal{Y} \vee \mathcal{Z})$ и $(\mathcal{G} \wedge \mathcal{Y}) \vee (\mathcal{G} \wedge \mathcal{Z})$ — многообразия периодических абелевых групп. Поэтому достаточно показать, что экспоненты этих многообразий совпадают. Как известно, всякое периодическое многообразие полугрупп $\mathcal{X}$ содержит наибольшее групповое подмногообразие. Мы будем обозначать его через $\mathrm{Gr}(\mathcal{X})$. Экспоненту многообразия периодических групп $\mathcal{H}$ мы будем обозначать через $\exp(\mathcal{H})$. Положим $r = \exp(\mathcal{G})$, $s = \exp\bigl(\mathrm{Gr}(\mathcal{Y})\bigr)$ и $t = \exp\bigl(\mathrm{Gr}(\mathcal{Z})\bigr)$. Очевидно, что

$$\begin{aligned}\exp\bigl(\mathcal{G} \wedge (\mathcal{Y} \vee \mathcal{Z})\bigr) &= \text{НОД}\bigl(r, \text{НОК}(s,t)\bigr) = \text{НОК}\bigl(\text{НОД}(r,s), \text{НОД}(r,t)\bigr) = \\ &= \exp\bigl((\mathcal{G} \wedge \mathcal{Y}) \vee (\mathcal{G} \wedge \mathcal{Z})\bigr).\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathcal{G} \wedge (\mathcal{Y} \vee \mathcal{Z}) = (\mathcal{G} \wedge \mathcal{Y}) \vee (\mathcal{G} \wedge \mathcal{Z})$.

Теорема 1.2 доказана. □

Доказательство теоремы 1.3. Условия б) и в) эквивалентны в силу предложения 2.1. Импликация б) $\longrightarrow$ а) очевидна. Поэтому достаточно доказать импликацию а) $\longrightarrow$ в). Пусть $\mathcal{V}$ — собственное костандартное многообразие полугрупп. Очевидно, что $\mathcal{V}$ кодистрибутивно и модулярно. Применяя предложение 2.4, получаем, что $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ — нильмногообразие. Из теоремы 1.1 вытекает, что $\mathcal{N} \subseteq \mathcal{ZM}$. С учетом леммы 2.7, получаем, что $\mathcal{N}$ — одно из многообразий $\mathcal{T}$ и $\mathcal{ZM}$. □

4. Заключительные замечания

Из лемм 2.3, 2.8 и 2.9 вытекает

Замечание 4.1. *Объединение произвольного конечного числа атомов решетки* **SEM** *является кодистрибутивным многообразием.* □

Многообразиями, указанными в теореме 1.2 и замечании 4.1, исчерпываются все известные автору примеры собственных кодистрибутивных многообразий. Отметим, что все эти многообразия имеют дистрибутивную решетку подмногообразий. В самом деле, решетка многообразий периодических абелевых групп дистрибутивна (что общеизвестно), решетки $L(\mathcal{SL})$ и $L(\mathcal{ZM})$ являются 2-элементными цепями (см. лемму 2.7), а $L(\mathcal{G} \vee \mathcal{SL} \vee \mathcal{ZM}) \cong L(\mathcal{G}) \times L(\mathcal{SL}) \times L(\mathcal{ZM})$ для произвольного группового многообразия $\mathcal{G}$ (последнее непосредственно вытекает, например, из предложения 2.1). Отсюда вытекает дистрибутивность решеток подмногообразий многообразий, указанных в теореме 1.2. Аналогичный факт для многообразий, указанных в замечании 4.1, непосредственно вытекает из леммы 2.9. Сказанное делает естественным следующий

Вопрос 4.1. *Существует ли собственное кодистрибутивное многообразие полугрупп, имеющее недистрибутивную решетку подмногообразий*?

В силу леммы 2.2 из отрицательного ответа на этот вопрос вытекало бы, что для собственных многообразий полугрупп свойство «быть кодистрибутивным многообразием» наследуется подмногообразиями. Отметим для сравнения, что если собственное многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ верхнемодулярно, то решетка $L(\mathcal{V})$ модулярна и все подмногообразия многообразия $\mathcal{V}$ верхнемодулярны ([9], следствия 2 и 3).

Легко понять, что существуют не кодистрибутивные многообразия периодических групп. В самом деле, поскольку решетка многообразий периодических групп модулярна, но не дистрибутивна, она содержит 5-элементную модулярную недистрибутивную подрешетку M_3. Очевидно, что каждый из трех попарно несравнимых элементов этой решетки является не кодистрибутивным многообразием периодических групп. Нам не известно, верно ли аналогичное утверждение для *комбинаторных* многообразий (т. е. многообразий, не содержащих нетривиальных групп). Всякое комбинаторное многообразие полугрупп с вполне регулярным квадратом (а значит, в силу теоремы 1.1, и всякое комбинаторное кодистрибутивное многообразие) является многообразием полугрупп с идемпотентным квадратом, т. е. удовлетворяет тождеству $xy = (xy)^2$. Сказанное делает актуальным следующий

Вопрос 4.2. *Кодистрибутивно ли произвольное многообразие многообразие полугрупп с идемпотентным квадратом*?

Естественным ослабленным вариантом этого вопроса является

Вопрос 4.3. *Кодистрибутивно ли произвольное многообразие полугрупп идемпотентов*?

Как показано в [20], решетка $L(\mathrm{var}\{xy = (xy)^2\})$ дистрибутивна. С учетом леммы 2.2 это означает, что для положительного ответа на вопрос 4.2 [соответственно, вопрос 4.3] достаточно доказать кодистрибутивность многообразия $\mathrm{var}\{xy = (xy)^2\}$ [соответственно, многообразия $\mathrm{var}\{x = x^2\}$]. Вопрос 4.3, таким образом, сводится к тому, справедливо ли для произвольных многообразий $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ равенство

$$\mathcal{B} \wedge (\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}) = (\mathcal{B} \wedge \mathcal{X}) \vee (\mathcal{B} \wedge \mathcal{Y}),$$

где $\mathcal{B} = \mathrm{var}\{x = x^2\}$. В [21], следствие 5.9, показано, что это равенство выполнено в случае, когда многообразия $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ локально конечны.

Литература

[1] Л. Н. Шеврин, Б. М. Верников, М. В. Волков. *Решетки многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. — 2009. — № 3. — С. 3–36.

[2] Г. Гретцер. *Общая теория решеток.* — М.: Мир, 1982. — 456 с.

[3] Б. М. Верников, М. В. Волков. *Решетки нильпотентных многообразий полугрупп* // Алгебраич. системы и их многообразия. — Свердловск: Урал. гос. ун-т. — 1988. — С. 53–65.

[4] J. Ježek, R. N. McKenzie. *Definability in the lattice of equational theories of semigroups* // Semigroup Forum. — 1993. — Vol. 46. — № 2. — P. 199–245.

[5] M. V. Volkov. *Modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Contrib. General Algebra. — 2005. — Vol. 16. — P. 275–288.

[6] B. M. Vernikov, M. V. Volkov. *Modular elements of the lattice of semigroup varieties.* II // Contrib. General Algebra. — 2006. — Vol. 17. — P. 173–190.

[7] B. M. Vernikov. *On modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Comment. Math. Univ. Carol. — 2007. — Vol. 48. — № 4. — P. 595–606.

[8] B. M. Vernikov. *Upper-modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Algebra Universalis. — 2008. — Vol. 59. — № 3–4. — P. 405–428.

[9] Б. М. Верников. *Верхнемодулярные элементы решетки многообразий полугрупп.* II // Фундам. и прикл. матем. — 2008. — Т. 14. — № 7. — С. 43–51.

[10] B. M. Vernikov. *Lower-modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Semigroup Forum. — 2007. — Vol. 75. — № 3. — P. 554–566.

[11] B. M. Vernikov. *Lower-modular elements of the lattice of semigroup varieties.* II // Acta Sci. Math. (Szeged). — 2008. — Vol. 74. — № 3–4. — P. 539–556.

[12] V. Yu. Shaprynskiĭ, B. M. Vernikov. *Lower-modular elements of the lattice of semigroup varieties.* III // Acta Sci. Math. (Szeged). — 2010. —Vol. 76. — № 3–4. — P. 371–382.

[13] Б. М. Верников, В. Ю. Шапрынский. *Дистрибутивные элементы решетки многообразий полугрупп* // Алгебра и логика. — 2010. — Т. 49, № 3. — С. 303–330.

[14] М. В. Сапир, Е. В. Суханов. *О многообразиях периодических полугрупп* // Изв. вузов. Матем. — 1981. — № 4. — С. 48–55.

[15] М. В. Волков. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий* // Изв. вузов. Матем. — 1989. — № 6. — С. 51–60.

[16] T. J. Head. *The lattice of varieties of commutative monoids* // Nieuw Arch. Wiskunde. III Ser. — 1968. — Vol. 16. — № 3. — P. 203–206.

[17] Э. А. Голубов, М. В. Сапир. *Многообразия финитно аппроксимируемых полугрупп* // Изв. вузов. Матем. — 1982. — № 11. — С. 21–29.

[18] А. Я. Айзенштат. *О некоторых подрешетках решетки многообразий полугрупп* // Соврем. алгебра. — Л.: Ленингр. гос. педагогич. ин-т. — 1974. — Вып. 1. — С. 3–15.

[19] Б. М. Верников, М. В. Волков. *Дополнения в решетках многообразий и квазимногообразий* // Изв. вузов. Матем. — 1982. — № 11. — С. 17–20.

[20] J. A. Gerhard. *Semigroups with an idempotent power.* II. *The lattice of equational subclasses of* $[(xy)^2 = xy]$ // Semigroup Forum. — 1977. — Vol. 14. — № 4. — P. 375–388.

[21] F. J. Pastijn, P. G. Trotter. *Complete congruences on lattices of varieties and of pseudovarieties* // Int. J. Algebra and Comput. — 1998. — Vol. 8. — № 2. — P. 171–201.

Б. М. Верников

Профессор, кафедра алгебры и дискретной математики
Уральский государственный университет,
620083, Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51,

`e-mail:` boris.vernikov@usu.ru

B. M. Vernikov

Professor, Chair of Algebra and Discrete Mathematics,
Ural State University, 51 Lenin str., 620083 Ekaterinburg, Russia,

e-mail: boris.vernikov@usu.ru