N502. Сколько и каких цифр понадобится, чтобы записать все натуральные числа, меньшие, чем 10^n?

N503. Коалиции A и B ведут войну между собой; n нейтральных государств находятся в нерешительности, причем p из них не присоединятся к A, а k не присоединятся к B. Сколько новых положений может оказаться в этой войне в зависимости от дальнейшего поведения нейтральных государств?

N504. Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу (т.е. чтобы некоторое число очков встретилось на обеих костях).

N505. У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если ему дают не более трех имен, а общее число имен равно 300. (Два способа, различающиеся лишь порядком имен, считаются различными.)

N506. Дано m предметов одного сорта и n другого. Найти число выборок, составленных из r предметов одного сорта и s - другого.

N507.

1. Из n букв, среди которых a встречается α раз, буква b - β раз, а остальные буквы попарно различны, составляются сочетания с повторениями по r элементов. Сколько среди них будет таких, которые содержат h раз букву a и k раз букву b?

2. Сколько различных слов, содержащих r букв, можно составить из этих n букв?

N508. Сколькими способами можно число n представить в виде суммы k слагаемых (представления, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются различными), если

1) каждое слагаемое является целым неотрицательным числом;

2) каждое слагаемое - натуральное число?

N509. Пусть $n = {p_1}^{\alpha_1} \dots {p_r}^{\alpha_r}$ - разложение числа n в произведение степеней простых попарно различных между собой чисел. Найти

1) число всех натуральных делителей числа n;

2) число всех делителей, не делящихся на квадрат никакого целого числа, отличного от единицы;

3) сумму делителей числа n.

N510. Сколькими способами можно расставить n нулей и k единиц так, чтобы никакие две единицы не стояли рядом?

N511. Сколько существует целых положительных чисел, не превышающих k^n, цифры которых расположены в неубывающем порядке?

N512. Город имеет вид прямоугольника, разделенного улицами на квадраты. Таких квадратов в направлении с севера на юг n, а в направлении с востока на запад k. Сколько имеется кратчайших дорог от одной из вершин прямоугольника до противоположной?

N513.

1. Сколькими способами число 11^n можно представить в виде трех сомножителей (представления, отличающиеся лишь порядком сомножителей, считаются различными)?

2. Та же задача, но представления, отличающиеся лишь порядком сомножителей, не различаются, а $n \neq 3s$.

N514. Сколькими способами можно расставить k ладей на "шахматной" доске размером $m \times n$ так, чтобы они не угрожали друг другу, т.е. так, чтобы никакие две из них не стояли на одной вертикали или горизонтали? Рассмотреть случаи:

1. $k = n = m$, все ладьи одного цвета;
2. $k = n = m$, имеется p белых и $k - p$ черных ладей;
3. $k \leq n \leq m$, все ладьи окрашены в разные цвета;
4. $k \leq n \leq m$, имеется k_i ладей цвета i $(i = 1, \dots, s)$, $k_1 + k_2 + \dots + k_s = k$.

N515. Имеется колода в $4n$ карт $(n \geq 5)$, которая содержит четыре масти по n карт в каждой масти, занумерованных числами 1, 2, ..., n. Подсчитать, сколькими способами можно выбрать пять карт так, что среди них окажутся :

1) пять последовательных карт одной масти;

2) четыре карты из пяти с одинаковыми номерами;

3) три карты с одним номером и две карты с другим;

4) пять карт одной масти;

5) пять последовательно занумерованных карт;

6) три карты из пяти с одним и тем же номером;

7) две карты из пяти с одинаковыми номерами, а остальные с разными номерами.

N516. Найти число всех таких слов длины mn в n-буквенном алфавите, в которых каждая буква алфавита встречается m раз.

N517. Сколькими способами множество из n элементов может быть разбито на s подмножеств, из которых первое содержит k_1 элементов, второе k_2 элементов и т.д.?

N518. На одной из кафедр университета работают тринадцать человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Десять человек знают английский язык, семеро - немецкий, шестеро - французский. Пятеро знают английский и немецкий, четверо - английский и французский, трое - немецкий и французский.

1. Сколько человек знают все три языка?
2. Сколько человек знают ровно два языка?
3. Сколько человек знают только английский язык?

N519. Показать, что количество натуральных чисел, делящихся на n и не превосходящих x, равно $[x/n]$.

N520. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел – 3, 5 и 7.

N521. Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел – 6, 10 и 15.

N522. Показать, что если $n = 30m$, то число целых чисел, не превосходящих n и не делящихся ни на одно из чисел – 6, 10, 15, равно $22m$.

N523. Найти число простых чисел, не превосходящих 250.

N524. Сколькими способами можно расположить за круглым столом n супружеских пар так, чтобы мужчины и женщины чередовались и никакие двое супругов не сидели рядом?

N525. Каково количество семизначных чисел, сумма цифр которых равна 5?

N526. Каких семизначных чисел больше: тех, в записи которых есть 1, или остальных?

N527. У одного ученика есть 7 книг, а у другого - 9 книг. Сколькими способами они могут обменять книгу одного на книгу другого?

N528. Сколькими способами можно выбрать из колоды в 52 карты 5 карт так, чтобы среди них было не более двух карт одной масти.

N529. Сколькими способами можно выстроить 9 человек разного роста в колонну по 3 человека, если в каждой шеренге люди выстраиваются по росту?

N530. Сколькими способами 2 почтальона могут разнести 10 писем по 10 адресам?

N531. Волейбольная сетка имеет вид прямоугольника 50×600 клеток. Какое наибольшее количество веревочек можно перерезать так, чтобы сетка не распалась на куски?

N532. На 5 этажей строящегося дома доставляют 6 ящиков различных материалов. Сколькими способами можно распределить материалы по этажам? В скольких вариантах на 5-й этаж будет доставлен ровно один ящик?

N533. В течение недели студент каждый день заходил в гости к какому-нибудь одному из четырёх своих друзей. Сколькими способами он мог это сделать, если известно, что он посетил всех четырех?

N534. В квадрате отметили 10 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?

N535. Доказать, что в любом неколлинеарном 5-элементном семействе точек существуют 4 точки, являющиеся вершинами выпуклого четырехугольника.

N536. Индукцией по k доказать, что если все четырехугольники с вершинами из неколлинеарного k-элементного семейства точек выпуклы, то это семейство вершин выпуклого k-угольника.

N537. Каждая пара неколлинеарного 6-элементного семейства точек соединена либо белым, либо черным отрезком. Треугольник с вершинами из этого семейства назовем хроматическим, если его стороны имеют один цвет. Используя теорему Рамсея, доказать, что существует не менее двух хроматических треугольников.

N538. Используя предыдущую задачу, показать, что для семиэлементного семейства точек существует не менее трех хроматических треугольников.

N539. Доказать, что при $q_1, q_2 \geq 2$ для числа Рамсея $R(q_1, q_2, 2)$ имеют место соотношения:

1. $R(q_1, q_2, 2) = R(q_2, q_1, 2)$;
2. $R(q_1, q_2, 2) \geq C_{q_1+q_2-2}{}^{q_1-1}$;
3. $R(3, 4, 2) \leq 9$;
4. $R(3, 4, 2) > 8$ (и, в силу 3, $R(3, 4, 2) = 9$).

N540. Занумеруем 17-элементное неколлинеарное семейство точек числами 0, 1, ..., 16 и отрезок, соединяющий вершины с номерами k, l, покрасим в белый цвет, если $|k - l| \in \{1, 2, 4, 8\}$, а остальные отрезки в черный цвет. Используя возникшую конструкцию, доказать, что $R(4, 4, 2) = 18$.