# Глава VIII. Аффинные пространства
# § 4. Аффинные преобразования

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

# Аффинные преобразования

Пусть $(V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем $F$.

**Определение**

*Аффинным преобразованием* аффинного пространства $(V, \vec{V}, +)$ называется пара отображений $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}})$, где $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$, $\vec{\mathcal{A}} \in \mathrm{H}(\vec{V}, \vec{V})$ и для любых $p \in V$, $\vec{x} \in \vec{V}$ имеет место равенство $\mathcal{A}(p + \vec{x}) = \mathcal{A}p + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}$.

Обозначать аффинное преобразование $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}})$ будем обозначать просто через $\mathcal{A}$.

Последнее условие из определения аффинного преобразования равносильно тому, что для любых точек $p, q \in V$ имеет место равенство $\vec{\mathcal{A}}(\overrightarrow{pq}) = \overrightarrow{\mathcal{A}p\mathcal{A}q}$.

## Примеры аффинных преобразований

1. Аффинным преобразованием аффинного пространства $(V, \vec{V}, +)$ является *сдвиг* на вектор $\vec{a} \in \vec{V}$, определяемый следующим образом: $\mathcal{T}_{\vec{a}}(p) = p + \vec{a}$, $\vec{\mathcal{T}}_{\vec{a}} = \mathcal{E}$.
2. Аффинным преобразованием аффинного пространства $(V, \vec{V}, +)$ является *центроаффинное преобразование*, определяемое так: $\vec{\mathcal{A}} \in \mathrm{H}(\vec{V})$ – произвольный линейный оператор, $c \in V$ – фиксированная точка (центр), $\mathcal{A}p = c + \vec{\mathcal{A}}(\overrightarrow{cp})$ для любой точки $p \in V$.

## Предложение

Прозведение двух аффинных преобразований аффинного пространства $\boldsymbol{V}$ является аффинным преобразованием.

$\Downarrow$Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – аффинные преобразования аффинного пространства $\boldsymbol{V}$, $p \in V$, $\vec{x} \in \vec{V}$. Тогда
$\mathcal{B}(\mathcal{A}(p + \vec{x})) = \mathcal{B}(\mathcal{A}p + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}p) + \vec{\mathcal{B}}(\vec{\mathcal{A}}\vec{x}) = (\mathcal{B}\mathcal{A})p + (\vec{\mathcal{B}}\vec{\mathcal{A}})\vec{x}$, т.е. $\mathcal{B}\mathcal{A}$ – аффинное преобразование.$\Uparrow$

# Теорема существования и единственности аффинного преобразования

Пусть $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем $F$ размерности $n$.

### Определение

Назовем точки $p_1, \ldots, p_{n+1} \in V$ *точками общего положения*, если система векторов $(p_2 - p_1, \ldots, p_{n+1} - p_1)$ линейно независима.

### Упражнение

Точки $p_1, \ldots, p_{n+1} \in V$ являются точками общего положения тогда и только тогда, когда для любого $2 \leq j \leq n+1$ система векторов $(p_1 - p_j, \ldots, p_{j-1} - p_j, p_{j+1} - p_j, \ldots, p_{n+1} - p_j)$ линейно независима.

### Теорема

Пусть $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем $F$ размерности $n$ и $p_1, \ldots, p_{n+1} \in V$ — прозвольные точки общего положения. Тогда для любых точек $q_1, \ldots, q_{n+1} \in V$ существует единственное аффинное преобразование $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$, для которого $\mathcal{A}p_i = q_i$ при всех $i = 1, \ldots, n+1$.

⇓Положим $\vec{e}_i = p_{i+1} - p_1$ и $\vec{f}_i = q_{i+1} - q_1$ $(i = 1, \ldots, n)$. Тогда $(p_1; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ – репер в пространстве $V$. Пусть $x \in V$ и $[x]^\top = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, т.е. $x = p_1 + \xi_1\vec{e}_1 + \ldots + \xi_n\vec{e}_n$. Положим $\mathcal{A}x = y$, где $y = q_1 + \xi_1\vec{f}_1 + \ldots + \xi_n\vec{f}_n$. Очевидно, что $\mathcal{A}p_i = q_i$ при всех $i = 1, \ldots, n+1$. Линейный оператор $\vec{\mathcal{A}} : \vec{V} \longrightarrow \vec{V}$ определяется условиями $\vec{\mathcal{A}}\vec{e}_i = \vec{f}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Его существование и единственность обеспечиваются теоремой сл.7 §1 гл.III.

Проверим равенство $\mathcal{A}(r + \vec{x}) = \mathcal{A}r + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}$ для любых $r \in V$, $\vec{x} \in \vec{V}$. Пусть $r = p_1 + \rho_1\vec{e}_1 + \ldots \rho_n\vec{e}_n$, $\vec{x} = \xi_1\vec{e}_1 + \ldots + \xi_n\vec{e}_n$. Тогда $r + \vec{x} = p_1 + (\rho_1 + \xi_1)\vec{e}_1 + \ldots (\rho_n + \xi_n)\vec{e}_n$ и $\mathcal{A}(r + \vec{x}) = q_1 + (\rho_1 + \xi_1)\vec{f}_1 + \ldots (\rho_n + \xi_n)\vec{f}_n$, $\mathcal{A}(r) = q_1 + \rho_1\vec{f}_1 + \ldots \rho_n\vec{f}_n$, $\vec{\mathcal{A}}\vec{x} = \vec{\mathcal{A}}(\xi_1\vec{e}_1 + \ldots + \xi_n\vec{e}_n) = \xi_1\vec{\mathcal{A}}\vec{e}_1 + \ldots + \xi_n\vec{\mathcal{A}}\vec{e}_n = \xi_1\vec{f}_1 + \ldots + \xi_n\vec{f}_n$ Таким образом, $\mathcal{A}(r + \vec{x}) = \mathcal{A}r + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}$, и $\mathcal{A}$ является аффинным преобразованием.

Докажем его единственность. Пусть $\mathcal{B} : V \longrightarrow V$ — произвольное аффинное преобразование, для которого $\mathcal{B}p_i = q_i$ при всех $i = 1, \ldots, n+1$. Тогда $\vec{\mathcal{B}}(p_{i+1} - p_1) = q_{i+1} - q_1$ и $\vec{\mathcal{B}}\vec{e}_i = \vec{f}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$. Таким образом, $\vec{\mathcal{A}} = \vec{\mathcal{B}}$. Учитывая, что $\mathcal{B}p_1 = q_1 = \mathcal{A}p_1$, заключаем, что $\mathcal{B} = \mathcal{A}$. Теорема доказана.⇑

# Действие аффинного преобразования в координатах

Пусть $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем $F$размерности $n$ и $(o; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ – фиксированный репер в нем. Зафиксируем аффинное преобразование $(\mathcal{A}, \vec{\mathcal{A}})$ этого пространства. Тогда для любой точки $p \in V$, так как $p = o + \overrightarrow{op}$, справедливо равенство

$$\mathcal{A}p = \mathcal{A}o + \vec{\mathcal{A}}\overrightarrow{op}. \tag{1}$$

Обозначим через $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ матрицу линейного оператора $\vec{\mathcal{A}}$ в базисе $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$. Тогда $[\vec{\mathcal{A}}\overrightarrow{op}] = A \cdot [\overrightarrow{op}]$. Из равенства (1) получаем

$$[\mathcal{A}p] = [\mathcal{A}o] + A \cdot [\overrightarrow{op}]. \tag{2}$$

Запишем координаты точек $\mathcal{A}o$, $\mathcal{A}p$ и $p$ в репере $(o; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$: $[\mathcal{A}o] = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)^\top$, $[\mathcal{A}p] = (\eta_1, \ldots, \eta_n)^\top$ и $[p] = [\overrightarrow{op}] = (\xi_1, \ldots, \xi_n)^\top$. Расписывая равенство (2) по координатам , получаем

## Формулы для координат образа точки при аффинном преобразовании

$$\begin{cases} \eta_1 = \gamma_1 + \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \ldots + \alpha_{1n}\xi_n; \\ \eta_2 = \gamma_2 + \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \ldots + \alpha_{2n}\xi_n; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \eta_n = \gamma_n + \alpha_{n1}\xi_1 + \alpha_{n2}\xi_2 + \ldots + \alpha_{nn}\xi_n. \end{cases}$$

Пусть $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное евклидово пространство и $\dim \boldsymbol{V} = n$. Определение расстояния между точками аффинного евклидова пространства см. на сл.2 §3.

### Определение

Отображение $\mathcal{A} : V \longrightarrow V$ называется *изометрией*, если $\rho(p, q) = \rho(\mathcal{A}p, \mathcal{A}q)$ для любых $p, q \in V$.

### Примеры изометрий

1. Изометрией является сдвиг на вектор $\vec{a} \in \vec{V}$ (см. сл.3).
2. Изометрией является центроаффинное преобразование, у которого линейный оператор является ортогональным. Такое преобразование называется *ортогональным* с центром $c$.

### Предложение

Произведение изометрий является изометрией.

$\Downarrow$ Пусть $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ – изометрии. Тогда для любых $p, q \in V$ имеем $\rho(\mathcal{B}(\mathcal{A}p), \mathcal{B}(\mathcal{A}q)) = \rho(\mathcal{A}p, \mathcal{A}q) = \rho(p, q)$, что и требуется доказать.$\Uparrow$

**Теорема**

Любая изометрия есть аффинное преобразование и является произведением сдвига и ортогонального преобразования.

$\Downarrow$Пусть $\mathcal{A}$ – изометрия. Предположим, что $\mathcal{A}$ имеет неподвижную точку $c$ и докажем, что $\mathcal{A}$ – ортогональное преобразование с центром $c$. Для $x \in \vec{V}$ положим $\vec{\mathcal{A}}\vec{x} = \overrightarrow{c\mathcal{A}(c+\vec{x})}$. Тогда $\mathcal{A}(c+\vec{x}) = c + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}$. Докажем, что $\vec{\mathcal{A}}$ – ортогональный линейный оператор. Поскольку $\mathcal{A}c = c$, имеем $\vec{\mathcal{A}}\vec{0} = \vec{0}$. Из определения $\vec{\mathcal{A}}$, так как $\mathcal{A}$ – изометрия, получаем $|\vec{\mathcal{A}}\vec{y} - \vec{\mathcal{A}}\vec{x}| = |\mathcal{A}(c+\vec{y}) - \mathcal{A}(c+\vec{x})| = \rho(\mathcal{A}(c+\vec{x}), \mathcal{A}(c+\vec{y})) = \rho(c+\vec{x}, c+\vec{y}) = |\vec{y} - \vec{x}|$. Следовательно, $|\vec{\mathcal{A}}\vec{y} - \vec{\mathcal{A}}\vec{x}| = |\vec{y} - \vec{x}|$ для любых $\vec{x}, \vec{y} \in \vec{V}$. Согласно теореме сл.16 §3 гл.VI отображение $\vec{\mathcal{A}}$ – ортогональный линейный оператор и $\mathcal{A}$ – аффинное преобразование.

Предположим, что $\mathcal{A}$ не имеет неподвижных точек. Зафиксируем $c \in V$ и положим $\vec{a} = \overrightarrow{\mathcal{A}(c)c}$. Возьмем сдвиг $\mathcal{T}_{\vec{a}}$ и положим $\mathcal{B} = \mathcal{T}_{\vec{a}}\mathcal{A}$. Согласно предложению сл.7 $\mathcal{B}$ – изометрия. Она имеет неподвижную точку $c$: $\mathcal{B}c = \mathcal{T}_{\vec{a}}(\mathcal{A}c) = \mathcal{A}c + \overrightarrow{\mathcal{A}(c)c} = c$. Согласно доказанному в предыдущем абзаце $\mathcal{B}$ – ортогональное преобразование с центром $c$. Поскольку $\mathcal{B} = \mathcal{T}_{\vec{a}}\mathcal{A}$, имеем $\mathcal{A} = \mathcal{T}_{\vec{a}}^{-1}\mathcal{B}$. Так как $\mathcal{T}_{\vec{a}}^{-1} = \mathcal{T}_{-\vec{a}}$, получаем $\mathcal{A} = \mathcal{T}_{-\vec{a}}\mathcal{B}$. Согласно предложению сл.3 $\mathcal{A}$ является аффинным преобразованием.$\Uparrow$

Напомним, что согласно теореме сл.14 §3 гл.VI определитель любой матрицы ортогонального оператора равен $1$ или $-1$.

### Определения

Будем говорить, что изометрия $\mathcal{A}$ аффинного евклидова пространства *сохраняет ориентацию*, если определитель любой матрицы ее ортогонального оператора $\vec{\mathcal{A}}$ равен $1$. Такая изометрия называется также *движением* или *движением первого рода*.

Очевидно следующее

### Наблюдение

Следующие условия для изометрии $\mathcal{A}$ эквивалентны:

1. $\mathcal{A}$ – движение;
2. ортогональный оператор $\vec{\mathcal{A}}$ сохраняет ориентацию некоторого базиса пространства $\vec{V}$;
3. ортогональный оператор $\vec{\mathcal{A}}$ сохраняет ориентацию любого базиса пространства $\vec{V}$.

# Изометрии, изменяющие ориентацию

## Определения

Будем говорить, что изометрия $\mathcal{A}$ аффинного евклидова пространства *изменяет ориентацию*, если определитель любой матрицы ее ортогонального оператора $\vec{\mathcal{A}}$ равен $-1$. Такая изометрия называется также *симметрией* или *движением второго рода*.

Очевидно следующее

## Наблюдение

Следующие условия для изометрии $\mathcal{A}$ эквивалентны:

1. $\mathcal{A}$ – симметрия;
2. ортогональный оператор $\vec{\mathcal{A}}$ изменяет ориентацию некоторого базиса пространства $\vec{V}$;
3. ортогональный оператор $\vec{\mathcal{A}}$ изменяет ориентацию любого базиса пространства $\vec{V}$.

# Пример 1

Аффинное преобразование $\mathcal{A}x = p_0 + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}$ аффинного пространства $\mathbb{R}^3$ переводит точки $A(1,2,3)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,1,3)$, $D(1,1,7)$ в точки $A'(1,4,4)$, $B'(1,6,6)$, $C'(-2,3,0)$, $D'(-4,9,8)$ соответственно. Найти точку $p_0$ и матрицу оператора $\vec{\mathcal{A}}$ в стандартном базисе. Найти образ точки $q(2,-1,4)$ при этом отображении.

По определению аффинного преобразования (сл.22) $\vec{\mathcal{A}}(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{A'B'}$, $\vec{\mathcal{A}}(\overrightarrow{AC}) = \overrightarrow{A'C'}$, $\vec{\mathcal{A}}(\overrightarrow{AD}) = \overrightarrow{A'D'}$. Обозначим матрицу оператора $\vec{\mathcal{A}}$ через $Q$. С помощью формулы для координат образа вектора при линейном операторе (сл.17 §1 гл.III) получаем матричное уравнение

$$Q \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 2 & -4 & 4 \end{pmatrix}.$$ Решив это уравнение, имеем

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$ Теперь находим $p_0 = A' - \mathcal{A}(A)$. Вычисляем

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$ Точка $p_0(1,2,-1)$.

# Окончание примера 1

Найдем образ точки $q(2,-1,4)$ при отображении $\mathcal{A}$. Вычисляем $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 7 \end{pmatrix}$. Следовательно, $\mathcal{A}(q) = (-2,9,7)$.

# Пример 2

Изометрия $\mathcal{A}x = p_0 + \vec{\mathcal{A}}\vec{x}$ аффинного пространства $\mathbb{R}^2$, сохраняющая ориентацию, переводит точку $(5,0)$ в точку $(0,0)$, а точку $(0,5)$ в точку $(7,1)$. Найти точку $p_0$ и матрицу оператора $\vec{\mathcal{A}}$ в стандартном базисе. Найти также неподвижную точку этой изометрии.

Поскольку изометрия сохраняет ориентацию, матрица ее ортогонального оператора $\vec{\mathcal{A}}$ в стандартном базисе имеет вид $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$, причем $\alpha^2+\beta^2=1$. Пусть $p_0(\gamma,\delta)$. Получаем матричное уравнение $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \\ \delta & \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 7 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Отсюда $\begin{cases} 5\alpha+\gamma=0, \\ -5\beta+\gamma=7, \\ 5\beta+\delta=0, \\ 5\alpha+\delta=1 \end{cases}$ Решая эту систему, находим $\alpha=-\frac{3}{5}$, $\beta=-\frac{4}{5}$, $\gamma=3$, $\delta=4$.

# Окончание примера 2

Пусть $q(\lambda, \mu)$ – неподвижная точка данной изометрии. Тогда
$\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}$.
Из этого матричного равенства получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \lambda = 3 - \dfrac{3\lambda - 4\mu}{5}, \\ \mu = 4 - \dfrac{4\lambda + 3\mu}{5}. \end{cases}$$

Решая эту систему, находим $\lambda = \dfrac{5}{2}$, $\mu = \dfrac{5}{4}$.

Таким образом, $q(\dfrac{5}{2}, \dfrac{5}{4})$ – неподвижная точка данной изометрии.