Глава VIII. Неотрицательные матрицы §3. Матрицы обмена и продуктивные матрицы

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Теорема

Если A — матрица обмена, то 1 является ее собственным значением и существует относящийся к этому собственному значению неотрицательный собственный вектор

$\Downarrow$ Пусть A — матрица обмена порядка n. Прибавим к первой строке матрицы $A - xE_n$ все остальные ее строки и обозначим полученную матрицу через $B(x)$. Поскольку сумма элементов каждого столбца матрицы A равна 1, получаем, что в матрице $B(x)$ все элементы первой строки равны $1 - x$. По свойствам 6 (сл.11) и 2 (сл.9) из §3 гл.II ОА, $|A - xE_n| = |B(x)| = (1 - x) \cdot |B'(x)|$, где $B'(x)$ — матрица, полученная из $B(x)$ заменой в 'этой матрице всех элементов первой строки на 1. Таким образом, характеристический многочлен матрицы A делится на $1 - x$, и потому 1 является корнем этого многочлена, т.е. собственным значением этой матрицы.
Осталось проверить, что существует относящийся к 1 неотрицательный собственный вектор матрицы A, т.е. что система (2) сл.7 §1 имеет ненулевое неотрицательное решение.

Окончание доказательства теоремы

Мы докажем это только в случае, когда A — матрица второго порядка. В этом случае система (2) сл.7 §1 имеет вид

$$\begin{cases} (1-a_{11})x_1 & - & a_{12}x_2 & = & 0, \\ -a_{21}x_1 & + & (1-a_{22})x_2 & = & 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Определитель этой системы равен 0. В самом деле, учитывая, что A — матрица обмена, имеем:

$$\begin{vmatrix} 1-a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & 1-a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{12} \end{vmatrix} = 0.$$

Следовательно, система (1) имеет некоторое ненулевое решение (x_1, x_2). Если $x_1 \geqslant 0$ и $x_2 \geqslant 0$, то теорема доказана. Если $x_1 \leqslant 0$ и $x_2 \leqslant 0$, то в качестве ненулевого неотрицательного решения системы (1) можно взять вектор $(-x_1, -x_2)$. Осталось рассмотреть случай, когда x_1 и x_2 — ненулевые числа разных знаков. Для определенности будем считать, что $x_1 > 0$ и $x_2 < 0$. Из того, что A — матрица обмена, вытекает, что $0 \leqslant a_{11} \leqslant 1$ и $0 \leqslant a_{22} \leqslant 1$. Анализируя знаки слагаемых в уравнениях системы (1), легко понять, что в рассматриваемом случае $a_{11} = a_{22} = 1$ и $a_{12} = a_{21} = 0$. Но тогда любой ненулевой неотрицательный вектор является решением системы (1). $\Uparrow$

Пусть $A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & 0{,}2 \end{pmatrix}$. Ясно, что A — матрица обмена. В силу теоремы сл.2, число 1 является ее собственным значением. Требуется найти относящийся к 1 неотрицательный собственный вектор, т.е. неотрицательное и ненулевое решение однородной системы линейных уравнений с матрицей

$$A - E_3 = \begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & -0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & -0{,}8 \end{pmatrix}.$$

Приведем эту матрицу к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} -0{,}8 & 0{,}3 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & -0{,}7 & 0{,}1 \\ 0{,}2 & 0{,}4 & -0{,}8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -8 & 3 & 7 \\ 6 & -7 & 1 \\ 2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -8 & 3 & 7 \\ 0 & -19 & 25 \\ 0 & 19 & -25 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -8 & 3 & 7 \\ 0 & -19 & 25 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Полагая $x_3 = 19$, из второй строки полученной матрицы получаем $x_2 = 25$, а из первой — $x_1 = 26$. Итак, одним из неотрицательных собственных векторов матрицы A, относящихся к собственному значению 1, является вектор $(26, 25, 19)$.

Определение

Неотрицательная матрица A порядка n называется *продуктивной*, если для любого неотрицательного вектора $c \in \mathbb{R}^n$ существует неотрицательное решение $x \in \mathbb{R}^n$ матричного уравнения

$$(E_n - A) \cdot x^\top = c^\top. \tag{2}$$

Пример 1. Будет ли продуктивной матрица $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$? Возьмем $\vec{c} = (1, 1)$. Тогда матричное уравнение (2) распишется следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{rcrcl} x_1 & - & 2x_2 & = & 1, \\ -2x_1 & + & x_2 & = & 1. \end{array} \right.$$

Эта система имеет единственное решение $\vec{x} = (-1, -1)$. Следовательно, матрица A не является продуктивной. Впрочем, это и так ясно: если для производства единицы первого продукта требуются две единицы второго, а для производства единицы второго продукта требуются две единицы первого, то такое производство ничего не произведет (при условии замкнутости).

Пример 2

Рассмотрим более сложную матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}4 & 1 \\ 1{,}2 & 0 & 0{,}3 \\ 0{,}2 & 0{,}2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она также непродуктивна. Но убедиться в этом простыми рассуждениями довольно трудно. Необходимы достаточно простые критерии продуктивности. Два таких критерия будут получены далее (см. теоремы 1 на сл. и 2 на сл.). Там же будет доказана непродуктивность матрицы A.

Предложение

Неотрицательная квадратная матрица $A = (a_{ij})$ второго порядка продуктивна тогда и только тогда, когда $a_{11} < 1$, $a_{22} < 1$ и $|E_2 - A| > 0$.

$\Downarrow$ Необходимость. Пусть матрица A продуктивна. Положим $D = |E_2 - A|$. Ясно, что $D = (1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21}$. По определению продуктивности, для любого неотрицательного вектора $\vec{c} = (c_1, c_2)$ система

$$\begin{cases} (1 - a_{11})x_1 & - & a_{12}x_2 & = & c_1, \\ -a_{21}x_1 & + & (1 - a_{22})x_2 & = & c_2 \end{cases} \qquad (3)$$

должна иметь неотрицательное решение. Выбрав в качестве $\vec{c}$ вектор $(1, 1)$, получим систему

$$\begin{cases} (1 - a_{11})x_1 & - & a_{12}x_2 & = & 1, \\ -a_{21}x_1 & + & (1 - a_{22})x_2 & = & 1, \end{cases} \qquad (4)$$

которая имеет неотрицательное решение $\vec{x} = (x_1, x_2)$. Ясно, что $\vec{x} \neq \vec{0}$. Для определенности будем считать, что $x_1 > 0$. Из второго уравнения системы (4) легко следует, что $x_2 \neq 0$, и потому $x_2 > 0$. Далее, анализируя знаки слагаемых в уравнениях этой системы, получаем, что $a_{11} < 1$ и $a_{22} < 1$. К первому уравнению системы (4), умноженному на $1 - a_{22}$, прибавим второе, умноженное на a_{12}. Получим, что

Окончание доказательства предложения

$[(1-a_{11})(1-a_{22})-a_{12}a_{21}]x_1=(1-a_{22})+a_{12}$ или $Dx_1=(1-a_{22})+a_{12}$.
Из этого равенства следует, что $D>0$.
Достаточность. Предположим теперь, что $a_{11}<1$, $a_{22}<1$ и $|E_n-A|>0$.
Как и раньше, положим $D=|E_n-A|$. Пусть $\vec{c}=(c_1,c_2)$ — неотрицательный вектор. Система уравнений (3) является крамеровской системой с ненулевым определителем. Следовательно, она имеет единственное решение, которое можно найти по правилу Крамера:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{\begin{vmatrix} c_1 & -a_{12} \\ c_2 & 1-a_{22} \end{vmatrix}}{D} = \frac{c_1(1-a_{22})+c_2a_{12}}{D}, \\
x_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1-a_{11} & c_1 \\ -a_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{D} = \frac{c_2(1-a_{11})+c_1a_{21}}{D}.
\end{aligned}
$$

Очевидно, что при сделанных ограничениях выполняются неравенства $x_1\geqslant 0$, $x_2\geqslant 0$. Следовательно, матрица A продуктивна.$\Uparrow$

Критерий 1 продуктивности матрицы

Теорема

Неотрицательная квадратная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда матрица $(E_n - A)^{-1}$ существует и неотрицательна.

$\Downarrow$Достаточность устанавливается просто. Действительно, если матрица $(E_n - A)^{-1}$ существует, то из (2) следует, что $\vec{x}^\top = (E_n - A)^{-1}\vec{c}^\top$. А если матрица $(E_n - A)^{-1}$ и вектор $\vec{c}$ неотрицательны, то и произведение $(E_n - A)^{-1}\vec{c}^\top$ неотрицательно.

Необходимость. Предположим, что матрица A продуктивна. Тогда для любого неотрицательного вектора $\vec{c}$ система (2) имеет неотрицательное решение. Пусть c_i — i-й столбец единичной матрицы E_n $(i = 1, \ldots, n)$. Это неотрицательные векторы. Тогда существуют неотрицательные столбцы x_i такие что $(E_n - A) \cdot x_i = c_i$. Составив из этих столбцов матрицу X, получим $(E_n - A) \cdot X = E_n$. Следовательно, матрица $E_n - A$ обратимая и $(E_n - A)^{-1} = X \geq 0$.$\Uparrow$

Докажем с помощью теоремы 1 непродуктивность матрицы A из примера 2, приведенного на сл. 6. В этом случае

$$E - A = \begin{pmatrix} 1 & -0{,}4 & -1 \\ -1{,}2 & 1 & -0{,}3 \\ -0{,}2 & -0{,}2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы выяснить, существует ли матрица $(E_3 - A)^{-1}$, надо проверить, равен ли 0 определитель матрицы $E - A$. Напрямую вычислять $|E_3 - A|$ неудобно, поскольку $E_3 - A$ содержит десятичные дроби. Умножим все строки этой матрицы на 10. Определитель при этом умножится на 1000. Но на его равенство или неравенство нулю это не повлияет. Для дальнейшего важно также то, что при умножении всех строк матрицы $E_3 - A$ на 10 не изменятся ни знак ее определителя, ни знаки всех ее миноров второго порядка (последние умножатся на 100). Обозначим полученную матрицу через B и вычислим ее определитель:

$$|B| = \begin{vmatrix} 10 & -4 & -10 \\ -12 & 10 & -3 \\ -2 & -2 & 10 \end{vmatrix} = 10 \cdot 94 - (-4) \cdot (-126) + (-10) \cdot 44 =$$

$$= 940 - 504 - 440 = -4 < 0.$$

Окончание примера 2

Итак, матрица $E_3 - A$ невырожденна, и потому матрица $(E_3 - A)^{-1}$ существует. Осталось проверить, будет ли она неотрицательной. В силу формулы сл.33 из §3 гл.II ОА, матрица $(E_3 - A)^{-1}$ неотрицательна тогда и только тогда, когда алгебраические дополнения всех ее элементов либо равны 0, либо имеют тот же знак, что и $|E_3 - A|$. Как мы убедились, $|E_3 - A| < 0$. Знаки алгебраических дополнений элементов матрицы $E_3 - A$ совпадают со знаками алгебраических дополнений соответствующих элементов матрицы B. Но

$$B_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 10 & -3 \\ -2 & 10 \end{vmatrix} = 94 > 0.$$

Следовательно, матрица $(E_3 - A)^{-1}$ не является неотрицательной, и потому матрица A непродуктивна.

Теорема

Неотрицательная квадратная матрица A продуктивна тогда и только тогда, когда ее спектральный радиус меньше единицы.

$\Downarrow$ Пусть неотрицательная квадратная матрица A порядка n продуктивна. Тогда по теореме сл.9 матрица $E_n - A$ обратимая и матрица $(E_n - A)^{-1}$ неотрицательная. Положим $\rho = \rho(A)$. По теореме сл.5 §2 существует неотрицательный собственный вектор x матрицы A, относящийся к собственному значению ρ. Пусть $y = (E_n - A)^{-1} \cdot x$. Тогда $x = (E_n - A) \cdot y$. Покажем, что $A \cdot y = \rho y$. Имеем $\rho x = A \cdot x = A \cdot (E_n - A) \cdot y = (E_n - A) \cdot A \cdot y$, т.е. $\rho x = (E_n - A) \cdot A \cdot y$, откуда $\rho (E_n - A)^{-1} \cdot x = A \cdot y$ и $\rho y = A \cdot y$.
Таким образом, $x = (E_n - A) \cdot y = y - \rho y = (1 - \rho) y$. Так как $x, y \geq 0$, заключаем, что $1 - \rho \geq 0$. Поскольку $x \neq 0$, $1 - \rho > 0$ и $\rho < 1$.
Пусть $\rho(A) < 1$. Известно, что тогда $\lim_{m \longrightarrow \infty} A^m = O$ и $(E_n - a)^{-1} = E_n + A + \ldots + A^m + \ldots$, т.е. матрица $E_n - A$ обратимая и матрица $(E_n - A)^{-1}$ неотрицательная. Применение теоремы сл.9 завершает доказательство.$\Uparrow$

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}2 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}4 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 \end{pmatrix}.$$

Требуется проверить, будет ли матрица A продуктивной.
Найдем ее характеристический многочлен:

$$\begin{aligned} |A - xE| &= \begin{vmatrix} 0{,}2 - x & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}4 - x & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}4 - x \end{vmatrix} = \\ &= (0{,}4 - x) \cdot \begin{vmatrix} 0{,}2 - x & 0{,}3 \\ 0{,}3 & 0{,}4 - x \end{vmatrix} = (0{,}4 - x)(x^2 - 0{,}6x - 0{,}01). \end{aligned}$$

Ясно, что одним из собственных значений матрицы A является число $\lambda_1 = 0{,}4$. Чтобы найти два других собственных значения, надо решить уравнение $x^2 - 0{,}6x - 0{,}01 = 0$. Имеем:

$$\lambda_{2,3} = \frac{0{,}6 \pm \sqrt{0{,}36 + 0{,}04}}{2} \approx 0{,}3 \pm 0{,}3162.$$

Очевидно, что числа λ_1, λ_2 и λ_3 по модулю меньше 1. По теореме сл.12, матрица A продуктивна.