Глава VIII. Аффинные пространства
§ 3. Евклидовы аффинные пространства

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Определение

Аффинное пространство $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$ над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ называется *евклидовым*, если $\vec{V}$ – евклидово пространство.

Тогда V превращается в метрическое пространство путем определения расстояния между точками $p, q \in V$: $\rho(p, q) = |\overrightarrow{pq}|$. Проверим аксиомы метрического пространства. Ясно, что $\rho(p, q) \geq 0$, $\rho(p, q) = 0 \Leftrightarrow p = q$, $\rho(p, q) = \rho(q, p)$. Так как $|\overrightarrow{pr}| = |\overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr}| \leq |\overrightarrow{pq}| + |\overrightarrow{qr}|$, заключаем, что $\rho(p, r) \leq \rho(p, q) + \rho(q, r)$.
Примеры: геометрические пространства на плоскости или в пространстве; аффинные арифметические пространства $(\mathbb{R}^n, \overrightarrow{\mathbb{R}^n}, +)$ над полем $\mathbb{R}$ при $n = 2, 3, \ldots$.

Расстояние от точки до плоскости

Пусть U – плоскость в аффинном евклидовом пространстве $(V, \vec{V}, +)$ и $p \in V$.

Определение

Расстоянием от точки p до плоскости U называется $\inf\{\rho(p, r) | r \in U\}$. Обозначение: $\rho(p, U)$.

Предложение

Пусть $U = q + \vec{U}$ – плоскость, $p \in V$. Тогда $\rho(p, U) = |\vec{z}|$, где $\vec{z}$ – ортогональная составляющая вектора $\overrightarrow{pq}$ относительно $\vec{U}$.

$\Downarrow$Запишем $\overrightarrow{pq} = \vec{y} + \vec{z}$, где $\vec{y} \in \vec{U}$, $\vec{z} \in \vec{U}^{\perp}$. Возьмем $r \in U$, тогда $r = q + \vec{x}$ для некоторого $\vec{x} \in \vec{U}$. Так как $\overrightarrow{pr} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qr} = \vec{y} + \vec{z} + \vec{x} = \vec{z} + \vec{u}$, где $\vec{u} = \vec{y} + \vec{x} \in \vec{U}$, имеем $\rho(p, r) = |\overrightarrow{pr}| = |\vec{z} + \vec{u}|$. Далее, $|\vec{z} + \vec{u}|^2 = (\vec{z} + \vec{u})^2 = \vec{z}^2 + \vec{u}^2 = |\vec{z}|^2 + |\vec{u}|^2$, поскольку $\vec{z} \perp \vec{u}$. Таким образом, $\rho(p, r) = \sqrt{|\vec{z}|^2 + |\vec{u}|^2} \geq |\vec{z}|$ и $\rho(p, r) = |\vec{z}|$ при $\vec{u} = \vec{0}$, т.е. при таком выборе точки r, что $\overrightarrow{qr} = -\vec{y}$. Предложение доказано.$\Uparrow$

Определение

Расстоянием между плоскостями U и W евклидова аффинного пространства называется число $\inf\{\rho(p,r) | p \in U, r \in W\}$. Обозначение: $\rho(U,W)$.

Предложение

Пусть $U = p + \vec{U}$, $W = q + \vec{W}$ – плоскости. Тогда $\rho(U,W) = |\vec{z}|$, где $\vec{z}$ – ортогональная составляющая вектора $\overrightarrow{pq}$ относительно подпространства $\vec{U} + \vec{W}$.

⇓Пусть $r \in U$, $s \in W$, т.е. $r = p + \vec{x}$, $s = q + \vec{y}$ для некоторых $\vec{x} \in \vec{U}$, $\vec{y} \in \vec{W}$. Тогда $\overrightarrow{ps} = \overrightarrow{pr} + \overrightarrow{rs}$ и $\overrightarrow{ps} = \overrightarrow{pq} + \overrightarrow{qs}$, откуда $\vec{x} + \overrightarrow{rs} = \overrightarrow{pq} + \vec{y}$. Следовательно, $\overrightarrow{rs} = \overrightarrow{pq} - \vec{x} + \vec{y}$. Запишем $\overrightarrow{pq} = \vec{u} + \vec{z}$, где $\vec{u} \in \vec{U} + \vec{W}$, $\vec{z} \in (\vec{U} + \vec{W})^{\perp}$. Тогда $\overrightarrow{rs} = \vec{u} + \vec{z} - \vec{x} + \vec{y} = \vec{v} + \vec{z}$, где $\vec{v} = \vec{u} - \vec{x} + \vec{y} \in \vec{U} + \vec{W}$. Имеем $|\overrightarrow{rs}|^2 = \overrightarrow{rs}^2 = (\vec{v} + \vec{z})^2 = \vec{v}^2 + \vec{z}^2 = |\vec{v}|^2 + |\vec{z}|^2$, поскольку $\vec{v} \perp \vec{z}$. Значит, $\rho(r,s) = |\overrightarrow{rs}| = \sqrt{|\vec{v}|^2 + |\vec{z}|^2} \geq |\vec{z}|$. Выбрав точки r, s так, чтобы $\vec{v} = \vec{u} - \vec{x} + \vec{y} = \vec{0}$, получим $\rho(r,s) = |\vec{z}|$. Предложение доказано.⇑

Пусть $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное евклидово пространство, $(o; \vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ – репер в нем и базис $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ – ортонормированный. Рассмотрим гиперплоскость U, заданную в этом репере уравнением $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \beta$. Вектор $\vec{n}$ с координатами $[\vec{n}] = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)^\top$ называется *нормальным вектором* гиперплоскости U. Если записать $U = p + \vec{U}$, то $\vec{U}$ состоит из всех векторов, координаты которых удовлетворяют уравнению $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = 0$. Следовательно, $\vec{n} \in \vec{U}^\perp$ и $\vec{U}^\perp = \langle \vec{n} \rangle$.

Предложение

Расстояние от точки $q(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$ до гиперплоскости U, заданной уравнением $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = \beta$, может быть вычислено по формуле $\rho(q, U) = \dfrac{|\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \ldots + \alpha_n\gamma_n - \beta|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2}}$.

$\Downarrow$Пусть $p \in U$ и $[p] = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)^\top$. Тогда $\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n = \beta$. Пусть $\vec{z}$ – ортогональная составляющая вектора $\overrightarrow{pq}$ относительно $\vec{U}$. Тогда $\vec{z} = \delta\vec{n}$. Запишем $\overrightarrow{pq} = \vec{y} + \vec{z}$, где $\vec{y} \in \vec{U}$. Умножим это равенство скалярно на вектор $\vec{n}$: $(\overrightarrow{pq}, \vec{n}) = (\vec{y}, \vec{n}) + (\vec{z}, \vec{n}) = \delta\vec{n}^2$. Отсюда $\delta = \dfrac{(\overrightarrow{pq}, \vec{n})}{\vec{n}^2}$ и $|\vec{z}| = |\delta||\vec{n}| = \dfrac{|(\overrightarrow{pq}, \vec{n})|}{|\vec{n}|}$. Так как $[\overrightarrow{pq}] = (\gamma_1 - \beta_1, \ldots, \gamma_n - \beta_n)^\top$, имеем $(\overrightarrow{pq}, \vec{n}) = \alpha_1(\gamma_1 - \beta_1) + \ldots + \alpha_n(\gamma_n - \beta_n) = \alpha_1\gamma_1 + \ldots + \alpha_n\gamma_n - (\alpha_1\beta_1 + \ldots + \alpha_n\beta_n) = \alpha_1\gamma_1 + \ldots + \alpha_n\gamma_n - \beta$, откуда следует требуемое.$\Uparrow$

Параллелотоп в аффинном евклидовом пространстве

Пусть $\boldsymbol{V} = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное евклидово пространство, $n = \dim V$.

Определения и обозначения

Параллелотопом в аффинном евклидовом пространстве V с вершиной $p \in V$, порожденным линейно независимой системой $(\vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$ векторов из $\vec{V}$ $(k \leq n)$ называется множество точек

$$\{q \in V | q - p = \lambda_1 \vec{b}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{b}_k, 0 \leq \lambda_j \leq 1, j = 1, \ldots, k\}.$$

Обозначение: $ParTop(p; \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$.

Вершинами параллелотопа $ParTop(p; \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$ называются точки $p + \lambda_1 \vec{b}_1 + \ldots + \lambda_k \vec{b}_k$, где $\lambda_j \in \{0, 1\}$ при $j = 1, \ldots, k$.

Количество вершин параллелотопа $ParTop(p; \vec{b}_1, \ldots, \vec{b}_k)$ равно 2^k.

Формула для объема этого параллелотопа получается из формулы для объема параллелотопа в евклидовом пространстве (см. сл.8 и 9 §3 гл.V).

Пример 1

Найти длины сторон и внутренние углы треугольника ABC в аффинном пространстве $\mathbb{R}^5$, если в стандартном репере $A(1,-2,3,1,5)$, $B(2,0,6,5,10)$, $C(-1,1,4,6,1)$.
Написать канонические уравнения высоты $\triangle ABC$, проходящей через точку A.
Найти площадь $\triangle ABC$.

Находим $\overrightarrow{AB}=(1,2,3,4,5)$, $\overrightarrow{AC}=(-2,3,1,5,-4)$, $\overrightarrow{BC}=(-3,1,-2,1,-9)$. Далее, $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{55}$, $|\overrightarrow{BC}|=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$, $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})=7$, $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})=48$, $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})=48$. Вычисляем $\cos A=\dfrac{(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{7}{55}$ и аналогично $\cos B=\cos C=\dfrac{12}{\sqrt{330}}$.

Чтобы найти канонические уравнения высоты, найдем ее основание – точку D. Имеем $D = B + \lambda\overrightarrow{BC}$ и $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{AD}) = 0$. Так как
$\overrightarrow{AD} = (1-3\lambda, 2+\lambda, 3-2\lambda, 4+\lambda, 5-9\lambda)$, имеем
$-3(1-3\lambda) + 2 + \lambda - 2(3-2\lambda) + 4 + \lambda - 9(5-9\lambda) = 0$, откуда $\lambda = \frac{1}{2}$ и
$D(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 5, \frac{11}{2}, \frac{11}{2})$. Значит, $\overrightarrow{AD} = (-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 2, \frac{9}{2}, \frac{1}{2})$ и в качестве направляющего вектора прямой-высоты можно взять вектор
$\vec{a} = 2\overrightarrow{AD} = (-1, 5, 4, 9, 1)$. Канонические уравнения высоты:

$$\frac{x_1 - 1}{-1} = \frac{x_2 + 2}{5} = \frac{x_3 - 3}{4} = \frac{x_4 - 1}{9} = \frac{x_5 - 5}{1}.$$

Чтобы найти площадь $\triangle ABC$, заметим, что $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}V_{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$, а
$V_{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}} = \sqrt{g_{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}}$ (см. предложение сл.8 §3 гл.V). Запишем определитель Грама

$$g_{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})} = \begin{vmatrix} \overrightarrow{AB}^2 & (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) & \overrightarrow{AC}^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 55 & 7 \\ 7 & 55 \end{vmatrix} = 2976 = 16 \times 186.$$

Следовательно, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}4\sqrt{186} = 2\sqrt{186}$.

Параллелотоп в аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ построен на векторах $\vec{a}_1 = (2,1,1,1)$, $\vec{a}_2 = (1,2,1,1)$, $\vec{a}_3 = (1,1,2,1)$, $\vec{a}_4 = (1,1,1,2)$, отложенных от точки $p_0(1,2,-1,0)$. Проверить, лежит ли точка $q(2,3,-2,-1)$ внутри или вне этого параллелотопа.
Найти длину высоты этого параллелотопа, опущенной из конца вектора $\vec{a}_4$ на грань $(p;\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$.

Параллелотоп состоит из всех точек вида $p_0 + \lambda_1\vec{a}_1 + \lambda_2\vec{a}_2 + \lambda_3\vec{a}_3 + \lambda_4\vec{a}_4$, где $0 \le \lambda_i \le 1$ при $i = 1,2,3,4$. Чтобы определить, принадлежит ли точка q параллелотопу, нужно разложить вектор $q - p_0 = (1,1,-1,-1)$ по векторам $\vec{a}_1,\dots,\vec{a}_4$.
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 5 & 5 & 5 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right) \sim$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$
Отсюда $q - p_0 = \vec{a}_1 + \vec{a}_2 - \vec{a}_3 - \vec{a}_4$, т.е. $\lambda_3 = \lambda_4 = -1$. Таким образом, точка q лежит вне параллелотопа.

Окончание примера 2

Длина высоты этого параллелотопа, опущенной из конца вектора $\vec{a}_4$ на грань $(p;\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)$, равна длине ортогональной составляющей $\vec{b}$ вектора $\vec{a}_4$ относительно подпространства $\langle\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3\rangle$. Согласно следствию сл.10 §3 гл.V $|\vec{b}|=\sqrt{\dfrac{g_{(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4)}}{g_{(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)}}}$. Вычисляем

$$\sqrt{g_{(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3,\vec{a}_4)}}=\begin{vmatrix}2&1&1&1\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}5&5&5&5\\1&2&1&1\\1&1&2&1\\1&1&1&2\end{vmatrix}=$$

$$5\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{vmatrix}=5;$$

$$g_{(\vec{a}_1,\vec{a}_2,\vec{a}_3)}=\begin{vmatrix}\vec{a}_1^2&(\vec{a}_1,\vec{a}_2)&(\vec{a}_1,\vec{a}_3)\\(\vec{a}_2,\vec{a}_1)&\vec{a}_2^2&(\vec{a}_2,\vec{a}_3)\\(\vec{a}_3,\vec{a}_1)&(\vec{a}_3,\vec{a}_2)&\vec{a}_3^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}7&6&6\\6&7&6\\6&6&7\end{vmatrix}=$$

$$\begin{vmatrix}19&19&19\\6&7&6\\6&6&7\end{vmatrix}=19\begin{vmatrix}1&1&1\\6&7&6\\6&6&7\end{vmatrix}=19\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&1\end{vmatrix}=19.$$

Таким образом, длина высоты равна $\dfrac{5}{\sqrt{19}}$.

Найти в аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ точку B, симметричную точке $A(-3,-1,-2,9)$ относительно гиперплоскости $x = p_0 + t_1\vec{a}_1 + t_2\vec{a}_2 + t_3\vec{a}_3$, где $p_0(-1,1,0,1)$, $\vec{a}_1 = (2,1,1,1)$, $\vec{a}_2 = (1,2,1,1)$, $\vec{a}_3 = (1,1,2,1)$. Найти расстояние от точки $D(1,1,1,1)$ до этой гиперплоскости.

Найдем нормальный вектор $\vec{n}$ гиперплоскости. Имеем $\vec{n} = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2 \times \vec{a}_3$ — обобщенное векторное произведение. Вычисляем: $\vec{n} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & \vec{e}_1 \\ 1 & 2 & 1 & \vec{e}_2 \\ 1 & 1 & 2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 & \vec{e}_4 \end{vmatrix} =$

$$-\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{e}_1 + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{e}_2 - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{e}_3 + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}\vec{e}_4 =$$

$(-1,-1,-1,4)$.

Окончание примера 3

Записываем координатное уравнение гиперплоскости: $(\vec{n}, x - p_0) = 0$ или $-(x_1 + 1) - (x_2 - 1) - x_3 + 4(x_4 - 1) = 0$; $x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 + 4 = 0$.
Записываем параметрические уравнения прямой, проходящей через точку A перпендикулярно к гиперплоскости: $x = A + t\vec{n}$ или $x_1 = -3 - t$, $x_2 = -1 - t$, $x_3 = -2 - t$, $x_4 = 9 + 4t$.
Ищем точку C пересечения прямой и гиперплоскости, решая совместно уравнения прямой и гиперплоскости:
$-3 - t - 1 - t - 2 - t - 4(9 + 4t) + 4 = 0$; $19t + 38 = 0$; $t = -2$. Точка $C(-1, 1, 0, 1)$. Так как $\overrightarrow{CB} = -\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CA} = (-2, -2, -2, 8)$, имеем $\overrightarrow{CB} = (2, 2, 2, -8)$ и получаем координаты точки $B(1, 3, 2, -7)$.

Расстояние от точки $D(1, 1, 1, 1)$ до гиперплоскости находим согласно формуле из предложения сл.5: $d = \dfrac{|1 + 1 + 1 - 4 + 4|}{\sqrt{1 + 1 + 1 + 16}} = \dfrac{3}{\sqrt{19}}$.

Пример 4

Найти в аффинном пространстве $\mathbb{R}^4$ точки пересечения сферы $|x-p|=6$, где $p(1,3,7,3)$ и прямой, проходящей через точки $A(1,5,3,7)$, $B(1,7,-1,11)$.

Запишем параметрические уравнения прямой (AB). Найдем вектор $B-A=(0,2,-4,4)$. Направляющий вектор прямой $\vec{a}=(0,1,-2,2)$. Ее параметрические уравнения $x_1=1$, $x_2=5+t$, $x_3=3-2t$, $x_4=7+2t$. Найдем t из условия $|x-p|=6$, т.е. $(x-p)^2=36$. Так как $x-p=(x_1-1,x_2-3,x_3-7,x_4-3)=(0,t+2,-4-2t,4+2t)=(t+2)(0,1,-2,2)$, имеем $(x-p)^2=(t+2)^2(1+4+4)=9(t+2)^2$ и $9(t+2)^2=36$. Таким образом, $(t+2)^2=4$ и $t+2=\pm 2$, $t_1=0$, $t_2=-4$. Точки пересечения сферы и прямой $C_1=A$, $C_2=A-4\vec{a}=(1,1,11,-1)$.