Глава VIII. Неотрицательные матрицы
§2. Положительные матрицы

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Спектральный радиус матрицы

Для произвольной квадратной матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, будем называть корни характеристического многочлена $\chi_A(x) = |A - xE_n|$ матрицы A *собственными значениями* (или *собственными числами*) A.
Иными словами, собственные значения матрицы A — это собственные значения линейного оператора, имеющего в некотором базисе матрицу A. Столбцы координат собственных векторов этого оператора в том же базисе будем называть *собственными векторами матрицы* A. Таким образом, столбец $x \in \mathbb{C}^n$ является собственным вектором матрицы A, относящимся к собственному значению $\lambda \in \mathbb{C}$, если $x \neq 0$ и $A \cdot x = \lambda x$.
Степень характеристического многочлена $\chi_A(x)$ матрицы A порядка n равна n. В силу следствия 2 основной теоремы алгебры (ОА гл.IV,§4, сл.9) A имеет n собственных значений (некоторые из которых могут совпадать), являющихся, вообще говоря, комплексными числами. Выберем среди них наибольшее по модулю число и обозначим его модуль через $\rho(A)$.

Определение

Число $\rho(A)$ называется *спектральным радиусом матрицы* A.

Теорема

Пусть A — положительная квадратная матрица порядка n. Тогда $\rho(A)$ является собственным значением матрицы A алгебраической кратности 1 и существует положительный собственный вектор матрицы A, относящийся к $\rho(A)$.

$\Downarrow$Доказательство проведем для случая $n = 2$. Пусть $A = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ — положительная матрица. Тогда

$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} \alpha - x & \beta \\ \gamma & \delta - x \end{vmatrix} = x^2 - (\alpha+\delta)x + \alpha\delta - \beta\gamma$. Дискриминант этого квадратного трехчлена

$d = (\alpha+\delta)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma) = \alpha^2 - 2\alpha\delta + \delta^2 + 4\beta\gamma = (\alpha-\delta)^2 + 4\beta\gamma > 0$.

Характеристический многочлен $\chi_A(x)$ имеет различные действительные корни $(\alpha + \delta \pm \sqrt{d})/2$. Очевидно, что $\rho(A) = (\alpha + \delta + \sqrt{d})/2$.

Положим $\rho = (\alpha + \delta + \sqrt{d})/2$ и покажем, что существует положительный вектор $x = (\xi_1, \xi_2)$ со свойством $A \cdot x = \rho x$. Имеем

$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$, откуда $\begin{cases} (\alpha - \rho)\xi_1 + \beta\xi_2 = 0, \\ \gamma\xi_1 + (\delta - \rho)\xi_2 = 0. \end{cases}$

Окончание доказательства теоремы Перрона

Так как $\begin{vmatrix} \alpha-\rho & \beta \\ \gamma & \delta-\rho \end{vmatrix} = 0$, система $\begin{cases} (\alpha-\rho)\xi_1+\beta\xi_2=0, \\ \gamma\xi_1+(\delta-\rho)\xi_2=0. \end{cases}$

равносильна одному уравнению $(\alpha-\rho)\xi_1+\beta\xi_2=0$. Тогда $\xi_2=\dfrac{(\rho-\alpha)\xi_1}{\beta}$.

Так как $d=(\alpha-\delta)^2+4\beta\gamma$, имеем $\sqrt{d}>|\delta-\alpha|$, откуда $\rho-\alpha=(\alpha+\delta+\sqrt{d})/2-\alpha=(\delta-\alpha+\sqrt{d})/2>0$. Положим $\xi_1=1$. Тогда $\xi_2=\dfrac{\rho-\alpha}{\beta}>0$. В качестве x можно взять вектор $\left(1,\dfrac{\rho-\alpha}{\beta}\right)^\top$. $\Uparrow$

Теорема

Пусть A — неотрицательная квадратная матрица порядка n. Тогда $\rho(A)$ является собственным значением матрицы A и существует неотрицательный собственный вектор матрицы A, относящийся к $\rho(A)$.

$\Downarrow$Для матриц порядка 2 доказательство полностью аналогично доказательству теоремы Перрона.$\Uparrow$

Пример

Найти спектральный радиус матрицы $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$ и относящийся к нему положительный собственный вектор.

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} 0.3-x & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0.3-x & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0.8-x & 0.8 & 0.8 \\ 0.2 & 0.3-x & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3-x \end{vmatrix} =$$

$$(0.8-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0.2 & 0.3-x & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & 0.3-x \end{vmatrix} = (0.8-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.2 & 0.1-x & -0.1 \\ 0.3 & -0.1 & -x \end{vmatrix} =$$

$(0.8-x)(x^2-0.1x-0.01)$. Корни характеристического многочлена:
$\lambda_1 = 0.8$, $\lambda_{2,3} = 0.05 \pm \sqrt{0.025+0.1} = 0.05 \pm \sqrt{0.125} \approx 0.05 \pm 0.3536$.
Таким образом, $\rho(A) = 0.8$.

Находим собственные векторы для собственного значения λ_1:

$$\begin{pmatrix} -0.5 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & -0.5 & 0.1 \\ 0.3 & 0.2 & -0.5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -0.1 & -0.7 & 0.6 \\ 0.2 & -0.5 & 0.1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & -19 & 13 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & -1 & \frac{13}{19} \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{23}{19} \\ 0 & 1 & -\frac{13}{19} \end{pmatrix}$$

Таким образом, $x_1 = \frac{23}{19}x_3$, $x_2 = \frac{13}{19}x_3$ и при $x_3 = 19$ получаем $x_1 = 23$, $x_2 = 19$. Итак, вектор $x = (23, 13, 19)^\top$ является положительным собственным вектором матрицы A.