Глава VIII. Неотрицательные матрицы
§1 . Некоторые экономические модели

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

О материале главы VIII и §1

В экономических задачах часто возникают матрицы, состоящие из неотрицательных действительных чисел.

Определение

Матрица $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ называется *неотрицательной* (соотв. *положительной*, если все ее элементы — неотрицательные (соотв. положительные) числа. Обозначения: $A \geq 0$ (соотв. $A > 0$).

Заметим, что при $k \cdot n > 1$ из $A \geq 0$ и $A \neq O_{k \times n}$ не следует $A > 0$.
Глава VIII посвящена некоторым простым экономическим задачам и связанным с ними свойствам неотрицательных и положительных матриц.
В §1 рассматриваются простая линейная модель производства и простая линейная модель обмена.

Простая линейная модель производства

Пусть имеется n технологических процессов (или n предприятий) $p_1, p_2, \ldots, p_n$, которые производят продукты $R_1, R_2 \ldots, R_n$ при следующих ограничениях:

1) каждый технологический процесс производит один и только один продукт;

2) модель замкнута, т.е. нет притока продукции извне и нет потока продуктов из модели.

Будем считать без ограничения общности, что технологический процесс p_i производит продукт R_i при $i = 1, 2, \ldots, n$.

Для производства продукта R_i в технологическом процессе p_i могут понадобиться продукты $R_1, R_2 \ldots, R_n$. Пусть a_{ij} — количество единиц продукта R_i, необходимое для производства одной единицы продукта R_j.

Матрица $A = (a_{ij})$ называется *матрицей производственных затрат*. Ясно, что A — неотрицательная матрица.

Зафиксируем некоторый временной интервал, например год. В течение этого времени будет произведено x_1 единиц продукта R_1, x_2 единиц продукта R_2, и так далее, x_n единиц продукта R_n.

Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *вектором валового выпуска*. Это неотрицательный вектор.

Простая линейная модель производства 1

В процессе производства часть произведенной продукции расходуется.

Именно, на нужды производства расходуется $y_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$ единиц продукта p_i.

Таким образом, получается *вектор производственных затрат* $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Ясно, что $y^\top = A \cdot x^\top$ и поэтому, транспонировав обе части последнего равенства, получаем $y = x \cdot A^\top$.

Вектор $c = x - y$ называется *вектором конечного потребления*.

Основная задача, возникающая в планировании производства, формулируется так: по заданному вектору конечного потребления c найти вектор валового выпуска x. Для ее решения нужно решить систему уравнений $x - x \cdot A^\top = c$, откуда с помощью транспонирования получаем $x^\top - A \cdot x^\top = c^\top$, или

$$(E_n - A) \cdot x^\top = c^\top. \tag{1}$$

Система линейных уравнений (1) называется *простой линейной моделью производства* или *моделью Леонтьева* или *моделью межотраслевого баланса*.

Понятие продуктивной матрицы

Определение

Неотрицательная матрица A порядка n называется *продуктивной*, если для любого неотрицательного вектора $c \in \mathbb{R}^n$ существует неотрицательное решение $x \in \mathbb{R}^n$ системы линейных уравнений (1).

Простая линейная модель обмена

Простая линейная модель обмена называется также моделью международной торговли.

Пусть n стран $C_1, C_2, \ldots, C_n$ торгуют друг с другом. Будем считать, что весь доход x_j страны C_j складывается из продажи своих товаров либо внутри страны, либо другим странам. Предположим также, что структура торговли установилась: часть дохода страны C_j, которая тратится на закупку товаров у страны C_i, постоянна и равна a_{ij}.

Положим $A = (a_{ij})$. Ясно, что A — неотрицательная квадратная матрица порядка n и сумма элементов каждого ее столбца равна 1, т.е. $a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj} = 1$ для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$. Такие матрицы называются *матрицами обмена* или *стохастическими матрицами* (второй термин объясняется тем, что такие матрицы находят применение также и в теории вероятностей).

Пусть $\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ — вектор доходов (т.е. x_i — доход i-той страны). Тогда, начиная торговать в соответствии с матрицей обмена A, после одного тура торговли страны будут обладать доходами, величина которых описывается вектором-столбцом $A\vec{x}^\top$. Действительно, страна C_j тратит $a_{ij}x_j$ денежных единиц на импорт из страны C_i, а для страны C_i величина $a_{ij}x_j$ — слагаемое дохода. Следовательно, суммарный доход страны C_i удовлетворяет равенству

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n.$$

Таким образом, вектор доходов $\vec{x}$ удовлетворяет соотношению $\vec{x}^\top = A\vec{x}^\top$, которое можно записать как однородную систему линейных уравнений

$$(E - A)\vec{x}^\top = \vec{0}^\top. \tag{2}$$

Это означает, что вектор $\vec{x}$ является собственным вектором матрицы A, относящимся к собственному значению 1. Кроме того, очевидно, что этот вектор неотрицателен. Возникает вопрос: всегда ли матрица обмена имеет собственное значение 1 и относящийся к нему неотрицательный собственный вектор?

Еще один пример

Рассмотрим еще одну ситуацию, которая также приводит к системе уравнений (2), где A — матрица обмена. Пусть, как и в простой линейной модели производства, имеется n предприятий (или технологических процессов) $p_1, p_2, \dots, p_n$ и n продуктов $G_1, G_2, \dots, G_n$ и выполняются те же ограничения:
1) каждое предприятие производит один и только один продукт (а именно, предприятие p_i производит продукт G_i, $i = 1, 2, \dots, n$);
2) модель замкнута.
Зафиксируем некоторый временной интервал, скажем, год. Будем считать, что вся произведенная за этот период продукция потреблена в процессе производства. Пусть в течение этого времени предприятие p_i потребляет часть продукта, произведенного предприятием p_j, равную a_{ij}. Матрица $A = (a_{ij})$ будет матрицей обмена, так как она, очевидным образом, неотрицательна, а в силу последнего условия сумма элементов в каждом ее столбце равна 1.
Обозначим через x_i количество единиц продукта G_i, произведенного предприятием p_i, а через c_i — цену единицы продукта G_i $(i = 1, 2, \dots, n)$. Годовой доход предприятия p_i равен $c_i x_i$, а его ежегодные расходы определяются суммой $c_1 x_1 a_{i1} + c_2 x_2 a_{i2} + \cdots + c_n x_n a_{in}$.

Продолжение примера

Мы будем говорить, что цены $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$ *обеспечивают равновесие торговли*, если

$$c_1 x_1 a_{i1} + c_2 x_2 a_{i2} + \cdots + c_n x_n a_{in} \leqslant c_i x_i \tag{3}$$

для всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Суть этого неравенства предельно проста: оно означает лишь, что ни один производитель не тратит больше, чем он зарабатывает. Возникает вопрос: всегда ли для матрицы обмена A и неотрицательного вектора $\vec{x}$ существуют цены $\vec{c}$, обеспечивающие равновесие торговли, т.е. удовлетворяющие неравенству (3)?
Положим $y_i = c_i x_i$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$. Тогда совокупность неравенств (3) можно записать следующим образом:

$$A\vec{y}^{\top} \leqslant \vec{y}^{\top} \tag{4}$$

(это векторное неравенство, разумеется, означает, что каждая компонента вектора, стоящего в его левой части не превосходит соответствующей компоненты вектора, стоящего в правой части). Оказывается, что при сделанных предположениях из неравенства (4) следует равенство

$$A\vec{y}^{\top} = \vec{y}^{\top}. \tag{5}$$

Докажем этот факт при любом n. Предположим, что по крайней мере одно из n неравенств, которые получатся, если расписать векторное неравенство (4) в компонентах (скажем, m-е), является строгим: $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \leq y_i$ при $i = 1, \ldots, n; i \neq m$ и $\sum\limits_{j=1}^{n} a_{mj}y_j < y_m$. Рассмотрим сумму всех этих неравенств. Сумма их левых частей равна $\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}y_j\right) = \sum\limits_{j=1}^{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}\right) y_j = \sum\limits_{i=1}^{n} y_j$ (так как A — матрица обмена). Следовательно, сумма неравенств имеет вид $\sum\limits_{i=1}^{n} y_j < \sum\limits_{i=1}^{n} y_j$.

Полученное противоречие показывает, что на самом деле выполнено равенство (5), которое, с точностью до обозначений, равносильно системе (2). Таким образом, вопрос, сформулированный в конце предыдущего абзаца, сводится к возникшему ранее вопросу: всегда ли матрица обмена имеет собственное значение 1 и относящийся к нему неотрицательный собственный вектор? Ответ на него оказывается положительным и будет дан в §2.