

Глава VIII. Аффинные пространства

§ 1. Основные понятия

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Понятие аффинного пространства является обобщением понятия пространства точек в аналитической геометрии.

Пусть F – поле, \vec{V} – конечномерное линейное пространство над F , V – непустое множество (его элементы называются *точками* и обозначаются малыми латинскими буквами), $+$: $V \times \vec{V} \rightarrow V$ – отображение (операция откладывания вектора от точки). Элементы пространства \vec{V} называются, как обычно, векторами, и обозначаются в этой теме малыми латинскими буквами со стрелками: \vec{a} .

Определение

Аффинным пространством над полем F называется тройка $V = (V, \vec{V}, +)$, если выполняются следующие условия:

- 1 $\forall p \in V \forall \vec{x} \in \vec{V} \exists! q \in V : p + \vec{x} = q$,
- 2 $\forall p \in V \forall \vec{x}, \vec{y} \in \vec{V} : (p + \vec{x}) + \vec{y} = p + (\vec{x} + \vec{y})$,
- 3 $\forall p, q \in V \exists! \vec{x} \in \vec{V} : p + \vec{x} = q$ (обозначение: $\vec{x} = \vec{pq} = q - p$).

Размерностью аффинного пространства $V = (V, \vec{V}, +)$ называется $\dim \vec{V}$.
Обозначение: $\dim V$.

1. Геометрическое пространство

Множество точек – множество всех точек, рассматриваемых в геометрии; линейное пространство – V_g ; операция откладывания вектора от точки определена в аналитической геометрии, здесь мы считаем, что $A + \overrightarrow{AB} = B$ для любых точек A, B .

2. Аффинное арифметическое пространство над полем F

$$V = (F^n, \overrightarrow{F^n}, +).$$

Элементы множества F^n рассматриваются и как точки, и как векторы, во втором случае используется обозначение $\overrightarrow{F^n}$. Если $p = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in F^n$, $\vec{x} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \overrightarrow{F^n}$, то по определению $p + \vec{x} = q$, где $q = (\alpha_1 + \xi_1, \dots, \alpha_n + \xi_n) \in F^n$.

3. Аффинное арифметическое пространство над полем \mathbb{R}

$$V = (\mathbb{R}^n, \overrightarrow{\mathbb{R}^n}, +).$$

Предложение

Пусть $V = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем F . Тогда для любых $p, q, r \in V$ справедливы равенства

- 1 $p + \vec{0} = p,$
- 2 $p + \vec{pq} = q,$
- 3 $\vec{pq} + \vec{qr} = \vec{pr},$
- 4 $\vec{qp} = -\vec{pq}.$

↓ Для доказательства утверждения 1 используем аксиому 1 определения аффинного пространства (сл.3): существует единственный вектор $\vec{x} \in \vec{V}$ такой что $p + \vec{x} = p$. Тогда по аксиоме 2

$$p + \vec{0} = (p + \vec{x}) + \vec{0} = p + (\vec{x} + \vec{0}) = p + \vec{x} = p, \text{ т.е. } p + \vec{0} = p.$$

Второе равенство следует из аксиомы 3.

Для доказательства утверждения 3 используем аксиому 2 и утверждение 2: имеем $p + (\vec{pq} + \vec{qr}) = (p + \vec{pq}) + \vec{qr} = q + \vec{qr} = r$, т.е. $p + (\vec{pq} + \vec{qr}) = r$.

Отсюда в силу аксиомы 3 следует утверждение 3.

Чтобы доказать утверждение 4, заметим, что $p + \vec{pq} = q$, $q + \vec{qp} = p$, откуда $p = (p + \vec{pq}) + \vec{qp} = p + (\vec{pq} + \vec{qp})$, т.е. $p = p + (\vec{pq} + \vec{qp})$.

Следовательно, $\vec{pq} + \vec{qp} = \vec{0}$, что и требуется доказать. ↑

Пусть $V = (V, \vec{V}, +)$ – аффинное пространство над полем F , $\dim V = n$.

Определение

Репером (или **системой координат**) в аффинном пространстве V называется совокупность $(o; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ из точки $o \in V$ и базиса $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ линейного пространства \vec{V} .

Координатами точки $p \in V$ в репере $(o; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ называются координаты вектора \vec{op} в базисе $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ линейного пространства \vec{V} .
Обозначение: $p(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ или $[p] = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)^T$; таким образом,
 $\vec{op} = \gamma_1 \vec{e}_1 + \dots + \gamma_n \vec{e}_n$.

Вектор \vec{op} называется **радиус-вектором** точки p .

Предложение

Если в репере $(o; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ даны координаты точек $p(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ и $q(\delta_1, \dots, \delta_n)$, то координаты вектора \vec{pq} в базисе $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ суть $[\vec{pq}] = (\delta_1 - \gamma_1, \dots, \delta_n - \gamma_n)^T$.

↓ В самом деле, согласно утверждению 3 предложения сл.5 имеем $\vec{op} + \vec{pq} = \vec{oq}$, откуда непосредственно следует требуемое. ↑

Пусть в аффинном пространстве $V = (V, \vec{V}, +)$ заданы реперы $(o; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ и $(o'; \vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$. Найдем связь между координатами $[p]$ и $[p]'$ точки p в этих реперах, предполагая известными координаты $[o']$ в репере $(o; \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ и матрицу перехода $T = (\tau_{ij})_{n \times n}$ от базиса $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ к базису $B' = (\vec{e}'_1, \dots, \vec{e}'_n)$. Тогда $B' = B \cdot T$. Согласно утверждению 3 предложения сл.5 имеем $\vec{op} = \vec{oo}' + \vec{o'p}$, откуда

$$B \cdot [\vec{op}] = B \cdot [\vec{oo}'] + B' \cdot [\vec{o'p}] = B \cdot [\vec{oo}'] + (B \cdot T) \cdot [\vec{o'p}] =$$

$$B \cdot [\vec{oo}'] + B \cdot (T \cdot [\vec{o'p}]) = B \cdot ([\vec{oo}'] + T \cdot [\vec{o'p}]).$$

Таким образом, $B \cdot [\vec{op}] = B \cdot ([\vec{oo}'] + T \cdot [\vec{o'p}])$, и потому $[\vec{op}] = [\vec{oo}'] + T \cdot [\vec{o'p}]$, откуда получаются

Формулы преобразования координат точки при замене репера

$$[p] = [o'] + T \cdot [p]', \quad [p]' = T^{-1} \cdot ([p] - [o']).$$