# Глава VII. Билинейные и квадратичные функции и формы
# §1 . Билинейные и квадратичные функции

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

**Определение**

Пусть $V$ – линейное пространство над полем $F$. *Билинейной функцией* на пространстве $V$ называется отображение $\mathcal{B} : V \times V \longrightarrow F$, линейное по каждому аргументу, т.е. такое, что $\forall x, y, z \in V \ \forall \lambda \in F$
$\mathcal{B}(x + y, z) = \mathcal{B}(x, z) + \mathcal{B}(y, z)$, $\mathcal{B}(\lambda x, z) = \lambda\mathcal{B}(x, z)$ (линейность по первому аргументу) и
$\mathcal{B}(x, y + z) = \mathcal{B}(x, y) + \mathcal{B}(x, z)$, $\mathcal{B}(x, \lambda z) = \lambda\mathcal{B}(x, z)$ (линейность по второму аргументу).

Примером билинейной функции является скалярное произведение на евклидовом пространстве.
Вычислим значение билинейной функции $\mathcal{B}$ на векторах $x = \sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i$, $y = \sum_{j=1}^{n} \eta_j f_j$, которые линейно выражаются через системы $(e_1, \ldots, e_m)$ и $(f_1, \ldots, f_n)$ соответственно. Имеем $\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j f_j\right) =$
$= \sum_{i=1}^{m} \mathcal{B}(\xi_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j f_j) = \sum_{i=1}^{m} \xi_i \mathcal{B}(e_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j f_j) =$
$= \sum_{i=1}^{m} \xi_i \sum_{j=1}^{n} \eta_j \mathcal{B}(e_i, f_j) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j \mathcal{B}(e_i, f_j)$. Таким образом, получаем формулу

$$\mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i e_i, \sum_{j=1}^{n} \eta_j f_j\right) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} \xi_i \eta_j \mathcal{B}(e_i, f_j). \tag{1}$$

# Матрица билинейной функции в базисе

Пусть $V$ – $n$-мерное линейное пространство над полем $F$, $\mathcal{B}$ – билинейная функция на $V$.

## Определение

Пусть $C = (c_1, \ldots, c_n)$ – базис пространства $V$. Положим $\beta_{ij} = \mathcal{B}(c_i, c_j)$. *Матрицей* билинейной функции $\mathcal{B}$ в базисе $C$ называется матрица $(\beta_{ij})_{n\times n}$. Обозначение: $B_C$, $\mathcal{B} \leftrightarrow_C B$.

Вычислим значение билинейной функции $\mathcal{B}$ на векторах $x = \sum_{i=1}^n \xi_i c_i$, $y = \sum_{j=1}^n \eta_j c_j$ через их столбцы координат $[x]_C$, $[y]_C$ и матрицу функции $\mathcal{B}$ в базисе $C$, используя формулу (1) сл.2:

$\mathcal{B}(x, y) = \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^n \xi_i c_i, \sum_{j=1}^n \eta_j c_j\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \eta_j \mathcal{B}(c_i, c_j) =$

$= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \xi_i \eta_j \beta_{ij} = \sum_{i=1}^n \xi_i \left(\sum_{j=1}^n \beta_{ij}\eta_j\right) = [x]_C^\top \cdot (B_C \cdot [y]_C)$.

Получаем формулу

$$\mathcal{B}(x, y) = [x]_C^\top \cdot B_C \cdot [y]_C. \qquad (2)$$

*Формой* принято называть однородный многочлен от нескольких переменных, т.е. многочлен, у которого все одночлены имеют одинаковые степени. Например, линейная форма от $n$ переменных над полем $F$ имеет вид $\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n$, где $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in F$. При вычислении значения билинейной функции по координатам векторов в базисе получается значение билинейной формы (т.е. формы от набора переменных, разбитого на две равные части так, что форма линейна по каждой части набора переменных) от координат векторов.

### Определение

*Билинейной формой* от переменных $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ над полем $F$ называется многочлен $b(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij} x_i y_j$, где $\beta_{ij} \in F$, $i, j = 1, \ldots, n$. *Матрицей* билинейной формы называется матрица $(\beta_{ij})_{n \times n}$, составленная из ее коэффициентов.

Например, билинейная форма
$x_1y_1 - 2x_1y_2 + 5x_1y_3 - 3x_2y_1 + 4x_2y_2 - 6x_2y_3 - 9x_3y_1 + 8x_3y_2 - 7x_3y_3$
имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -3 & 4 & -6 \\ -9 & 8 & -7 \end{pmatrix}$.

Пусть $V$ – $n$-мерное линейное пространство над полем $F$, $\mathcal{B}$ – билинейная функция на $V$. Пусть $C$ и $C'$ – базисы пространства $V$, $\mathcal{B} \leftrightarrow_C B$, $\mathcal{B} \leftrightarrow_{C'} B'$. Выясним связь между матрицами $B$ и $B'$. Обозначим через $T$ матрицу перехода от базиса $C$ к базису $C'$. Пусть $x, y \in V$. Так как $[x]_C = T \cdot [x]_{C'}$ и $[y]_C = T \cdot [y]_{C'}$, с помощью формулы (2) сл.3 получаем $[x]_{C'}^\top \cdot B_{C'} \cdot [y]_{C'} = \mathcal{B}(x, y) = [x]_C^\top \cdot B_C \cdot [y]_C = (T \cdot [x]_{C'})^\top \cdot B_C \cdot T \cdot [y]_{C'} = [x]_{C'}^\top \cdot T^\top \cdot B_C \cdot T \cdot [y]_{C'}$. Следовательно, для любых $x, y \in V$ справедливо равенство $[x]_{C'}^\top \cdot B_{C'} \cdot [y]_{C'} = [x]_{C'}^\top \cdot T^\top \cdot B_C \cdot T \cdot [y]_{C'}$. Таким образом, получаем следующую формулу.

**Формула изменения матрицы билинейной функции при изменении базиса**

$$B_{C'} = T^\top \cdot B_C \cdot T. \tag{3}$$

Пусть $V$ – $n$-мерное линейное пространство над полем $F$, $\mathcal{B}$ – билинейная функция на $V$.

**Определение**

Билинейная функция $\mathcal{B}$ называется *симметричной*, если $\mathcal{B}(x,y)=\mathcal{B}(y,x)$ для любых $x,y\in V$.

**Предложение**

Следующие условия эквивалентны для билинейной функции $\mathcal{B}$:
(1) $\mathcal{B}$ является симметричной билинейной функцией;
(2) матрица $B$ билинейной функции $\mathcal{B}$ в любом базисе является симметрической, т.е. $B^\top=B$;
(3) матрица билинейной функции $\mathcal{B}$ в некотором базисе является симметрической.

$\Downarrow$Из определения матрицы билинейной функции получаем, что $(1)\Rightarrow(2)$. Очевидно, что $(2)\Rightarrow(3)$. Покажем, что $(3)\Rightarrow(1)$. Пусть $C$ – базис $V$, $\mathcal{B}\leftrightarrow_C B$ и $B^\top=B$. Для любых $x,y\in V$ с помощью формулы (2) сл.3 получаем $\mathcal{B}(x,y)=[x]_C^\top\cdot B_C\cdot[y]_C$, $\mathcal{B}(y,x)=[y]_C^\top\cdot B_C\cdot[x]_C$. Так как $[y]_C^\top\cdot B_C\cdot[x]_C=([y]_C^\top\cdot B_C\cdot[x]_C)^\top=[x]_C^\top\cdot B_C^\top\cdot[y]_C^{\top\top}=[x]_C^\top\cdot B_C\cdot[y]_C$, заключаем, что $\mathcal{B}(x,y)=\mathcal{B}(y,x)$, что и требуется доказать.$\Uparrow$

**Теорема**

Пусть $V$ – $n$-мерное евклидово пространство. Для любой симметричной билинейной функции $\mathcal{B}$ на $V$ существует ортонормированный базис пространства $V$, в котором $\mathcal{B}$ имеет диагональную матрицу.

$\Downarrow$Пусть $C$ – ортонормированный базис пространства $V$, и $B$ – матрица функции $\mathcal{B}$ в этом базисе. Матрица $B$ определяет в базисе $C$ самосопряженный линейный оператор $\overline{\mathcal{B}}$. В силу формулы (3) сл.5 и формулы изменения матрицы линейного оператора при изменении базиса (сл.19 §1 гл.III), учитывая предложение сл.7 §3 гл.VI, заключаем, что функция $\mathcal{B}$ и оператор $\overline{\mathcal{B}}$ в любом ортонормированном базисе имеют одинаковые матрицы. Применение теоремы сл.5 §3 гл.VI завершает доказательство, так как в базисе из собственных векторов оператор $\overline{\mathcal{B}}$ имеет диагональную матрицу (с корнями характеристического многочлена $\chi_B$ на главной диагонали).$\Uparrow$

С технической точки зрения нахождение ортонормированного базиса, в котором симметрическая билинейная функция имеет диагональную матрицу, не отличается от нахождения ортонормированного базиса из собственных векторов самосопряженного линейного оператора (см. сл.8-10 §3 гл.VI).

Пусть $V$ – $n$-мерное линейное пространство над полем $F$, характеристика которого отлична от $2$.

**Определение**

*Квадратичной функцией* на линейном пространстве $V$ называется отображение $\mathcal{K} : V \longrightarrow F$, для которого существует билинейная функция $\mathcal{B}$ на $V$ такая что $\mathcal{K}(x) = \mathcal{B}(x, x)$. *Матрицей* квадратичной функции $\mathcal{K}$ в базисе $C$ называется матрица билинейной функции $\mathcal{B}$ в этом базисе.

Из формулы (2) сл.3 получаем формулу для вычисления значения квадратичной функции от вектора.

$$\mathcal{K}(x) = [x]_C^\top \cdot B_C \cdot [x]_C. \tag{4}$$

При изменении базиса матрица квадратичной функции изменяется в соответствии с формулой (3) сл.5.

## Квадратичные функции (1)

Очевидно, что если квадратичная функция $\mathcal{K}(x)$ определена с помощью билинейной функции $\mathcal{B}(x, y)$, то симметричная билинейная функция $\frac{1}{2}(\mathcal{B}(x, y) + \mathcal{B}(y, x))$ определяет ту же самую квадратичную функцию $\mathcal{K}(x)$.

**Предложение**

Симметричная билинейная функция определяется по заданной с ее помощью квадратичной функции однозначно.

В самом деле, легко вычислить, что если $\mathcal{K}(x) = \mathcal{B}(x, x)$ и $\mathcal{B}$ – симметричная билинейная функция, то $\mathcal{B}(x, y) = \dfrac{1}{2}(\mathcal{K}(x + y) - \mathcal{K}(x) - \mathcal{K}(y))$.

Из теоремы сл.7 вытекает

**Следствие**

Пусть $V$ – $n$-мерное евклидово пространство. Для любой квадратичной функции $\mathcal{K}$ существует ортонормированный базис пространства $V$, в котором $\mathcal{K}$ имеет диагональную матрицу.

Пусть $V$ – линейное пространство над полем $\mathbb{R}$, $\mathcal{B}$ – симметричная билинейная функция на $V$.

**Определения**

Симметричная билинейная функция $\mathcal{B}$ называется *положительно определенной*, если для любого $x \in V$ из $x \neq 0_V$ следует $\mathcal{B}(x,x) > 0$.
Квадратичная функция $\mathcal{K}$ называется *положительно определенной*, если для любого $x \in V$ из $x \neq 0_V$ следует $\mathcal{K}(x) > 0$.

Как определить по матрице симметричной билинейной или квадратичной функции, будет ли она положительно определенной, указано на сл.32 §2.