Глава VI. Линейные отображения и операторы пространств со скалярным произведением
§ 4. Неотрицательные операторы

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Неотрицательные операторы

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ евклидова или унитарного пространства V называется *неотрицательным* (соотв. *положительным*), если $\mathcal{A}$ самосопряженный и для любого $x \in V$ имеет место $(\mathcal{A}x, x) \geq 0$ (соотв. $(\mathcal{A}x, x) > 0$ при $x \neq 0_V$).

Заметим, что для самосопряженного оператора унитарного пространства $(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}x) = \overline{(\mathcal{A}x, x)}$, поэтому $(\mathcal{A}x, x) \in \mathbb{R}$. Напомним, что все корни характеристического многочлена самосопряженного оператора – действительные числа.

Теорема

Самосопряженный линейный оператор $\mathcal{A}$ евклидова или унитарного пространства V является неотрицательным (соотв. положительным) тогда и только тогда, когда все его собственные значения неотрицательны (соотв. положительны).

$\Downarrow$ Пусть λ – собственное значение оператора $\mathcal{A}$ и x – относящийся к нему собственный вектор. Так как $(\mathcal{A}x, x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x)$ и $(x, x) > 0$, получаем $\lambda \geq 0$ для неотрицательного и $\lambda > 0$ для положительного оператора.

Окончание доказательства теоремы

Предположим, что все собственные значения с учетом кратности $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ линейного оператора $\mathcal{A}$ евклидова или унитарного пространства V неотрицательны (соотв. положительны). Пространство V имеет ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Пусть $x \in V$, $x = \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n$. Тогда
$(\mathcal{A}x, x) = (\mathcal{A}(\xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n), \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n) =$
$(\xi_1 \mathcal{A} e_1 + \ldots + \xi_n \mathcal{A} e_n, \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n) =$
$(\xi_1 \lambda_1 e_1 + \ldots + \xi_n \lambda_n e_n, \xi_1 e_1 + \ldots + \xi_n e_n) = \lambda_1 \xi_1 \overline{\xi_1} + \ldots + \lambda_n \xi_n \overline{\xi_n}$.
Поскольку $\xi_j \overline{\xi_j} = |\xi_j|^2 \geq 0$ и при $x \neq 0_V$ найдется j при котором $|\xi_j| > 0$, получаем требуемое заключение.$\Uparrow$

Следствие

Неотрицательный оператор является обратимым тогда и только тогда, когда когда он положителен.

Это утверждение непосредственно следует из предложения сл.13 §3 гл.III и доказанной только что теоремы.

Извлечение квадратного корня из неотрицательного оператора

Теорема

Для любого неотрицательного линейного оператора $\mathcal{A}$ евклидова или унитарного пространства V размерности n существует единственный неотрицательный линейный оператор $\mathcal{B}$ пространства V такой что $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$.

$\Downarrow$ Выберем в пространстве V ортонормированный базис $e_1, \ldots, e_n$ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Пусть $\mathcal{A}e_j = \lambda_j e_j$, $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \ldots, n$. Определим оператор $\mathcal{B}$, полагая $\mathcal{B}e_j = \sqrt{\lambda_j} e_j$ $(j = 1, \ldots, n)$. Тогда $\mathcal{B}$ – неотрицательный линейный оператор пространства V и $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$. Докажем единственность. Пусть $\mathcal{C}$ – неотрицательный линейный оператор пространства V и $\mathcal{C}^2 = \mathcal{A}$. так как $\mathcal{C}\mathcal{A} = \mathcal{C}^3 = \mathcal{A}\mathcal{C}$, операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{C}$ перестановочны. Тогда и операторы $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ и $\mathcal{C}$ перестановочны. В силу предложения сл.10 §1 гл.IV все корневые подпространства оператора $\mathcal{A}$, будучи ядрами операторов $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ для некоторых скаляров λ, инвариантны относительно $\mathcal{C}$. Пусть $U = V(\mathcal{A}, \lambda)$ – такое подпространство. Тогда для любого $u \in U$ справедливо $\mathcal{A}u = \lambda u$. Покажем, что $\mathcal{C}|_U = \mathcal{B}|_U$. Этим теорема будет доказана. Поскольку $\chi_{\mathcal{C}|_U}$ делит $\chi_{\mathcal{C}}$, оператор $\mathcal{C}|_U$ является неотрицательным и в подпространстве U имеется ортонормированный базис из собственных векторов $\mathcal{C}|_U$. Для любого вектора g этого базиса имеем $\mathcal{C}g = \mu_g g$, где $\mu_g \geq 0$. Тогда $\lambda g = \mathcal{A}g = \mathcal{C}^2 g = \mu_g^2 g$ и $\mu_g = \sqrt{\lambda}$. Так как $\mathcal{B}g = \sqrt{\lambda} g$ по определению, получаем требуемое.$\Uparrow$

Операторы $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$

Пусть U, V — конечномерные евклидовы или унитарные пространства и $\mathcal{A} \in \mathsf{H}(U, V)$. Тогда $\mathcal{A}^*\mathcal{A} \in \mathsf{H}(U)$, $\mathcal{A}\mathcal{A}^* \in \mathsf{H}(V)$.

Предложение

Операторы $\mathcal{A}^*\mathcal{A} \in \mathsf{H}(U)$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^* \in \mathsf{H}(V)$ являются неотрицательными.

$\Downarrow$Покажем, что оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ является неотрицательным. Имеем в силу предложений сл.4 и 5 §1 $(\mathcal{A}^*\mathcal{A})^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$, т.е. $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ — самосопряженный оператор. Далее, $(\mathcal{A}^*\mathcal{A}x, x) = (\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x), x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) \geq 0$ для любого $x \in U$. Точно так же проверяется, что оператор $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ является неотрицательным. $\Uparrow$

В силу теоремы сл.2 все собственные значения операторов $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ являются неотрицательными действительными числами.

Теорема

Имеют место равенства $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \mathrm{Ker}\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathrm{r}(\mathcal{A}) = \mathrm{r}(\mathcal{A}^*\mathcal{A}) = \mathrm{r}(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)$.
Если $\lambda > 0$ — собственное значение оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и e — относящийся к нему собственный вектор-орт, то $|\mathcal{A}e| = \sqrt{\lambda}$ и $\mathcal{A}e$ — собственный вектор оператора $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$, относящийся к собственному значению λ.
Если e_1 и e_2 — ортогональные собственные векторы оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$, относящиеся к ненулевым собственным значениям оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$, то $\mathcal{A}e_1 \perp \mathcal{A}e_2$.
В частности, операторы $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ имеют одни и те же положительные собственные значения с учетом кратности.

$\Downarrow$Равенства $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \mathrm{Ker}\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathrm{r}(\mathcal{A}) = \mathrm{r}(\mathcal{A}^*\mathcal{A})$ следуют из предложения сл.15 §1.
Заменяя $\mathcal{A}$ на $\mathcal{A}^*$, получаем $\mathrm{r}(\mathcal{A}^*) = \mathrm{r}(\mathcal{A}^{**}\mathcal{A}^*)$ и $\mathrm{r}(\mathcal{A}^*) = \mathrm{r}(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)$.
Согласно предложению сл.8 §1 $\mathrm{r}(\mathcal{A}) = \mathrm{r}(\mathcal{A}^*)$, поэтому $\mathrm{r}(\mathcal{A}^*\mathcal{A}) = \mathrm{r}(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)$.
Пусть $(\mathcal{A}^*\mathcal{A})e = \lambda e$, $|e| = 1$ и $\lambda > 0$. Тогда
$\lambda = (\lambda e, e) = ((\mathcal{A}^*\mathcal{A})e, e) = (\mathcal{A}e, \mathcal{A}e) = |\mathcal{A}e|^2$, откуда $|\mathcal{A}e| = \sqrt{\lambda}$.
Далее, $(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)(\mathcal{A}e) = \mathcal{A}((\mathcal{A}^*\mathcal{A})e) = \mathcal{A}(\lambda e) = \lambda(\mathcal{A}e)$, т.е.
$(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)(\mathcal{A}e) = \lambda(\mathcal{A}e)$.

Операторы $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ – окончание

Пусть e_1 и e_2 — ортогональные собственные векторы оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$, относящиеся к ненулевым собственным значениям λ_1, λ_2 оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$. Тогда $(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2)_V = (e_1, \mathcal{A}^*\mathcal{A}e_2)_U = (e_1, \lambda_2 e_2)_U = \lambda_2(e_1, e_2)_U = 0.$⇑

Положим $n = \dim U$, $k = \dim V$, $r = \mathrm{r}(\mathcal{A})$ и пусть $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \ldots \geq \sigma_r^2 > 0$ — ненулевые собственные значения линейных операторов $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$, где $\sigma_1 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$. Зафиксируем ортонормированный базис $(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$, где e_j относится к σ_j^2 при $j = 1, \ldots, r$ и $e_j \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}$ при $j = r+1, \ldots, n$. Положим $f_j = \frac{1}{\sigma_j}\mathcal{A}e_j$ при $j = 1, \ldots, r$. Тогда в силу теоремы сл.6 система векторов $(f_1, \ldots, f_r)$ пространства V является ортонормированной. Дополним ее векторами $f_{r+1}, \ldots, f_k$ до ортонормированного базиса пространства V. Тогда $\mathrm{Im}\mathcal{A} = \langle f_1, \ldots, f_r \rangle$ и $(\mathrm{Im}\mathcal{A})^{\perp} = \langle f_{r+1}, \ldots, f_k \rangle$.
Итак, в пространствах U и V существуют ортонормированные базисы $(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ и $(f_1, \ldots, f_r, f_{r+1}, \ldots, f_k)$ такие, что

$$\begin{aligned} \mathcal{A}e_j &= \sigma_j f_j \quad (j = 1, \ldots, r) \\ \mathcal{A}e_j &= 0_V \quad (j = r+1, \ldots, n). \end{aligned} \tag{1}$$

Сингулярное разложение линейного отображения пространств со скалярным произведением

Мы почти доказали следующее утверждение.

Теорема

Пусть U и V – конечномерные евклидовы или унитарные пространства, $\mathcal{A} \in \mathsf{H}(U, V)$, $\mathcal{A} \neq \mathcal{O}$. Пусть $\dim U = n$, $\dim V = k$, $\mathrm{r}(\mathcal{A}) = r$. Тогда существуют такие ортонормированные базисы $(e_1, \dots, e_n)$ в U и $(f_1 \dots, f_k)$ в V, что $\mathcal{A}e_j = \sigma_j f_j$ при $j = 1, \dots, r$, $\mathcal{A}e_j = 0_V$ при $j = r+1, \dots, n$, все числа σ_j действительные, положительные и определены однозначно, независимо от выбора базиса $e_1, \dots, e_n$.

$\Downarrow$Докажем, что числа $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ не зависят от выбора базиса $(e_1, \dots, e_n)$.
Числа $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ из (1) обладают тем свойством, что $\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2$ — все ненулевые собственные значения линейного оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$.
Возьмем теперь произвольный ортонормированный базис $(e'_1, \dots, e'_n)$ пространства U, для которого существует ортонормированный базис $(f'_1, \dots, f'_k)$ пространства V такой что $\mathcal{A}e'_j = \sigma'_j f_j$, $\sigma'_j > 0$ при $j = 1, \dots, r$ и $\mathcal{A}e'_j = 0_V$ при $j = r+1, \dots, n$. Положим $S = [\sigma'_1, \dots, \sigma'_r]$ – диагональная $r \times r$-матрица. Тогда $\mathcal{A} \longleftrightarrow_{e,f} A$, где $A = \begin{pmatrix} S & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(k-r)\times r} & O_{(k-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$ – $k \times n$-матрица, полученная из S окаймлением нулевыми матрицами.

Согласно следствию сл.8 §1 $\mathcal{A}^* \longleftrightarrow_{f,e} A^* = A^\top$. Легко видеть, что $A^\top = \begin{pmatrix} S & O_{r\times(k-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(k-r)} \end{pmatrix}$ – $n \times k$-матрица. В силу предложения сл.7 §1 гл.IV $\mathcal{A}^*\mathcal{A} \longleftrightarrow_e A^\top \cdot A$. Имеем $A^\top \cdot A = \begin{pmatrix} S^2 & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(n-r)\times r} & O_{(n-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$ – $n \times n$-матрица. Следовательно, числа $\sigma_1'^2, \dots, \sigma_r'^2$ — все ненулевые собственные значения оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ с учетом кратности, которые не зависят от выбора базиса $(e_1', \dots, e_n')$. Значит, и положительные числа $\sigma_1', \dots, \sigma_r'$ не зависят от выбора ортонормированного базиса.$\Uparrow$

Определение

Числа $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ называются *сингулярными числами* линейного отображения $\mathcal{A}$.

Будем предполагать, что числа $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ упорядочены по невозрастанию, т.е. $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$.

Теорема

Пусть U и V – конечномерные евклидовы или унитарные пространства, $\mathcal{A} \in \mathsf{H}(U, V)$, $\mathcal{A} \neq \mathcal{O}$, σ – наибольшее сингулярное число отображения $\mathcal{A}$. Тогда для любого $x \in U$ справедливо неравенство $|\mathcal{A}x| \leq \sigma|x|$.

$\Downarrow$Пусть $\sigma = \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r$ – сингулярные числа отображения $\mathcal{A}$ и $e_1, \ldots, e_n$ – соответствующий ортонормированный базис пространства U. Пусть $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n$. Тогда $\mathcal{A}x = \mathcal{A}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 \mathcal{A}e_1 + \alpha_2 \mathcal{A}e_2 + \ldots + \alpha_n \mathcal{A}e_n = \alpha_1\sigma_1 f_1 + \alpha_2\sigma_2 f_2 + \ldots + \alpha_r\sigma_r f_r$. Так как $(f_1, f_2, \ldots, f_r)$ – ортонормированная система, $(\mathcal{A}x)^2 = \alpha_1\overline{\alpha}_1\sigma_1^2 + \alpha_2\overline{\alpha}_2\sigma_2^2 + \ldots + \alpha_r\overline{\alpha}_r\sigma_r^2 \leq \sigma_1^2(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \ldots + |\alpha_r|^2) \leq \sigma_1^2(|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \ldots + |\alpha_n|^2) = \sigma_1^2 x^2$, откуда $|\mathcal{A}x|^2 \leq \sigma_1^2|x|^2$ и $|\mathcal{A}x| \leq \sigma|x|$.$\Uparrow$

Следствие

Наибольшее сингулярное число отображения $\mathcal{A}$ есть $\sup_{|x|=1} |\mathcal{A}x|$.

$\Downarrow$При $|x| = 1$ имеем $|\mathcal{A}x| \leq \sigma$, при $x = e_1$ получается равенство.$\Uparrow$

Теорема

Для любой ненулевой $k \times n$-матрицы A ранга r с действительными (соотв. комплексными) элементами существуют положительные числа $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \ldots \geq \sigma_r > 0$ и ортогональные (соотв. унитарные) матрицы L, R подходящих размеров такие что

$$A = L \cdot \begin{pmatrix} [\sigma_1, \ldots, \sigma_r] & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(k-r)\times r} & O_{(k-r)\times(n-r)} \end{pmatrix} \cdot R^*. \tag{2}$$

При этом числа $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ однозначно определены матрицей A. Представление (2) называется *сингулярным разложением матрицы A* (в произведение матриц).

$\Downarrow$Рассмотрим случай $A \in \mathbb{C}^{k\times n}$. Случай $A \in \mathbb{R}^{k\times n}$ рассматривается аналогично. Положим $U = \mathbb{C}_n$, $V = \mathbb{C}_k$ и определим линейное отображение $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$, полагая $\mathcal{A}x = A \cdot x$ для любого $x \in U$. Пусть $(b_1, \ldots, b_n)$ и $(c_1, \ldots, c_k)$ – базисы пространств U и V из столбцов единичных матриц E_n и E_k соответственно. Примеры сл.4 и сл.14 §1 гл.III показывают, что $\mathcal{A} \longleftrightarrow_{b,c} A$. Следовательно, по предложению сл.4 §2 гл.III $\mathrm{r}(\mathcal{A}) = r$.

Окончание доказательства теоремы

В силу теоремы сл.8 существуют такие ортонормированные базисы $(e_1, \ldots, e_n)$ в U и $(f_1 \ldots, f_k)$ в V, что $\mathcal{A}e_j = \sigma_j f_j$ при $j = 1, \ldots, r$, $\mathcal{A}e_j = 0_V$ при $j = r+1, \ldots, n$, все числа σ_j действительные, положительные и определены однозначно, независимо от выбора базиса $e_1, \ldots, e_n$. Относительно этих базисов отображение $\mathcal{A}$ имеет матрицу $A_1 = \begin{pmatrix} [\sigma_1, \ldots, \sigma_r] & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(k-r)\times r} & O_{(k-r)\times(n-r)} \end{pmatrix}$. Согласно формуле сл.21 §1 гл.III $A_1 = T_{c,f}^{-1} \cdot A \cdot T_{b,e}$. Матрицы $T_{c,f}$ и $T_{b,e}$ являются унитарными в силу предложения сл.7 §2. Обратная к унитарной матрице T также является унитарной и $T^{-1} = T^* = \overline{T^\top}$. Таким образом, $A = T_{c,f} \cdot A_1 \cdot T_{b,e}^{-1}$ и можно положить $L = T_{c,f}$, $R = T_{b,e}$.$\Uparrow$

Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. $A^\top \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & 4 \\ 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}$.

2. $\chi_{A^\top \cdot A}(x) = \begin{vmatrix} 10-x & -4 & 6 \\ -4 & 8-x & 4 \\ 6 & 4 & 10-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16-x & 0 & 16-x \\ -4 & 8-x & 4 \\ 6 & 4 & 10-x \end{vmatrix} =$

$(16-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 8-x & 4 \\ 6 & 4 & 10-x \end{vmatrix} = (16-x)\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 8-x & 8 \\ 6 & 4 & 4-x \end{vmatrix} =$

$(16-x)((8-x)(4-x)-32) = (16-x)(12-x)x.$

3. Собственные значения матрицы $A^\top \cdot A$: $\lambda_1 = 16$, $\lambda_2 = 12$, $\lambda_3 = 0$;
сингулярные числа матрицы A: $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 2\sqrt{3}$.

4. Собственные векторы матрицы $A^\top \cdot A$: $\lambda_3 = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & 10 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 8 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,-1,1)$;

$$\lambda_1 = 16,\ \begin{pmatrix} 10 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -4 & 6 \\ -4 & -8 & 4 \\ 6 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix},\ e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1),$$

для $\lambda_2 = 12$ $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1)$.

5. Матрица $R^\top$: $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

6. $\sigma_1 f_1 = A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$, $f_1 = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$,

$$\sigma_2 f_2 = A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{\sqrt{6}} \\ \frac{6}{\sqrt{6}} \end{pmatrix},\ f_2 = (-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

7. Матрица $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

8. Сингулярное раложение матрицы A: $A = L \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot R^{\top}$.

Определение

Представление линейного оператора $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$ в виде произведения неотрицательного оператора $\mathcal{B}$ и изометрического оператора $\mathcal{C}$ называется *полярным разложением* оператора $\mathcal{A}$.

Для построения полярного разложения рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A}$ ранга r евклидова или унитарного пространства U размерности n и ортонормированные базисы $(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n)$ и $(f_1, \ldots, f_r, f_{r+1}, \ldots, f_n)$ такие, что справедливы равенства (1) сл.7: $\mathcal{A}e_j = \sigma_j f_j \ \ (j = 1, \ldots, r)$ и $\mathcal{A}e_j = 0_V \ \ (j = r+1, \ldots, n)$. Пусть $\mathcal{C}$ — единственный линейный оператор пространства U такой, что $\mathcal{C}e_j = f_j$ при $j = 1, \ldots, n$. Тогда $\mathcal{C}$ — изометрический оператор в силу наблюдения сл.11 §3. Пусть $\mathcal{B}$ — неотрицательный линейный оператор такой, что $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$. По теореме сл. 4 оператор $\mathcal{B}$ — единственный.

В силу теоремы сл.6 $\mathcal{A}\mathcal{A}^* f_j = \sigma_j^2 f_j$ при $j = 1, \ldots, r$ и $\mathcal{A}\mathcal{A}^* f_j = 0_V$ при $j = r+1, \ldots, n$, поэтому по теореме сл.4 $\mathcal{B}f_j = \sigma_j f_j$ при $j = 1, \ldots, r$ и $\mathcal{B}f_j = 0_U$ при $j = r+1, \ldots, n$.

Покажем, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$. Пусть $v \in U$, $v = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j e_j$. Тогда $\mathcal{A}v = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathcal{A}e_j = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \sigma_j f_j$. Далее, $(\mathcal{B}\mathcal{C})v = \mathcal{B}(\mathcal{C}v) = \mathcal{B}(\mathcal{C}(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j)) = \mathcal{B}(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j f_j) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathcal{B}f_j = \sum_{j=1}^{r} \lambda_j \sigma_j f_j$, что и требуется.

В полярном разложении $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}$ линейного оператора $\mathcal{A}$ неотрицательный оператор $\mathcal{B}$ определен однозначно: $\mathcal{A}^* = (\mathcal{B}\mathcal{C})^* = \mathcal{C}^*\mathcal{B}^* = \mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}$, поэтому $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = (\mathcal{B}\mathcal{C})(\mathcal{C}^{-1}\mathcal{B}) = \mathcal{B}^2$ и $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$.
Изометрический оператор $\mathcal{C}$ определен однозначно только в случае, когда оператор $\mathcal{A}$ обратим. Тогда и оператор $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ обратим согласно теореме сл.6; оператор $\mathcal{B}$ также обратим и $\mathcal{C} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$.

Найти полярное разложение линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного в ортонормированном базисе евклидова пространства матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\mathcal{A}^*$ имеет матрицу $A^\top = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Оператор

$\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ имеет матрицу $A \cdot A^\top = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$. Извлекаем из $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ квадратный корень, получаем оператор $\mathcal{B}$ с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 2\sqrt{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

Находим матрицу оператора $\mathcal{C}$: $C = B^{-1} \cdot A =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\sqrt{\frac{2}{5}} & -\sqrt{\frac{2}{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \sqrt{\frac{2}{5}} & -\sqrt{\frac{2}{5}} \\ \sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверяем: $C^{\top} \cdot C = E_4$, т.е. C – ортогональная матрица и $\mathcal{C}$ – ортогональный оператор.

Полярное разложение: $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{C}^*$.