

Глава VI. Линейные отображения и операторы пространств со скалярным произведением

§ 4. Неотрицательные операторы

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Определение

Линейный оператор \mathcal{A} евклидова или унитарного пространства V называется **неотрицательным** (соотв. **положительным**), если \mathcal{A} самосопряженный и для любого $x \in V$ имеет место $(\mathcal{A}x, x) \geq 0$ (соотв. $(\mathcal{A}x, x) > 0$ при $x \neq 0_V$).

Заметим, что для самосопряженного оператора унитарного пространства $(\mathcal{A}x, x) = (x, \mathcal{A}x) = \overline{(\mathcal{A}x, x)}$, поэтому $(\mathcal{A}x, x) \in \mathbb{R}$. Напомним, что все корни характеристического многочлена самосопряженного оператора – действительные числа.

Теорема

Самосопряженный линейный оператор \mathcal{A} евклидова или унитарного пространства V является неотрицательным (соотв. положительным) тогда и только тогда, когда все его собственные значения неотрицательны (соотв. положительны).

↓ Пусть λ – собственное значение оператора \mathcal{A} и x – относящийся к нему собственный вектор. Так как $(\mathcal{A}x, x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x)$ и $(x, x) > 0$, получаем $\lambda \geq 0$ для неотрицательного и $\lambda > 0$ для положительного оператора.

Предположим, что все собственные значения с учетом кратности $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ линейного оператора \mathcal{A} евклидова или унитарного пространства V неотрицательны (соотв. положительны). Пространство V имеет ортонормированный базис e_1, \dots, e_n из собственных векторов оператора \mathcal{A} .

Пусть $x \in V$, $x = \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n$. Тогда

$$(\mathcal{A}x, x) = (\mathcal{A}(\xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n), \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n) =$$

$$(\xi_1 \mathcal{A}e_1 + \dots + \xi_n \mathcal{A}e_n, \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n) =$$

$$(\xi_1 \lambda_1 e_1 + \dots + \xi_n \lambda_n e_n, \xi_1 e_1 + \dots + \xi_n e_n) = \lambda_1 \xi_1 \overline{\xi_1} + \dots + \lambda_n \xi_n \overline{\xi_n}.$$

Поскольку $\xi_j \overline{\xi_j} = |\xi_j|^2 \geq 0$ и при $x \neq 0_V$ найдется j при котором $|\xi_j| > 0$, получаем требуемое заключение. \uparrow

Следствие

Неотрицательный оператор является обратимым тогда и только тогда, когда он положителен.

Это утверждение непосредственно следует из предложения сл.13 §3 гл.III и доказанной только что теоремы.

Теорема

Для любого неотрицательного линейного оператора A евклидова или унитарного пространства V размерности n существует единственный неотрицательный линейный оператор B пространства V такой что $B^2 = A$.

↓ Выберем в пространстве V ортонормированный базис e_1, \dots, e_n из собственных векторов оператора A . Пусть $Ae_j = \lambda_j e_j$, $\lambda_j \geq 0$, $j = 1, \dots, n$. Определим оператор B , полагая $Be_j = \sqrt{\lambda_j} e_j$ ($j = 1, \dots, n$). Тогда B – неотрицательный линейный оператор пространства V и $B^2 = A$. Докажем единственность. Пусть C – неотрицательный линейный оператор пространства V и $C^2 = A$. так как $CA = C^3 = AC$, операторы A и C перестановочны. Тогда и операторы $A - \lambda E$ и C перестановочны. В силу предложения сл.10 §1 гл.IV все корневые подпространства оператора A , будучи ядрами операторов $A - \lambda E$ для некоторых скаляров λ , инвариантны относительно C . Пусть $U = V(A, \lambda)$ – такое подпространство. Тогда для любого $u \in U$ справедливо $Au = \lambda u$. Покажем, что $C|_U = B|_U$. Этим теорема будет доказана. Поскольку $\chi_{C|_U}$ делит χ_C , оператор $C|_U$ является неотрицательным и в подпространстве U имеется ортонормированный базис из собственных векторов $C|_U$. Для любого вектора g этого базиса имеем $Cg = \mu_g g$, где $\mu_g \geq 0$. Тогда $\lambda g = Ag = C^2 g = \mu_g^2 g$ и $\mu_g = \sqrt{\lambda}$. Так как $Bg = \sqrt{\lambda} g$ по определению, получаем требуемое. ↑

Пусть U, V — конечномерные евклидовы или унитарные пространства и $\mathcal{A} \in \mathcal{H}(U, V)$. Тогда $\mathcal{A}^* \mathcal{A} \in \mathcal{H}(U)$, $\mathcal{A} \mathcal{A}^* \in \mathcal{H}(V)$.

Предложение

Операторы $\mathcal{A}^* \mathcal{A} \in \mathcal{H}(U)$ и $\mathcal{A} \mathcal{A}^* \in \mathcal{H}(V)$ являются неотрицательными.

↓ Покажем, что оператор $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$ является неотрицательным. Имеем в силу предложений сл.4 и 5 §1 $(\mathcal{A}^* \mathcal{A})^* = \mathcal{A}^* \mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}^* \mathcal{A}$, т.е. $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$ — самосопряженный оператор. Далее, $(\mathcal{A}^* \mathcal{A}x, x) = (\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x), x) = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) \geq 0$ для любого $x \in U$. Точно так же проверяется, что оператор $\mathcal{A} \mathcal{A}^*$ является неотрицательным. ↑

В силу теоремы сл.2 все собственные значения операторов $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} \mathcal{A}^*$ являются неотрицательными действительными числами.

Теорема

Имеют место равенства $\text{Ker} \mathcal{A} = \text{Ker} \mathcal{A}^* \mathcal{A}$ и $r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}^* \mathcal{A}) = r(\mathcal{A} \mathcal{A}^*)$.

Если $\lambda > 0$ — собственное значение оператора $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$ и e — относящийся к нему собственный вектор-орт, то $|\mathcal{A}e| = \sqrt{\lambda}$ и $\mathcal{A}e$ — собственный вектор оператора $\mathcal{A} \mathcal{A}^*$, относящийся к собственному значению λ .

Если e_1 и e_2 — ортогональные собственные векторы оператора $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$, относящиеся к ненулевым собственным значениям оператора $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$, то $\mathcal{A}e_1 \perp \mathcal{A}e_2$.

В частности, операторы $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} \mathcal{A}^*$ имеют одни и те же положительные собственные значения с учетом кратности.

↓ Равенства $\text{Ker} \mathcal{A} = \text{Ker} \mathcal{A}^* \mathcal{A}$ и $r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}^* \mathcal{A})$ следуют из предложения сл.15 §1.

Заменяя \mathcal{A} на \mathcal{A}^* , получаем $r(\mathcal{A}^*) = r(\mathcal{A}^{**} \mathcal{A}^*)$ и $r(\mathcal{A}^*) = r(\mathcal{A} \mathcal{A}^*)$.

Согласно предложению сл.8 §1 $r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}^*)$, поэтому $r(\mathcal{A}^* \mathcal{A}) = r(\mathcal{A} \mathcal{A}^*)$.

Пусть $(\mathcal{A}^* \mathcal{A})e = \lambda e$, $|e| = 1$ и $\lambda > 0$. Тогда

$$\lambda = (\lambda e, e) = ((\mathcal{A}^* \mathcal{A})e, e) = (\mathcal{A}e, \mathcal{A}e) = |\mathcal{A}e|^2, \text{ откуда } |\mathcal{A}e| = \sqrt{\lambda}.$$

Далее, $(\mathcal{A} \mathcal{A}^*)(\mathcal{A}e) = \mathcal{A}((\mathcal{A}^* \mathcal{A})e) = \mathcal{A}(\lambda e) = \lambda(\mathcal{A}e)$, т.е.

$$(\mathcal{A} \mathcal{A}^*)(\mathcal{A}e) = \lambda(\mathcal{A}e).$$

Пусть e_1 и e_2 — ортогональные собственные векторы оператора $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$, относящиеся к ненулевым собственным значениям λ_1, λ_2 оператора $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$. Тогда $(\mathcal{A}e_1, \mathcal{A}e_2)_V = (e_1, \mathcal{A}^* \mathcal{A}e_2)_U = (e_1, \lambda_2 e_2)_U = \lambda_2 (e_1, e_2)_U = 0$. ↑

Положим $n = \dim U$, $k = \dim V$, $r = r(\mathcal{A})$ и пусть $\sigma_1^2 \geq \sigma_2^2 \geq \dots \geq \sigma_r^2 > 0$ — ненулевые собственные значения линейных операторов $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$ и $\mathcal{A} \mathcal{A}^*$, где $\sigma_1 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$. Зафиксируем ортонормированный базис

$(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ из собственных векторов оператора $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$, где e_j относится к σ_j^2 при $j = 1, \dots, r$ и $e_j \in \text{Ker } \mathcal{A}$ при $j = r + 1, \dots, n$. Положим $f_j = \frac{1}{\sigma_j} \mathcal{A}e_j$ при $j = 1, \dots, r$. Тогда в силу теоремы сл.б система векторов (f_1, \dots, f_r) пространства V является ортонормированной. Дополним ее векторами f_{r+1}, \dots, f_k до ортонормированного базиса пространства V . Тогда $\text{Im } \mathcal{A} = \langle f_1, \dots, f_r \rangle$ и $(\text{Im } \mathcal{A})^\perp = \langle f_{r+1}, \dots, f_k \rangle$.

Итак, в пространствах U и V существуют ортонормированные базисы $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ и $(f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_k)$ такие, что

$$\begin{aligned} \mathcal{A}e_j &= \sigma_j f_j \quad (j = 1, \dots, r) \\ \mathcal{A}e_j &= 0_V \quad (j = r + 1, \dots, n). \end{aligned} \tag{1}$$

Сингулярное разложение линейного отображения пространств со скалярным произведением

Мы почти доказали следующее утверждение.

Теорема

Пусть U и V – конечномерные евклидовы или унитарные пространства, $\mathcal{A} \in \mathcal{H}(U, V)$, $\mathcal{A} \neq \mathcal{O}$. Пусть $\dim U = n$, $\dim V = k$, $r(\mathcal{A}) = r$. Тогда существуют такие ортонормированные базисы (e_1, \dots, e_n) в U и (f_1, \dots, f_k) в V , что $\mathcal{A}e_j = \sigma_j f_j$ при $j = 1, \dots, r$, $\mathcal{A}e_j = 0_V$ при $j = r + 1, \dots, n$, все числа σ_j действительные, положительные и определены однозначно, независимо от выбора базиса e_1, \dots, e_n .

↓ Докажем, что числа $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ не зависят от выбора базиса (e_1, \dots, e_n) .

Числа $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ из (1) обладают тем свойством, что $\sigma_1^2, \dots, \sigma_r^2$ – все ненулевые собственные значения линейного оператора $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$.

Возьмем теперь произвольный ортонормированный базис (e'_1, \dots, e'_n) пространства U , для которого существует ортонормированный базис (f'_1, \dots, f'_k) пространства V такой что $\mathcal{A}e'_j = \sigma'_j f'_j$, $\sigma'_j > 0$ при $j = 1, \dots, r$ и $\mathcal{A}e'_j = 0_V$ при $j = r + 1, \dots, n$. Положим $S = [\sigma'_1, \dots, \sigma'_r]$ – диагональная $r \times r$ -матрица. Тогда $\mathcal{A} \xleftrightarrow{e, f} A$, где $A = \begin{pmatrix} S & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(k-r) \times r} & O_{(k-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}$ – $k \times n$ -матрица, полученная из S окаймлением нулевыми матрицами.

Согласно следствию сл.8 §1 $\mathcal{A}^* \longleftrightarrow_{f,e} \mathcal{A}^* = A^\top$. Легко видеть, что

$A^\top = \begin{pmatrix} S & O_{r \times (k-r)} \\ O_{(n-r) \times r} & O_{(n-r) \times (k-r)} \end{pmatrix}$ – $n \times k$ -матрица. В силу предложения

сл.7 §1 гл.IV $\mathcal{A}^* \mathcal{A} \longleftrightarrow_e A^\top \cdot A$. Имеем

$A^\top \cdot A = \begin{pmatrix} S^2 & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(n-r) \times r} & O_{(n-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}$ – $n \times n$ -матрица. Следовательно,

числа $\sigma_1'^2, \dots, \sigma_r'^2$ – все ненулевые собственные значения оператора $\mathcal{A}^* \mathcal{A}$ с учетом кратности, которые не зависят от выбора базиса (e'_1, \dots, e'_n) .

Значит, и положительные числа $\sigma_1', \dots, \sigma_r'$ не зависят от выбора ортонормированного базиса. \uparrow

Определение

Числа $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ называются *сингулярными числами* линейного отображения \mathcal{A} .

Будем предполагать, что числа $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_r$ упорядочены по невозрастанию, т.е. $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$.

Теорема

Пусть U и V – конечномерные евклидовы или унитарные пространства, $\mathcal{A} \in \mathcal{H}(U, V)$, $\mathcal{A} \neq \mathcal{O}$, σ – наибольшее сингулярное число отображения \mathcal{A} . Тогда для любого $x \in U$ справедливо неравенство $|\mathcal{A}x| \leq \sigma|x|$.

↓ Пусть $\sigma = \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r$ – сингулярные числа отображения \mathcal{A} и e_1, \dots, e_n – соответствующий ортонормированный базис пространства U .

Пусть $x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n$. Тогда

$\mathcal{A}x = \mathcal{A}(\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n) = \alpha_1 \mathcal{A}e_1 + \alpha_2 \mathcal{A}e_2 + \dots + \alpha_n \mathcal{A}e_n = \alpha_1 \sigma_1 f_1 + \alpha_2 \sigma_2 f_2 + \dots + \alpha_r \sigma_r f_r$. Так как (f_1, f_2, \dots, f_r) – ортонормированная система, $(\mathcal{A}x)^2 = \alpha_1 \bar{\alpha}_1 \sigma_1^2 + \alpha_2 \bar{\alpha}_2 \sigma_2^2 + \dots + \alpha_r \bar{\alpha}_r \sigma_r^2 \leq \sigma_1^2 (|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_r|^2) \leq \sigma_1^2 (|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2 + \dots + |\alpha_n|^2) = \sigma_1^2 x^2$, откуда $|\mathcal{A}x|^2 \leq \sigma_1^2 |x|^2$ и $|\mathcal{A}x| \leq \sigma|x|$. ↑

Следствие

Наибольшее сингулярное число отображения \mathcal{A} есть $\sup_{|x|=1} |\mathcal{A}x|$.

↓ При $|x| = 1$ имеем $|\mathcal{A}x| \leq \sigma$, при $x = e_1$ получается равенство. ↑

Теорема

Для любой ненулевой $k \times n$ -матрицы A ранга r с действительными (соотв. комплексными) элементами существуют положительные числа $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$ и ортогональные (соотв. унитарные) матрицы L, R подходящих размеров такие что

$$A = L \cdot \begin{pmatrix} [\sigma_1, \dots, \sigma_r] & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(k-r) \times r} & O_{(k-r) \times (n-r)} \end{pmatrix} \cdot R^*. \quad (2)$$

При этом числа $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ однозначно определены матрицей A . Представление (2) называется *сингулярным разложением матрицы A* (в произведение матриц).

↓ Рассмотрим случай $A \in \mathbb{C}^{k \times n}$. Случай $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ рассматривается аналогично. Положим $U = \mathbb{C}_n$, $V = \mathbb{C}_k$ и определим линейное отображение $\mathcal{A} : U \rightarrow V$, полагая $\mathcal{A}x = A \cdot x$ для любого $x \in U$. Пусть (b_1, \dots, b_n) и (c_1, \dots, c_k) – базисы пространств U и V из столбцов единичных матриц E_n и E_k соответственно. Примеры 4 и 14 §1 гл.III показывают, что $\mathcal{A} \xleftrightarrow{b,c} A$. Следовательно, по предложению сл.4 §2 гл.III $r(\mathcal{A}) = r$.

В силу теоремы сл.8 существуют такие ортонормированные базисы (e_1, \dots, e_n) в U и (f_1, \dots, f_k) в V , что $\mathcal{A}e_j = \sigma_j f_j$ при $j = 1, \dots, r$, $\mathcal{A}e_j = 0_V$ при $j = r + 1, \dots, n$, все числа σ_j действительные, положительные и определены однозначно, независимо от выбора базиса e_1, \dots, e_n . Относительно этих базисов отображение \mathcal{A} имеет матрицу

$$A_1 = \begin{pmatrix} [\sigma_1, \dots, \sigma_r] & O_{r \times (n-r)} \\ O_{(k-r) \times r} & O_{(k-r) \times (n-r)} \end{pmatrix}. \text{ Согласно формуле сл.21 §1 гл.III}$$

$A_1 = T_{c,f}^{-1} \cdot A \cdot T_{b,e}$. Матрицы $T_{c,f}$ и $T_{b,e}$ являются унитарными в силу предложения сл.7 §2. Обратная к унитарной матрице T также является унитарной и $T^{-1} = T^* = \overline{T^T}$. Таким образом, $A = T_{c,f} \cdot A_1 \cdot T_{b,e}^{-1}$ и можно положить $L = T_{c,f}$, $R = T_{b,e}$. ↑

Построить сингулярное разложение матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

$$1. A^T \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & 4 \\ 6 & 4 & 10 \end{pmatrix}.$$

$$2. \chi_{A^T \cdot A}(x) = \begin{vmatrix} 10-x & -4 & 6 \\ -4 & 8-x & 4 \\ 6 & 4 & 10-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 16-x & 0 & 16-x \\ -4 & 8-x & 4 \\ 6 & 4 & 10-x \end{vmatrix} =$$

$$(16-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -4 & 8-x & 4 \\ 6 & 4 & 10-x \end{vmatrix} = (16-x) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 8-x & 8 \\ 6 & 4 & 4-x \end{vmatrix} =$$

$$(16-x)((8-x)(4-x) - 32) = (16-x)(12-x)x.$$

3. Собственные значения матрицы $A^T \cdot A$: $\lambda_1 = 16$, $\lambda_2 = 12$, $\lambda_3 = 0$;
сингулярные числа матрицы A : $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 2\sqrt{3}$.

4. Собственные векторы матрицы $A^T \cdot A$: $\lambda_3 = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 6 & 4 & 10 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 10 & -4 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -4 & 8 & 4 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

$$e_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, -1, 1);$$

$$\lambda_1 = 16, \begin{pmatrix} 10 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 4 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -4 & 6 \\ -4 & -8 & 4 \\ 6 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & -2 \end{pmatrix}, e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1),$$

для $\lambda_2 = 12$ $e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, -2, -1)$.

5. Матрица R^T :
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

6. $\sigma_1 f_1 = A \cdot e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{2}} \\ \frac{4}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, f_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$

$\sigma_2 f_2 = A \cdot e_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{6}{\sqrt{6}} \\ \frac{6}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}, f_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$

7. Матрица $L = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$

8. Сингулярное разложение матрицы A : $A = L \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix} \cdot R^T$.

Определение

Представление линейного оператора $A = BC$ в виде произведения неотрицательного оператора B и изометрического оператора C называется **полярным разложением** оператора A .

Для построения полярного разложения рассмотрим линейный оператор A ранга r евклидова или унитарного пространства U размерности n и ортонормированные базисы $(e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ и

$(f_1, \dots, f_r, f_{r+1}, \dots, f_n)$ такие, что справедливы равенства (1) сл.7:

$Ae_j = \sigma_j f_j$ ($j = 1, \dots, r$) и $Ae_j = 0_V$ ($j = r + 1, \dots, n$). Пусть C —

единственный линейный оператор пространства U такой, что $Ce_j = f_j$ при $j = 1, \dots, n$. Тогда C — изометрический оператор в силу наблюдения сл.11

§3. Пусть B — неотрицательный линейный оператор такой, что $B^2 = AA^*$.

По теореме сл. 4 оператор B — единственный.

В силу теоремы сл.6 $AA^* f_j = \sigma_j^2 f_j$ при $j = 1, \dots, r$ и $AA^* f_j = 0_V$ при $j = r + 1, \dots, n$, поэтому по теореме сл.4 $Bf_j = \sigma_j f_j$ при $j = 1, \dots, r$ и $Bf_j = 0_U$ при $j = r + 1, \dots, n$.

Покажем, что $A = BC$. Пусть $v \in U$, $v = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$. Тогда

$Av = \sum_{j=1}^n \lambda_j Ae_j = \sum_{j=1}^r \lambda_j \sigma_j f_j$. Далее, $(BC)v = B(Cv) =$

$B(C(\sum_{j=1}^n \lambda_j e_j)) = B(\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j) = \sum_{j=1}^n \lambda_j Bf_j = \sum_{j=1}^r \lambda_j \sigma_j f_j$, что и требуется.

В полярном разложении $A = BC$ линейного оператора A неотрицательный оператор B определен однозначно: $A^* = (BC)^* = C^*B^* = C^{-1}B$, поэтому $AA^* = (BC)(C^{-1}B) = B^2$ и $B^2 = AA^*$.

Изометрический оператор C определен однозначно только в случае, когда оператор A обратим. Тогда и оператор AA^* обратим согласно теореме сл.б; оператор B также обратим и $C = B^{-1}A$.

Найти полярное разложение линейного оператора \mathcal{A} , заданного в ортонормированном базисе евклидова пространства матрицей

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -4 & -4 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 4 & 4 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Оператор \mathcal{A}^* имеет матрицу $A^T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ -4 & 2 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Оператор

$\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ имеет матрицу $A \cdot A^T = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$. Извлекаем из $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$

квадратный корень, получаем оператор \mathcal{B} с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} 2\sqrt{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sqrt{10} \end{pmatrix}.$$

Пример (1)

Находим матрицу оператора \mathcal{C} : $C = B^{-1} \cdot A =$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & -\sqrt{\frac{2}{5}} & -\sqrt{\frac{2}{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \sqrt{\frac{2}{5}} & -\sqrt{\frac{2}{5}} \\ \sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}} & \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ -\sqrt{\frac{2}{5}} & \sqrt{\frac{2}{5}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверяем: $C^T \cdot C = E_4$, т.е. C – ортогональная матрица и \mathcal{C} – ортогональный оператор.

Полярное разложение: $A = BC^*$.