# Глава VI. Линейные отображения и операторы пространств со скалярным произведением
# § 3. Самосопряженные и изометрические операторы

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика

**Определение**

Линейный оператор $\mathcal{A}$ евклидова или унитарного пространства $V$ называется *самосопряженным*, если $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$.

Из определения самосопряженного оператора и следствия сл.10 §1 с учетом предложения сл.7 §3 гл.III вытекает следующее

**Предложение**

Следующие условия эквивалентны для линейного оператора $\mathcal{A}$ конечномерного евклидова или унитарного пространства $V$:
(1) $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор;
(2) матрица $A$ оператора $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе удовлетворяет условию $A = A^*$;
(3) матрица $A$ оператора $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе удовлетворяет условию $A = A^*$.

**Определения**

Матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется *эрмитовой*, если $A^* = A$. Напомним, что матрица $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ называется *симметрической*, если $A^\top = A$.

**Теорема**

Линейный оператор $\mathcal{A}$ конечномерного унитарного пространства $V$ является самосопряженным тогда и только тогда, когда $V$ имеет ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ и все его собственные значения – действительные числа.

$\Downarrow$Пусть $V$ имеет ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ и все его собственные значения – действительные числа. Тогда матрица $A$ оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе – диагональная с действительными числами на главной диагонали. Так как $A = A^*$, оператор $\mathcal{A}$ является самосопряженным.
Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ пространства $V$ является самосопряженным. Тогда $\mathcal{A}$ является нормальным оператором и в силу теоремы сл.6 §2 $V$ имеет ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Пусть $\lambda$ – собственное значение оператора $\mathcal{A}$. Возьмем собственный вектор $v$, относящийся к $\lambda$. Тогда по утверждению 2 предложения сл.4 §2 $v$ является собственным вектором, относящимся к собственному значению $\overline{\lambda}$ оператора $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. Таким образом, $\lambda v = \mathcal{A}v = \overline{\lambda}v$. Из условия $v \neq 0_V$ получаем $\lambda = \overline{\lambda}$, т.е. $\lambda$ – действительное число. Теорема доказана.$\Uparrow$

### Следствие 1

Все корни характеристического многочлена произвольной эрмитовой матрицы, в частности, произвольной симметрической матрицы с действительными элементами являются действительными числами.

⇓Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ – матрица, удовлетворяющая условию следствия. Определим линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве столбцов $\mathbb{C}_n$ с помощью матрицы $A$, полагая $\mathcal{A}x = A\cdot x$ для любого $x \in \mathbb{C}_n$. Так как этот оператор имеет в ортонормированном базисе из столбцов единичной матрицы $E_n$ матрицу $A$, в силу предложения сл.2 $\mathcal{A}$ является самосопряженным оператором, и по теореме сл.3 все собственные значения оператора $\mathcal{A}$ (т.е. корни характеристического многочлена матрицы $A$) – действительные числа.⇑

### Следствие 2

Квадратная матрица $A$ порядка $n$ с комплексными элементами является эрмитовой тогда и только тогда, когда существуют унитарная матрица $T$ и диагональная матрица $D$ порядка $n$ с действительными элементами такие, что $A = T\cdot D\cdot T^*$.

⇓Это утверждение доказывается аналогично следствию сл.8 §2.⇑

**Теорема**

Линейный оператор $\mathcal{A}$ конечномерного евклидова пространства $V$ является самосопряженным тогда и только тогда, когда $V$ имеет ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

$\Downarrow$Если $V$ имеет ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$, то матрица $A$ оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе – диагональная (с действительными числами на главной диагонали). Так как $A = A^{\top}$, оператор $\mathcal{A}$ является самосопряженным.
Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ пространства $V$ является самосопряженным. Тогда его матрица в ортонормированном базисе является симметрической матрицей с действительными элементами и по следствию 1 сл.4 все корни ее характеристического многочлена – действительные числа. Таким образом, характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}$ разлагается на линейные множители. Окончание доказательства может быть проведено точно так же, как и доказательство соответствующей части теоремы сл.6 §2.$\Uparrow$
Другой вариант см. на сл.6. Аналогично может быть доказана и соответствующая часть теоремы сл.6 §2.

$\Downarrow$Докажем, что евклидово пространство $V$ имеет ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного оператора $\mathcal{A}$, используя индукцию по $\dim V$. База индукции. При $\dim V = 1$ любой оператор является самосопряженным, и для него ортонормированный базис состоит из орта пространства $V$.
Шаг индукции. Предположим, что для любого самосопряженного оператора на евклидовом пространстве размерности меньше $n$ существует ортонормированный базис из собственных векторов. Пусть $V$ – евклидово пространство, $\dim V = n$ и $\mathcal{A}$ – самосопряженный линейный оператор на $V$. Так как характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}$ разлагается на линейные множители, он имеет корень $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ и существует собственный вектор-орт $e_1$ оператора $\mathcal{A}$, относящийся к $\lambda_1$. Положим $U = \{e_1\}^{\perp}$. Согласно утверждению 1 предложения сл.14 §1 подпространство $U$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}$. Поскольку $(\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}y)$ для любых $x, y \in U$, ограничение $\mathcal{A}|_U$ является самосопряженным оператором. Так как $\dim U = n - 1$, к этому ограничению применимо предположение индукции. Следовательно, $U$ имеет ортонормированный базис из собственных векторов $\mathcal{A}|_U$, т.е. собственных векторов $\mathcal{A}$. Добавив к этому базису вектор $e_1$, получим ортонормированный базис $V$ из собственных векторов $\mathcal{A}$, что и требуется доказать.$\Uparrow$

# Следствие для симметрических матриц

## Определение

Матрица $T \in \mathbb{R}^{n\times n}$ называется *ортогональной*, если $T^\top \cdot T = E_n$.

По определению ортогональная матрица $T$ является обратимой и $T^{-1} = T^\top$. Аналогично предложению сл.7 §1 доказывается следующее

## Предложение

Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису в конечномерном евклидовом пространстве является ортогональной.

## Следствие

Квадратная матрица $A$ порядка $n$ с действительными элементами является симметрической тогда и только тогда, когда существуют ортогональная матрица $T$ и диагональная матрица $D$ порядка $n$ с действительными элементами такие, что $A = T \cdot D \cdot T^\top$.

$\Downarrow$Доказательство проводится так же, как доказательство следствия 2 сл.4.$\Uparrow$

# Пример

Найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу в этом базисе для самосопряженного линейного оператора $\mathcal{A}$ евклидова пространства, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Найдем характеристический многочлен: (вычитаем из 1-й строки 2-ю, из 3-й 4-ю; выносим из 1-й строки $x+1$, из 3-й — $x-1$; к 2-му столбцу прибавляем 1-й, к 3-му 4-й; применяем теорему Лапласа к 1-й и 3-й строкам)

$$\chi_{\mathcal{A}} = \chi_A = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2-x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1-x & 1+x & 0 & 0 \\ 2 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-x & x-1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} =$$

$$(x+1)(x-1)\begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1-x & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2-x \end{vmatrix} = (x^2-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3-x & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3-x & 2-x \end{vmatrix} =$$

$$(x^2-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}(-1)^{1+3+2+3}\begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 2 & 3-x \end{vmatrix} =$$

$(x^2-1)(x-1)(x-5) = (x-1)^2(x+1)(x-5)$. Собственные значения оператора $\mathcal{A}$: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 5$.

Найдем собственные векторы оператора $\mathcal{A}$ для собственного значения $\lambda_1$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Базис в $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\mathcal{E})$ образуют векторы $a_1 = (1,1,-2,0)$, $a_2 = (0,0,-1,1)$. Так как $(a_1,a_2) = 2$, применяем к векторам $a_2, a_1$ процесс ортогонализации (сл.5 §3 гл.V): $b_1 = a_2$; $b_2 = a_1 + \lambda b_1$, $\lambda = -\frac{(a_1,b_1)}{(b_1,b_1)} = -1$; $b_2 = a_1 - b_1 = (1,1,-1,-1)$. Нормируем векторы $b_1$ и $b_2$, получаем ортонормированный базис в $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\mathcal{E})$: $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,-1,1)$, $e_2 = \frac{1}{2}(1,1,-1,-1)$.

Найдем собственный вектор для $\lambda_2$. Найдем образы векторов $(1,1,1,1)$ и $(0,2,1,1)$ при действии оператора $\mathcal{A}+\mathcal{E}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 & 6 & 6 \\ 6 & 6 & 6 & 6 \end{pmatrix}.$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 6 & 6 & 6 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 6 & 6 & 6 & 6 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Базис в $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}+\mathcal{E})$ образует вектор $b_3 = (-1,1,0,0)$. Проверяем: $(b_1,b_3) = 0$, $(b_2,b_3) = 0$. Нормируем его: $e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,1,0,0)$.

# Пример (2)

Базис в $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - 5\mathcal{E})$ образует вектор $b_4 = (6,6,6,6)$. Нормируем его: $e_4 = \frac{1}{2}(1,1,1,1)$.
Векторы $e_1$, $e_2$, $e_3$,$e_4$ образуют ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе:
$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Матрица перехода от исходного ортонормированного базиса к ортонормированному базису из собственных векторов $T = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ – ортогональная матрица. Так как $A_1 = T^{-1} \cdot A \cdot T = T^{\top} \cdot A \cdot T$, заключаем, что $A = T \cdot A_1 \cdot T^{\top}$.
Матрицу $T$ удобно записать в виде $T = \dfrac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & -1 & 0 & 1 \\ \sqrt{2} & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

### Определение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ евклидова или унитарного пространства $V$ называется *изометрическим*, если $\mathcal{A} \cdot \mathcal{A}^* = \mathcal{E}$.

Очевидно, что изометрический оператор $\mathcal{A}$ обратим и $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^*$.

### Наблюдение

Линейный оператор $\mathcal{A}$ евклидова или унитарного пространства $V$ является изометрическим тогда и только тогда, когда для любых векторов $x, y \in V$ справедливо равенство $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$ (т.е. когда $\mathcal{A}$ является изоморфизмом пространства $V$ на себя, см. теорему сл.11 §1). Поэтому для оператора $\mathcal{A} \in \mathsf{H}(V)$ следующие условия эквивалентны:
(1) $\mathcal{A}$ – изометрический оператор;
(2) $\mathcal{A}$ переводит любой ортонормированный базис пространства $V$ в ортонормированный базис;
(3) $\mathcal{A}$ переводит некоторый ортонормированный базис пространства $V$ в ортонормированный базис.

Первое утверждение этого наблюдения вытекает из определений. Оно объясняет смысл термина "изометрический". Второе непосредственно следует из теоремы сл.11 §1.

# Матричная характеризация изометрических операторов

Из определения изометрического оператора и следствия сл.8 §1 с учетом предложения сл.7 §3 гл.III и определения унитарной матрицы (сл.7 §2) вытекает такое

## Предложение

Следующие условия эквивалентны для линейного оператора $\mathcal{A}$ конечномерного евклидова или унитарного пространства $V$:
(1) $\mathcal{A}$ – изометрический оператор;
(2) матрица $A$ оператора $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе является унитарной;
(3) матрица $A$ оператора $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе является унитарной.

## Наблюдение

Унитарная матрица с действительными элементами является ортогональной.

**Теорема**

Линейный оператор $\mathcal{A}$ конечномерного унитарного пространства $V$ является изометрическим тогда и только тогда, когда $V$ имеет ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ и все его собственные значения имеют модуль $1$.

$\Downarrow$Пусть $V$ имеет ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ и все его собственные значения имеют модуль $1$. Тогда матрица $A$ оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе – диагональная с числами $\lambda$ на главной диагонали, где $|\lambda| = 1$. Так как при этом $\lambda^{-1} = \overline{\lambda}$, имеем $A^{-1} = A^*$ и оператор $\mathcal{A}$ является изометрическим.

Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ пространства $V$ является изометрическим. Тогда $\mathcal{A}$ является нормальным оператором и в силу теоремы сл.6 §2 $V$ имеет ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Пусть $\lambda$ – собственное значение оператора $\mathcal{A}$. Возьмем собственный вектор $v$, относящийся к $\lambda$. Согласно наблюдению сл.5 имеем $(v, v) = (\mathcal{A}v, \mathcal{A}v) =$ $= (\lambda v, \lambda v) = \lambda\overline{\lambda}(v, v)$. Поскольку $(v, v) \neq 0$, получаем $\lambda\overline{\lambda} = 1$, т.е. $|\lambda| = 1$.$\Uparrow$

**Следствие**

Все корни характеристического многочлена любой унитарной, в частности, ортогональной, матрицы по модулю равны $1$.

**Определение**

Изометрический оператор в евклидовом пространстве называется *ортогональным*.

**Теорема**

Линейный оператор $\mathcal{A}$ евклидова пространства $V$ является ортогональным тогда и только тогда, когда $V$ имеет канонический ортонормированный базис для $\mathcal{A}$ и все корни характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$ по модулю равны 1. Определитель матрицы ортогонального оператора в любом базисе равен $1$ или $-1$.

$\Downarrow$Если оператор $\mathcal{A}$ евклидова пространства $V$ является ортогональным, то требуемое вытекает из теоремы сл.14 §2 и следствия сл.13. Пусть $V$ имеет канонический ортонормированный базис для $\mathcal{A}$ и все корни характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$ по модулю равны 1, и пусть $A$ – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда на ее главной диагонали стоят числа $1, -1$ и блоки вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, в которых $\alpha^2 + \beta^2 = 1$.

В матрице $A^{-1}$ на главной диагонали числа $1, -1$ не изменяются, а вместо указанного блока стоит обратная матрица $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}^{\top}$. Следовательно, $A^{-1} = A^{\top}$ и согласно предложению сл.12 оператор $\mathcal{A}$ является изометрическим, т.е. ортогональным.

Матрица $A$ ортогонального оператора в ортонормированном базисе удовлетворяет условию $A^{\top} = A^{-1}$, поэтому $A^{\top} \cdot A = E_n$ и $1 = |A^{\top} \cdot A| = |A^{\top}| \cdot |A| = |A|^2$, т.е. $|A| = 1$ или $|A| = -1$. Так как все матрицы одного линейного оператора имеют один и тот же определитель, второе утверждение теоремы доказано.$\Uparrow$

Канонический базис для ортогонального оператора евклидова пространства находится точно так же, как для нормального оператора (сл.15 §2)

Заметим, что на двумерном инвариантном подпространстве $\langle e, f\rangle$ ортогональный оператор действует как оператор поворота на плоскости, так как из условия $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ следует, что $\alpha = \cos\varphi$, $\beta = \sin\varphi$ для некоторого $\varphi \in \mathbb{R}$, и матрица $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ есть матрица поворота плоскости по часовой стрелке на угол $\varphi$ (сл.11 §1 гл.III).

# Условия, при которых произвольное отображение евклидова пространства в себя является ортогональным линейным оператором

**Теорема**

Пусть $\mathcal{A}$ – отображение евклидова пространства $V$ в себя. Следующие условия для $\mathcal{A}$ эквивалентны:
(1) $\mathcal{A}0_V = 0_V$ и $\forall x, y \in V \ |\mathcal{A}x - \mathcal{A}y| = |x - y|$;
(2) $\forall x, y \in V \ (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$;
(3) $\mathcal{A}$ – ортогональный линейный оператор пространства $V$.

$\Downarrow(1) \Rightarrow (2)$ При $y = 0_V$ из условия (1) следует $|\mathcal{A}x| = |x|$ для любого $x \in V$. Для любых $x, y \in V$ имеем $|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y|^2 = |x - y|^2$, откуда $(\mathcal{A}x - \mathcal{A}y, \mathcal{A}x - \mathcal{A}y) = (x - y, x - y)$. Таким образом, $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) - 2(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) + (\mathcal{A}y, \mathcal{A}y) = (x, x) - 2(x, y) + (y, y)$, откуда $|\mathcal{A}x|^2 - 2(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) + |\mathcal{A}y|^2 = |x|^2 - 2(x, y) + |y|^2$. Следовательно, $-2(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = -2(x, y)$ и $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, y)$.

$(2) \Rightarrow (3)$ Докажем, что $\mathcal{A}$ – линейный оператор. Для любых векторов $x, y \in V$ имеем
$(\mathcal{A}(x+y) - \mathcal{A}x - \mathcal{A}y)^2 = (\mathcal{A}(x+y), \mathcal{A}(x+y)) + (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) + (\mathcal{A}y, \mathcal{A}y) - 2(\mathcal{A}(x+y), \mathcal{A}x) - 2(\mathcal{A}(x+y), \mathcal{A}y) + 2(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x+y, x+y) + (x, x) + (y, y) - 2(x+y, x) - 2(x+y, y) + 2(x, y) = (x+y-x-y)^2 = 0_V^2 = 0$, откуда $\mathcal{A}(x+y) = \mathcal{A}x + \mathcal{A}y$. Аналогично для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ и любого вектора $x \in V$ имеем
$(\mathcal{A}(\lambda x) - \lambda(\mathcal{A}x))^2 = (\mathcal{A}(\lambda x), \mathcal{A}(\lambda x)) - 2(\mathcal{A}(\lambda x), \lambda(\mathcal{A}x)) + (\lambda(\mathcal{A}x), \lambda(\mathcal{A}x)) = (\lambda x, \lambda x) - 2\lambda(\mathcal{A}(\lambda x), \mathcal{A}x) + \lambda^2(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (\lambda x, \lambda x) - 2\lambda(\lambda x, x) + \lambda^2(x, x) = \lambda^2(x, x) - 2\lambda^2(x, x) + \lambda^2(x, x) = 0$, откуда $\mathcal{A}(\lambda x) - \lambda(\mathcal{A}x) = 0_V$.
Следовательно, $\mathcal{A}$ – линейный оператор. Наблюдение сл.11 показывает, что $\mathcal{A}$ – ортогональный линейный оператор.
$(3) \Rightarrow (1)$ Так как $\mathcal{A}$ – линейный оператор, $\mathcal{A}0_V = 0_V$ и $\mathcal{A}x - \mathcal{A}y = \mathcal{A}(x-y)$. Поскольку $\mathcal{A}$ – ортогональный оператор, согласно наблюдению сл.11 при $x = y$ имеем $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (x, x)$, т.е. $|\mathcal{A}x| = |x|$.
Следовательно, $|\mathcal{A}x - \mathcal{A}y| = |\mathcal{A}(x-y)| = |x-y|$. Теорема доказана.$\Uparrow$

Заметим, что условие $\mathcal{A}0_V = 0_V$ в условии (1) теоремы сл.16 существенно, как показывает пример отображения $\mathcal{A}x = x + a$, где $a \neq 0_V$ – фиксированный вектор из $V$.