Глава VI. Линейные отображения и операторы пространств со скалярным произведением
§ 2. Нормальные операторы

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Пусть V – евклидово или унитарное пространство.

Определение

Линейный оператор $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$ называется *нормальным*, если он перестановочен со своим сопряженным оператором, т.е. $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$.

Таким образом, для любого вектора $x \in V$ и нормального оператора $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$ справедливо равенство

$$\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}(\mathcal{A}^*x). \tag{1}$$

Нормальные операторы обладают рядом интересных свойств. Сначала мы изучим общие свойства таких операторов, а затем рассмотрим отдельно нормальные операторы унитарных пространств и евклидовых пространств.

Предложение

Пусть $\mathcal{A}$ – нормальный линейный оператор конечномерного евклидова или унитарного пространства V. Тогда выполняются следующие утверждения.

1. Для любых $x, y \in V$ справедливо равенство $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y)$.
2. $\mathrm{Ker}\mathcal{A} = \mathrm{Ker}\mathcal{A}^*$.
3. $(\mathrm{Ker}\mathcal{A})^\perp = \mathrm{Im}\mathcal{A}$.
4. $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}^2) = \mathrm{Ker}\mathcal{A}$.

$\Downarrow$Докажем утверждение 1. Имеем в соответствии с (1) $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (x, \mathcal{A}^*(\mathcal{A}y)) = (x, \mathcal{A}(\mathcal{A}^*y))$. Так как $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^*)^*$, продолжаем с использованием равенства (3) сл.13 §1:
$(x, \mathcal{A}(\mathcal{A}^*y)) = (x, (\mathcal{A}^*)^*(\mathcal{A}^*y)) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y)$. Таким образом, $(\mathcal{A}x, \mathcal{A}y) = (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*y)$, что и требуется.
Утверждение 2 следует из утверждения 1: $x \in \mathrm{Ker}\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}x = 0_V \Leftrightarrow (\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = 0 \Leftrightarrow (\mathcal{A}^*x, \mathcal{A}^*x) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{A}^*x = 0_V \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}^*$.
Утверждение 3 непосредственно следует из утверждения 2 этого предложения и утверждения 2 предложения сл.14 §1, согласно которому $(\mathrm{Ker}\mathcal{A}^*)^\perp = \mathrm{Im}\mathcal{A}$.
Утверждение 4 следует из утверждения 3: $v \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^2) \Leftrightarrow \mathcal{A}(\mathcal{A}v) = 0_V \Leftrightarrow \mathcal{A}v \in \mathrm{Ker}\mathcal{A} \cap \mathrm{Im}\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{A}v = 0_V$, поскольку $\mathrm{Ker}\mathcal{A} \cap \mathrm{Im}\mathcal{A} = \{0_V\}$.$\Uparrow$

Свойства нормальных операторов (1)

Предложение

Пусть $\mathcal{A}$ – нормальный линейный оператор конечномерного евклидова или унитарного пространства V. Тогда выполняются следующие утверждения.

1. Для любого скаляра λ оператор $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$ является нормальным.
2. Каждый собственный вектор оператора $\mathcal{A}$, относящийся к собственному значению λ, является собственным вектором оператора $\mathcal{A}^*$, относящимся к комплексно сопряженному собственному значению $\overline{\lambda}$.
3. Собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, относящиеся к различным собственным значениям, ортогональны.

$\Downarrow$Докажем утверждение 1. Так как $\mathcal{E}^* = \mathcal{E}$, имеем $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})^* = \mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{E}$. Тогда $(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})(\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{E}) = \mathcal{A}\mathcal{A}^* - \lambda\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{A} + \lambda\overline{\lambda}\mathcal{E}$ и $(\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{E})(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \mathcal{A}^*\mathcal{A} - \overline{\lambda}\mathcal{A} - \lambda\mathcal{A}^* + \overline{\lambda}\lambda\mathcal{E}$, откуда следует требуемое. Утверждение 2 вытекает из утверждения 1 и утверждения 2 предложения сл.3 с учетом предложения сл.4 §2 гл.IV: $\operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}) = \operatorname{Ker}(\mathcal{A}^* - \overline{\lambda}\mathcal{E})$. Докажем утверждение 3. Пусть $\mathcal{A}u = \lambda u$, $\mathcal{A}v = \mu v$, где $u, v \neq 0_V$, $\lambda \neq \mu$. Имеем $\lambda(u, v) = (\lambda u, v) = (\mathcal{A}u, v) = (u, \mathcal{A}^* v) = (u, \overline{\mu} v) = \mu(u, v)$, откуда $(\lambda - \mu)(u, v) = 0$ и $(u, v) = 0$.$\Uparrow$

Напомним, что для матрицы A через A^* обозначается матрица $\overline{A^\top}$. Из определения нормального оператора и следствия сл.10 §1 с учетом предложения сл.7 §3 гл.III вытекает следующее

Предложение

Для линейного оператора $\mathcal{A}$ конечномерного евклидова или унитарного пространства V следующие условия эквивалентны:
(1) $\mathcal{A}$ – нормальный оператор;
(2) матрица A оператора $\mathcal{A}$ в любом ортонормированном базисе удовлетворяет условию $A \cdot A^* = A^* \cdot A$;
(3) матрица A оператора $\mathcal{A}$ в некотором ортонормированном базисе удовлетворяет условию $A \cdot A^* = A^* \cdot A$.

Определение

Назовем квадратную матрицу A порядка n с комплексными элементами *нормальной*, если $A \cdot A^* = A^* \cdot A$.

Теорема

Линейный оператор $\mathcal{A}$ конечномерного унитарного пространства V является нормальным тогда и только тогда, когда V имеет ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

$\Downarrow$ Пусть $\mathcal{A}$ – нормальный линейный оператор конечномерного унитарного пространства V. Так как характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}$ разлагается на линейные множители, по теореме сл.5 §4 гл.IV пространство V разлагается в прямую сумму корневых подпространств $V(\mathcal{A}, \lambda_j)$. Поскольку $V(\mathcal{A}, \lambda_j) = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda_j \mathcal{E})$ в силу утверждения 1 сл.4 и утверждения 4 сл.3, корневые подпространства состоят из собственных векторов. В каждом из корневых подпространств выберем ортонормированный базис. Объединение этих базисов дает по утверждению 3 сл.4 ортонормированный базис V, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$.

Обратно, пусть V имеет ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Матрица A оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе диагональная, на ее главной диагонали стоят собственные значения $\mathcal{A}$. Сопряженный оператор $\mathcal{A}^*$ имеет в том же базисе матрицу $A^* = \overline{A^\top}$, которая также является диагональной. Любые диагональные матрицы над полем $\mathbb{C}$ перестановочны, поэтому операторы $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ также перестановочны, что и требуется доказать.$\Uparrow$

Унитарные матрицы

Определение

Квадратная матрица A порядка n с комплексными элементами называется *унитарной*, если $A \cdot A^* = A^* \cdot A = E_n$.

По определению унитарная матрица A является обратимой и $A^{-1} = A^*$.

Предложение

Матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому ортонормированному базису в конечномерном унитарном пространстве является унитарной.

$\Downarrow$Пусть V – унитарное пространство, $B = (e_1, \ldots . e_n)$ и $C = (f_1, \ldots . f_n)$ – ортонормированные базисы пространства V, T – матрица перехода от базиса B к базису C. Тогда $T^\top \overline{T} = E_n$, так как $(f_k, f_j) = [f_k]_B^\top \cdot \overline{[f_j]_B}$ – произведение k-й строки матрицы $T^\top$ на j-й столбец матрицы $\overline{T}$ и (f_k, f_j) – элемент δ_{ij} единичной матрицы E_n, поскольку базис C ортонормированный. Таким образом, матрица $T^\top$ невырожденная, следовательно и T невырожденная. Из равенства $T^\top \overline{T} = E_n$ следует $\overline{T}^\top T = E_n$, т.е. $T^{-1} = T^*$.$\Uparrow$

Следствие

Квадратная матрица A порядка n с комплексными элементами является нормальной тогда и только тогда, когда существуют унитарная матрица T и диагональная матрица D порядка n такие, что $A = T \cdot D \cdot T^*$.

$\Downarrow$Легко вычислить, что для любых матриц $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ имеют место равенства $(X \cdot Y)^* = Y^* \cdot X^*$ и $(X^*)^* = X$. Имеем $(T \cdot D \cdot T^*)^* = T \cdot D^* \cdot T^*$, поэтому если $A = T \cdot D \cdot T^*$, то с учетом равенства $T \cdot T^* = E_n$ получаем $A \cdot A^* = T \cdot D \cdot T^* \cdot T \cdot D^* \cdot T^* = T \cdot D \cdot D^* \cdot T^*$ и аналогично $A^* \cdot A = T \cdot D^* \cdot D \cdot T^*$. Поскольку D и D^* – диагональные матрицы, $D \cdot D^* = D^* \cdot D$ и $A \cdot A^* = A^* \cdot A$, т.е. A – нормальная матрица.
Предположим, что A – нормальная матрица. Определим с помощью матрицы A линейный оператор $\mathcal{A}$ на пространстве столбцов $\mathbb{C}_n$, полагая $\mathcal{A}x = A \cdot x$. Тогда оператор $\mathcal{A}$ в ортонормированном базисе B из столбцов единичной матрицы E_n имеет матрицу A. Согласно предложению сл.5 оператор $\mathcal{A}$ является нормальным. По теореме сл.6 существует ортонормированный базис C в $\mathbb{C}_n$, в котором матрица D оператора $\mathcal{A}$ диагональна. Пусть T – матрица перехода от базиса B к C. Тогда в силу формулы сл.19 §1 гл.III $D = T^{-1} \cdot A \cdot T = T^* \cdot A \cdot T$, так как T– унитарная матрица по предложению сл.7. Из равенства $D = T^* \cdot A \cdot T$ следует $A = T \cdot D \cdot T^*$.$\Uparrow$

Линейный оператор $\mathcal{A}$ унитарного пространства в некотором ортонормированном базисе имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Убедиться, что $\mathcal{A}$ – нормальный оператор, найти для него ортономированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$ и матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

Найдем матрицу сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$: $A^* = A^\top =$
$= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Заметим, что $A^* = -A$, поэтому равенство $A^* \cdot A = A \cdot A^*$ выполняется очевидным образом. Мы доказали, что $\mathcal{A}$ – нормальный оператор.

Найдем характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}} = \chi_A = \begin{vmatrix} -x & 1 & -1 \\ -1 & -x & 1 \\ 1 & -1 & -x \end{vmatrix} =$
$= -x(x^2+3)$. Его корни (собственные значения $\mathcal{A}$) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = i\sqrt{3}$, $\lambda_3 = -i\sqrt{3}$. Найдем собственный вектор, относящийся к значению 0:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$. Таким образом, $a_1 = (1,1,1)$ – базис Ker$\mathcal{A}$. Нормируем вектор a_1, $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$. Найдем образы векторов $(1,0,-1)$ и $(0,-1,1)$ при действии оператора $\mathcal{A} + i\sqrt{3}\mathcal{E}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} i\sqrt{3} & -1 & 1 \\ 1 & i\sqrt{3} & -1 \\ -1 & 1 & i\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i\sqrt{3} & -2 & 1-i\sqrt{3} \\ -2 & 1-i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Найдем собственный вектор для собственного значения $-i\sqrt{3}$: (умножаем 1-ю строку на $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ и прибавляем к 2-й)

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & -2 & 1-i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} \\ 1 & 0 & -1 & 1+i\sqrt{3} & -2 & 1-i\sqrt{3} \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -1 & 1 & -2 & 1-i\sqrt{3} & 1+i\sqrt{3} \\ 1 & -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+i\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$ Таким образом,

$a_2 = (2, -1-i\sqrt{3}, -1+i\sqrt{3})$ – базис Ker$(\mathcal{A} + i\sqrt{3}\mathcal{E})$,
$a_3 = (-2, 1-i\sqrt{3}, 1+i\sqrt{3})$ – базис Ker$(\mathcal{A} - i\sqrt{3}\mathcal{E})$. Нормируя эти векторы, получаем $e_2 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(2, -1-i\sqrt{3}, -1+i\sqrt{3})$, $e_3 = \frac{1}{2\sqrt{3}}(-2, 1-i\sqrt{3}, 1+i\sqrt{3})$. Векторы e_1, e_2, e_3 образуют ортонормированный базис. В этом базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 0 & i\sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Предложение

Пусть V – евклидово пространство размерности n, $\mathcal{A}$ – нормальный линейный оператор на V, и $\lambda = \alpha + i\beta$ – комплексный корень ($\beta \neq 0$) характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$. Тогда V имеет инвариантное относительно операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ подпространство $U = \langle e, f\rangle$, где $e \perp f$, $|e| = |f| = 1$ и $\mathcal{A}e = \alpha e - \beta f$, $\mathcal{A}f = \beta e + \alpha f$, причем $\chi_{\mathcal{A}|U} = x^2 - 2\alpha x + \alpha^2 + \beta^2$ и подпространство $U^\perp$ инвариантно относительно операторов $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$.

$\Downarrow$Зафиксируем ортонормированный базис B в V. Пусть A – матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе. Тогда $A^\top \cdot A = A \cdot A^\top$. Рассмотрим оператор $\tilde{\mathcal{A}}$, заданный матрицей A на пространстве столбцов $\mathbb{C}_n$ в базисе из столбцов единичной матрицы E_n. Тогда $\tilde{\mathcal{A}}z = A \cdot z$ для любого $z \in \mathbb{C}_n$. Так как оператор $\tilde{\mathcal{A}}$ имеет в ортонормированном базисе пространства $\mathbb{C}_n$ матрицу A, удовлетворяющую условию $A \cdot A^* = A^* \cdot A$, этот оператор является нормальным. Поскольку $\chi_{\tilde{\mathcal{A}}} = \chi_A$, число λ является собственным значением оператора $\tilde{\mathcal{A}}$. Для него существует собственный вектор $z \in \mathbb{C}_n$. Запишем $z = x + iy$, где $x, y \in \mathbb{R}_n$. Имеем $\tilde{\mathcal{A}}z = \lambda z$, откуда $A \cdot (x + iy) = (\alpha + i\beta)(x + iy)$, т.е. $A \cdot x + iA \cdot y = \alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y)$. Следовательно, $A \cdot x = \alpha x - \beta y$, $A \cdot y = \beta x + \alpha y$. Положим $u = B \cdot x$, $v = B \cdot y$. Тогда $\mathcal{A}u = \alpha u - \beta v$, $\mathcal{A}v = \beta u + \alpha v$. Поэтому подпространство $U = \langle u, v\rangle$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}$.

Покажем, что оно инвариантно и относительно $\mathcal{A}^*$. Для этого вычислим $A^\top \cdot x$ и $A^\top \cdot y$. По утверждению 2 предложения сл.4 вектор z является собственным для оператора $\tilde{\mathcal{A}}^*$, относящимся к собственному значению $\overline{\lambda} = \alpha - i\beta$. Оператор $\tilde{\mathcal{A}}^*$ имеет в базисе из столбцов единичной матрицы E_n матрицу $A^* = A^\top$. Следовательно, $A^\top \cdot (x + iy) = (\alpha - i\beta)(x + iy)$, откуда $A^\top \cdot x + iA^\top \cdot y = \alpha x + \beta y + i(-\beta x + \alpha y)$ и $A^\top \cdot x = \alpha x + \beta y$, $A^\top \cdot y = -\beta x + \alpha y$. Поэтому $\mathcal{A}^* u = \alpha u + \beta v$, $\mathcal{A}^* v = -\beta u + \alpha v$ и подпространство $U = \langle u, v\rangle$ инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}^*$. В силу утверждения 1 предложения сл.14 §1 $U^\perp$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^{**}$. Так как $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$, $U^\perp$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$.

Покажем, что $u \perp v$ и $|u| = |v|$. Для этого вычислим $\tilde{\mathcal{A}}(x - iy) =$
$= A \cdot (x - iy) = A \cdot x - iA \cdot y = \alpha x - \beta y - i(\beta x + \alpha y) = (\alpha - i\beta)(x - iy)$.
Мы видим, что $x - iy$ – собственный вектор оператора $\tilde{\mathcal{A}}$, относящийся к собственному значению $\alpha - i\beta \neq \alpha + i\beta$. По утверждению 3 сл.4 имеем $(x + iy) \perp (x - iy)$, т.е. $(x + iy, x - iy) = 0$ в унитарном пространстве $\mathbb{C}_n$. Имеем $0 = (x + iy, x - iy) = (x + iy)^\top \cdot \overline{x - iy} = (x + iy)^\top \cdot (x + iy) = x^\top \cdot x - y^\top \cdot y + iy^\top \cdot x + ix^\top \cdot y = (x, x)_{\mathbb{R}_n} - (y, y)_{\mathbb{R}_n} + 2i(x, y)_{\mathbb{R}_n}$. Из равенства $(x, x) - (y, y) + 2i(x, y) = 0$ получаем $(x, x) - (y, y) = 0$ и $(x, y) = 0$. Так как $(u, u)_V = (x, x)_{\mathbb{R}_n}$, $(v, v)_V = (y, y)_{\mathbb{R}_n}$ и $(u, v)_V = (x, y)_{\mathbb{R}_n}$, получаем $u \perp v$ и $|u| = |v|$.

Окончание доказательства предложения

Нормируем векторы u и v: $e = \frac{1}{|u|}u$, $f = \frac{1}{|v|}v$. Эти векторы удовлетворяют всем условиям предложения. Ясно, что $\mathcal{A}|_U \longleftrightarrow_{(e,f)} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$, поэтому $\chi_{\mathcal{A}|U}$ имеет требуемый вид.$\Uparrow$

Нормальные операторы евклидовых пространств (1)

Теорема

Пусть V – евклидово пространство, $\dim V = n$, $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$. Оператор $\mathcal{A}$ является нормальным тогда и только тогда, когда V имеет ортонормированный базис $g_1, \ldots, g_m, e_1, f_1, \ldots, e_k, f_k$, где $g_1, \ldots, g_m$ – собственные векторы оператора $\mathcal{A}$, а пары e_j, f_j порождают инвариантные относительно $\mathcal{A}$ подпространства, причем $\mathcal{A}e_j = \alpha_j e_j - \beta_j f_j$, $\mathcal{A}f_j = \beta_j e_j + \alpha_j f_j$, и $\alpha_j \pm i\beta_j$ – пара комплексных корней характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$. Матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе является блочной диагональной, на главной диагонали сначала стоят блоки (λ_ℓ) $(\ell = 1, \ldots, m)$ с действительными собственными значениями оператора $\mathcal{A}$, а за ними - блоки $\begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ -\beta_j & \alpha_j \end{pmatrix}$ $(j = 1, \ldots, k)$, соответствующие комплексно сопряженным корням характеристического многочлена $\chi_{\mathcal{A}}$; при этом $n = m + 2k$.

$\Downarrow$Пусть оператор $\mathcal{A}$ является нормальным. Используем индукцию по n. При $n = 1$ все орты пространства являются собственными векторами любого оператора, поэтому доказывать нечего. Предположим, что для всех нормальных линейных операторов евклидовых пространств размерности меньше n утверждение уже доказано. Пусть $\dim V = n$ и $\mathcal{A}$ – нормальный линейный оператор на V. Рассмотрим два случая.

Продолжение доказательства теоремы

1. Многочлен $\chi_{\mathcal{A}}$ имеет действительный корень λ_1. Зафиксируем собственный вектор g_1 линейного оператора $\mathcal{A}$, относящийся к собственному значению λ_1. Можно считать, что $|g_1| = 1$. Вектор g_1 является собственным и для оператора $\mathcal{A}^*$ в силу утверждения 2 предложения сл.4. Тогда подпространство $\langle g_1 \rangle$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$ и относительно $\mathcal{A}^*$. Согласно утверждению 1 предложения сл.14 §1 подпространство $U = \langle g_1 \rangle^{\perp}$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$ и относительно $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$. Имеем $\dim U = n - 1$.
2. Многочлен $\chi_{\mathcal{A}}$ имеет пару комплексно сопряженных корней $\alpha_1 \pm i\beta_1$. Тогда согласно предложению сл.11 V имеет инвариантное относительно $\mathcal{A}$ и относительно $\mathcal{A}^*$ подпространство $\langle e_1, f_1 \rangle$, где $|e_1| = |f_1| = 1$, $e_1 \perp f_1$ и $\mathcal{A}e_1 = \alpha_1 e_1 - \beta_1 f_1$, $\mathcal{A}f_1 = \beta_1 e_1 + \alpha_1 f_1$. Согласно утверждению 1 предложения сл.14 §1 подпространство $U = \langle e_1, f_1 \rangle^{\perp}$ инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$ и относительно $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$. Имеем $\dim U = n - 2$.

Таким образом, в обоих случаях V имеет инвариантное относительно $\mathcal{A}$ и относительно $\mathcal{A}^*$ подпространство U меньшей размерности. Положим $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A}|_U$ и покажем, что $\mathcal{A}_1$ – нормальный линейный оператор. Для этого достаточно убедиться, что $\mathcal{A}_1^* = \mathcal{A}^*|_U$. Это равенство вытекает из того, что для любых $x, y \in U$ имеет место $(\mathcal{A}_1 x, y) = (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y)$. Применяя предположение индукции к оператору $\mathcal{A}_1$ на пространстве U, получаем, что в нем существует требуемый ортонормированный базис.

Добавляя к нему на первое место вектор g_1 или на нужное иместо векторы e_1, f_1, завершаем доказательство по индукции.
Докажем, что если евклидово пространство V имеет ортонормированный базис для оператора $\mathcal{A}$, удовлетворяющий условию теоремы, то оператор $\mathcal{A}$ является нормальным. Обозначим через A матрицу оператора $\mathcal{A}$ в указанном базисе. Тогда A является блочно-диагональной матрицей, на диагонали которой имеется не более одного диагонального блока (соответствующего части базиса, состоящей из всех собственных векторов) и несколько (быть может, ни одного) блоков вида $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Матрица $A^\top$ также является блочно-диагональной матрицей, на диагонали которой имеется не более одного диагонального блока и этот блок тот же, что в матрице A, а каждый блок порядка 2 заменен на $\begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$. Так как блочные матрицы умножаются поблочно, достаточно заметить, что $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$. Таким образом, $A \cdot A^\top = A^\top \cdot A$ и в силу предложения сл.5 оператор $\mathcal{A}$ является нормальным. Теорема полностью доказана.$\Uparrow$

Определение канонического базиса

Определение

Будем называть *каноническим* ортонормированный базис евклидова пространства для нормального оператора, указанный в формулировке теоремы сл.14.

Пример

Линейный оператор $\mathcal{A}$ евклидова пространства в некотором ортонормированном базисе имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Убедиться, что $\mathcal{A}$ – нормальный оператор, найти для него канонический ортономированный базис и матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

Используем доказательство предложения сл.11. Сначала находим характеристический многочлен $\chi_{\mathcal{A}}$, все его корни, включая комплексные, и собственные векторы для всех действительных корней $\chi_{\mathcal{A}}$, а также собственные векторы в $\mathbb{C}_3$ для комплексных корней $\chi_{\mathcal{A}}$ (один вектор для одного из пары комплексно сопряженных корней). Для данной матрицы это сделано на сл.9-10. Берем собственный вектор $g = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$ для собственного значения 0 и вектор $a_2 = (2, -1 - i\sqrt{3}, -1 + i\sqrt{3})$ для корня $-i\sqrt{3}$. Записываем $a_2 = (2, -1, -1) + i(0, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$ и полагаем $x = (2, -1, -1)$, $y = (0, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$. Проверяем: $(x, x) = 6 = (y, y)$, $(x, y) = 0 = (g, x) = (g, y)$. Нормируем векторы x, y: $e = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1)$, $f = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, 1)$.

Получаем канонический базис (g, e, f). Матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} \\ 0 & \sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$.