

Глава VI. Линейные отображения и операторы пространств со скалярным произведением

§ 1. Сопряженное отображение

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Пусть U, V – евклидовы или унитарные пространства, $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ – произвольное отображение из U в V .

Определение

Отображение $\mathcal{B} : V \rightarrow U$ называется **сопряженным** к отображению \mathcal{A} , если выполняется условие

$$\forall x \in U \forall y \in V (\mathcal{A}x, y)_V = (x, \mathcal{B}y)_U. \quad (1)$$

Предложение

Если для отображения $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ существует сопряженное отображение, то оно определяется однозначно и является линейным отображением из V в U .

Для доказательства потребуется следующая

Лемма. Слабый закон сокращения для скалярного произведения

Пусть W – евклидово или унитарное пространство. Если $y, z \in W$ и $(x, y) = (x, z)$ для любого $x \in W$, то $y = z$.

↓ Из условия леммы следует, что $y - z \in W^\perp = \{0_W\}$. ↑

↓ Докажем единственность. Предположим, что \mathcal{B}_1 и \mathcal{B}_2 – отображения, сопряженные с отображением \mathcal{A} и докажем, что $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$. Из (1) получаем $(x, \mathcal{B}_1 y)_U = (\mathcal{A}x, y)_V = (x, \mathcal{B}_2 y)_U$, т.е. $(x, \mathcal{B}_1 y)_U = (x, \mathcal{B}_2 y)_U$ для всех $x \in U, y \in V$. Зафиксируем $y \in V$. Из равенства $(x, \mathcal{B}_1 y)_U = (x, \mathcal{B}_2 y)_U$ для всех $x \in U$ в силу леммы сл.2 получаем $\mathcal{B}_1 y = \mathcal{B}_2 y$. Таким образом, для любого $y \in V$ справедливо $\mathcal{B}_1 y = \mathcal{B}_2 y$, откуда следует, что $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.

Обозначение

Если для отображения $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ существует сопряженное отображение, то оно обозначается через \mathcal{A}^* .

Докажем, что \mathcal{A}^* является линейным отображением. Пусть $y_1, y_2 \in V$. Для любого $x \in U$ в силу (1) имеем $(\mathcal{A}x, y_1 + y_2)_V = (x, \mathcal{A}^*(y_1 + y_2))_U$ и $(\mathcal{A}x, y_1 + y_2)_V = (\mathcal{A}x, y_1)_V + (\mathcal{A}x, y_2)_V = (x, \mathcal{A}^*y_1)_U + (x, \mathcal{A}^*y_2)_U = (x, \mathcal{A}^*y_1 + \mathcal{A}^*y_2)_U$. Таким образом, $(x, \mathcal{A}^*(y_1 + y_2))_U = (x, \mathcal{A}^*y_1 + \mathcal{A}^*y_2)_U$ для любого $x \in U$. По лемме сл.2 получаем $\mathcal{A}^*(y_1 + y_2) = \mathcal{A}^*y_1 + \mathcal{A}^*y_2$. Пусть λ – произвольный скаляр, $y \in V$. Для любого $x \in U$ в силу (1) имеем $(\mathcal{A}x, \lambda y)_V = (x, \mathcal{A}^*(\lambda y))_U$ и $(\mathcal{A}x, \lambda y)_V = \overline{\lambda}(\mathcal{A}x, y)_V = \overline{\lambda}(x, \mathcal{A}^*y)_U = (x, \lambda(\mathcal{A}^*y))_U$. Таким образом, $(x, \mathcal{A}^*(\lambda y))_U = (x, \lambda(\mathcal{A}^*y))_U$ для любого $x \in U$, откуда в силу леммы сл.2 получаем $\mathcal{A}^*(\lambda y) = \lambda(\mathcal{A}^*y)$.

Предложение доказано. ↑

Предложение

Пусть для отображений $\mathcal{A}, \mathcal{B} : U \rightarrow V$ евклидовых или унитарных пространств U, V существуют сопряженные отображения. Тогда для любого скаляра λ справедливы утверждения:

- 1 $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$,
- 2 $(\lambda\mathcal{A})^* = \bar{\lambda}\mathcal{A}^*$,
- 3 $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$.

↓ Для доказательства утверждения 1 запишем

$$\begin{aligned} ((\mathcal{A} + \mathcal{B})x, y)_V &= (\mathcal{A}x + \mathcal{B}x, y)_V = (\mathcal{A}x, y)_V + (\mathcal{B}x, y)_V = \\ &= (x, \mathcal{A}^*y)_U + (x, \mathcal{B}^*y)_U = (x, \mathcal{A}^*y + \mathcal{B}^*y)_U = (x, (\mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*)y)_U, \text{ т.е.} \end{aligned}$$

$((\mathcal{A} + \mathcal{B})x, y)_V = (x, (\mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*)y)_U$ для всех $x \in U, y \in V$. Таким образом, по определению $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$.

Для доказательства утверждения 2 запишем $((\lambda\mathcal{A})x, y)_V =$

$$\begin{aligned} (\lambda(\mathcal{A}x), y)_V &= \lambda(\mathcal{A}x, y)_V = \lambda(x, \mathcal{A}^*y)_U = (x, \bar{\lambda}\mathcal{A}^*y)_U, \text{ т. е.} \\ ((\lambda\mathcal{A})x, y)_V &= (x, \bar{\lambda}\mathcal{A}^*y)_U \text{ для всех } x \in U, y \in V. \text{ Таким образом, по} \\ &\text{определению } (\lambda\mathcal{A})^* = \bar{\lambda}\mathcal{A}^*. \end{aligned}$$

Докажем утверждение 3. Из равенства (1) $(\mathcal{A}x, y)_V = (x, \mathcal{A}^*y)_U$, откуда следует $(\mathcal{A}^*y, x)_U = (y, \mathcal{A}x)_V$, т.е. $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^*)^*$. ↑

Из предложения сл.2 и утверждения 3 предыдущего слайда вытекает

Следствие

Если отображение $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ евклидовых или унитарных пространств U, V обладает сопряженным отображением, то \mathcal{A} является линейным отображением.

Предложение

Пусть для отображений $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ и $\mathcal{B} : V \rightarrow W$ евклидовых или унитарных пространств U, V, W существуют сопряженные отображения. Тогда $(\mathcal{B}\mathcal{A})^* = \mathcal{A}^*\mathcal{B}^*$.

↓ Для любых $x \in U, y \in V, z \in W$ имеем $((\mathcal{B}\mathcal{A})x, z)_W = (\mathcal{B}(\mathcal{A}x), z)_W = (\mathcal{A}x, \mathcal{B}^*z)_V = (x, \mathcal{A}^*(\mathcal{B}^*z))_U = (x, (\mathcal{A}^*\mathcal{B}^*)z)_U$, откуда в силу определения сопряженного отображения следует требуемое. ↑

Теорема

Пусть $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ – линейное отображение конечномерного евклидова или унитарного пространства U на соответственно евклидово или унитарное пространство V . Тогда существует единственное сопряженное отображение $\mathcal{A}^* : V \rightarrow U$, которое является линейным.

↓ В силу предложения сл.2 в доказательстве нуждается лишь существование \mathcal{A}^* . Если $U = \{0_U\}$, то \mathcal{A}^* – нулевое отображение. Пусть $U \neq \{0_U\}$. Выберем в U ортонормированный базис (e_1, \dots, e_n) и положим для любого $y \in V$

$$\mathcal{B}y = (y, \mathcal{A}e_1)_V e_1 + (y, \mathcal{A}e_2)_V e_2 + \dots + (y, \mathcal{A}e_n)_V e_n. \quad (2)$$

Докажем, что $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$. Пусть $x \in U$. Запишем $x = \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ и вычислим $(\mathcal{A}x, y)_V = (\mathcal{A}(\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n), y)_V = (\lambda_1 \mathcal{A}e_1 + \dots + \lambda_n \mathcal{A}e_n, y)_V = \lambda_1 (\mathcal{A}e_1, y)_V + \dots + \lambda_n (\mathcal{A}e_n, y)_V$. Затем вычислим $(x, \mathcal{B}y)_U = (\lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n, (y, \mathcal{A}e_1)_V e_1 + \dots + (y, \mathcal{A}e_n)_V e_n)_U = \lambda_1 (y, \mathcal{A}e_1)_V + \dots + \lambda_n (y, \mathcal{A}e_n)_V = \lambda_1 (\mathcal{A}e_1, y)_V + \dots + \lambda_n (\mathcal{A}e_n, y)_V$. Таким образом, для любых $x \in U$ и $y \in V$ справедливо равенство $(\mathcal{A}x, y)_V = (x, \mathcal{B}y)_U$, т.е. $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$. ↑

Предложение

Пусть U, V – конечномерные евклидовы или унитарные пространства, $\dim U = n$, B – базис U , $\dim V = k$, C – базис V . Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{H}(U, V)$ – линейное отображение, \mathcal{A}^* – сопряженное к нему линейное отображение и $\mathcal{A} \leftrightarrow_{B,C} A$, $\mathcal{A}^* \leftrightarrow_{C,B} A_1$. Тогда $\overline{A_1} = (G_B)^{-1} A^\top G_C$.

↓ Пусть $x \in U$, $y \in V$. Запишем равенство $(\mathcal{A}x, y)_V = (x, \mathcal{A}^*y)_U$ через координаты векторов в базисах B и C , используя формулу (1) сл.3 §3 гл.V и формулу для координат образа вектора (сл.20 §1 гл.III). Имеем $(\mathcal{A}x, y)_V = [Ax]_C^\top \cdot G_C \cdot [y]_C = (A \cdot [x]_B)^\top \cdot G_C \cdot [y]_C = [x]_B^\top \cdot A^\top \cdot G_C \cdot [y]_C$ и $(x, \mathcal{A}^*y)_U = [x]_B^\top \cdot G_B \cdot [\mathcal{A}^*y]_B = [x]_B^\top \cdot G_B \cdot \overline{A_1} \cdot [y]_C = [x]_B^\top \cdot G_B \cdot \overline{A_1} \cdot [y]_C$. Следовательно, для любых столбцов $[x]_B$ и $[y]_C$ имеет место равенство $[x]_B^\top \cdot A^\top \cdot G_C \cdot [y]_C = [x]_B^\top \cdot G_B \cdot \overline{A_1} \cdot [y]_C$. Подставляя вместо $[x]_B$ столбцы единичной матрицы порядка n , а вместо $[y]_C$ – столбцы единичной матрицы порядка k , получим равенство $G_B \cdot \overline{A_1} = A^\top \cdot G_C$, откуда следует требуемое. ↑

Следствие

Пусть U, V – конечномерные евклидовы или унитарные пространства, $\dim U = n$, B – ортонормированный базис U , $\dim V = k$, C – ортонормированный базис V . Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{H}(U, V)$ – линейное отображение, \mathcal{A}^* – сопряженное к нему линейное отображение и $\mathcal{A} \leftrightarrow_{B,C} A$, $\mathcal{A}^* \leftrightarrow_{C,B} A_1$. Тогда $A_1 = \overline{A^T}$.

Это утверждение непосредственно следует из предложения сл.7, так как матрица Грама ортонормированного базиса – единичная.

Определение

Матрица $\overline{A^T}$ называется *эрмитово сопряженной* к матрице $A \in \mathbb{C}^{k \times n}$. Она обозначается через A^* .

Предложение

Пусть U, V – конечномерные евклидовы или унитарные пространства, $\mathcal{A} \in \mathcal{H}(U, V)$ – линейное отображение. Тогда $r(\mathcal{A}) = r(\mathcal{A}^*)$.

Это утверждение непосредственно следует из предложения сл.4 §2 гл.III, следствия этого слайда и очевидного равенства $r(A) = r(A^*)$.

Известно, что линейное отображение \mathcal{A} евклидова пространства \mathbb{R}^2 в евклидово пространство \mathbb{R}^3 имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ в базисах $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (2, 3)$ и $f_1 = (1, 2, 1)$, $f_2 = (1, 0, 1)$, $f_3 = (0, 1, 1)$. Найти матрицу A_1 отображения \mathcal{A}^* в базисах f_1, f_2, f_3 и e_1, e_2 .

Запишем матрицы Грама базиса e_1, e_2 : $G_e = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$ и базиса $f_1, f_2,$

f_3 : $G_f = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Используем формулу предложения сл.7 с учетом

того, что рассматриваемые пространства евклидовы, поэтому комплексное сопряжение можно не учитывать: $A_1 = G_e^{-1} \cdot A^T \cdot G_f$, т.е.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot G_f =$$

$$\begin{pmatrix} 29 & 26 & 39 \\ -18 & -16 & -24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 327 & 133 & 183 \\ -202 & -82 & -113 \end{pmatrix}.$$

Пусть U, V – евклидовы пространства или унитарные пространства.

Определение

Отображение $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ называется *изоморфизмом евклидовых* (соотв. *унитарных*) *пространств*, если \mathcal{A} – изоморфизм линейного пространства U на V (определение см. на сл. 11 §3 гл.1) и для любых $x, y \in U$ справедливо равенство $(x, y)_U = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y)_V$.

В качестве примера приведем отображение n -мерного евклидова (соотв. унитарного) пространства U в арифметическое евклидово пространство \mathbb{R}^n (соотв. унитарное пространство \mathbb{C}^n), сопоставляющее каждому вектору строку его координат в фиксированном ортонормированном базисе.

Условия, эквивалентные тому, что линейное отображение есть изоморфизм евклидовых или унитарных пространств

Теорема

Пусть U, V – ненулевые конечномерные евклидовы пространства или унитарные пространства. Следующие условия эквивалентны для линейного отображения $\mathcal{A} : U \rightarrow V$:

- 1 \mathcal{A} – изоморфизм евклидовых или унитарных пространств;
- 2 отображение \mathcal{A} сюръективно и для любых $x, y \in U$ справедливо равенство $(x, y)_U = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y)_V$;
- 3 \mathcal{A} переводит любой ортонормированный базис пространства U в ортонормированный базис пространства V ;
- 4 \mathcal{A} переводит некоторый ортонормированный базис пространства U в ортонормированный базис пространства V .

↓ Доказательство проводится по схеме $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ с помощью соответствующих определений и утверждений об изоморфизмах линейных пространств (сл.20 §2 гл.III).↑

Пусть U, V – евклидовы пространства или унитарные пространства.

Определение

Говорят, что пространство со скалярным произведением U *изоморфно* пространству V , если существует изоморфизм пространства со скалярным произведением U на V .

Легко проверить, что определенное только что отношение изоморфности пространств со скалярным произведением является отношением эквивалентности на классе всех евклидовых (соответственно унитарных) пространств.

Из теорем сл.19 §2 гл.III и сл.11 вытекает

Теорема

Пусть U, V – конечномерные евклидовы пространства или унитарные пространства. Они изоморфны как пространства со скалярным произведением тогда и только тогда, когда $\dim U = \dim V$.

Пусть V – конечномерное евклидово или унитарное пространство. Тогда для любого линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathcal{H}(V)$ существует единственный сопряженный оператор $\mathcal{A}^* \in \mathcal{H}(V)$ такой что для

$$\forall x, y \in V (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y). \quad (3)$$

Для сопряженных операторов сохраняются все свойства сопряженных отображений, указанные на сл.4-5.

Из предложения сл.7 и следствия сл.8 вытекают следующие утверждения.

Предложение

Пусть V – конечномерное евклидово или унитарное пространство, $\dim V = n$, B – базис V . Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{H}(V)$ – линейный оператор, \mathcal{A}^* – сопряженный к нему линейный оператор и $\mathcal{A} \leftrightarrow_B A$, $\mathcal{A}^* \leftrightarrow_B A_1$. Тогда $\overline{A_1} = (G_B)^{-1} A^\top G_B$.

Следствие

Пусть V – конечномерное евклидово или унитарное пространство, $\dim V = n$, B – ортонормированный базис V . Пусть $\mathcal{A} \in \mathcal{H}(V)$ – линейный оператор, \mathcal{A}^* – сопряженный к нему линейный оператор и $\mathcal{A} \leftrightarrow_B A$, $\mathcal{A}^* \leftrightarrow_B A_1$. Тогда $A_1 = A^*$.

Предложение

- 1 Пусть V – конечномерное евклидово или унитарное пространство. Для любого инвариантного относительно линейного оператора $A \in H(V)$ подпространства $U \subseteq V$ его ортогональное дополнение U^\perp инвариантно относительно сопряженного оператора A^* .
- 2 Для любого линейного оператора $A \in H(V)$ имеет место равенство $(\text{Ker} A^*)^\perp = \text{Im} A$.

↓ Докажем утверждение 1. Для любых $x \in U$, $y \in U^\perp$ имеем $Ax \in U$, поэтому в силу (3) $0 = (Ax, y) = (x, A^*y)$. Следовательно, $A^*y \perp x$ для любого $x \in U$ и потому $A^*y \in U^\perp$. Таким образом, U^\perp инвариантно относительно сопряженного оператора A^* . Утверждение 1 доказано.

Докажем утверждение 2. Покажем, что $\text{Im} A \subseteq (\text{Ker} A^*)^\perp$. Пусть $x \in \text{Ker} A^*$, $y = Az \in \text{Im} A$. Тогда $(x, y) = (x, Az) = (A^*x, z) = 0$, т.е. $y \in (\text{Ker} A^*)^\perp$ и $\text{Im} A \subseteq (\text{Ker} A^*)^\perp$. Поскольку по теореме сл.13 §2 гл.IV $\dim(\text{Ker} A^*)^\perp = \dim V - \dim(\text{Ker} A^*)$ и по предложению сл.8 и теореме сл.10 §2 гл.III $\dim(\text{Im} A) = \dim(\text{Im} A^*) = \dim V - \dim(\text{Ker} A^*)$, заключаем, что $(\text{Ker} A^*)^\perp = \text{Im} A$ согласно теореме сл.6 §4 гл.I. ↑

Предложение

Пусть U, V – конечномерные евклидовы пространства или унитарные пространства, $\mathcal{A} \in \mathcal{H}(U, V)$. Тогда $\text{Ker}(\mathcal{A}^* \mathcal{A}) = \text{Ker} \mathcal{A}$ и $r(\mathcal{A}^* \mathcal{A}) = r(\mathcal{A})$.

↓ Пусть $x \in \text{Ker} \mathcal{A}$. Имеем $(\mathcal{A}^* \mathcal{A})x = \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}^* 0_V = 0_U$, т.е. $x \in \text{Ker}(\mathcal{A}^* \mathcal{A})$.

Пусть $x \in \text{Ker}(\mathcal{A}^* \mathcal{A})$. Тогда

$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (x, \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x)) = (x, (\mathcal{A}^* \mathcal{A})x) = (x, 0_U) = 0$. Следовательно, $\mathcal{A}x = 0_U$ и $x \in \text{Ker} \mathcal{A}$.

По теореме сл.10 §2 гл.III

$$r(\mathcal{A}) = \dim U - \dim(\text{Ker} \mathcal{A}) = \dim U - \dim(\text{Ker}(\mathcal{A}^* \mathcal{A})) = r(\mathcal{A}^* \mathcal{A}). \uparrow$$

Следствие

Для любой матрицы $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (соотв. $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$) имеют место равенства $r(A) = r(A^\top \cdot A) = r(A \cdot A^\top)$ (соотв. $r(B) = r(B^* \cdot B) = r(B \cdot B^*)$).

↓ Равенства $r(A) = r(A^\top \cdot A)$ и $r(B) = r(B^* \cdot B)$ непосредственно следуют из предложения. Применяя первое из них к матрице A^\top , получаем $r(A^\top) = r((A^\top)^\top \cdot A^\top) = r(A \cdot A^\top)$, откуда $r(A) = r(A \cdot A^\top)$.

Аналогично доказывается, что $r(B) = r(B \cdot B^*)$. ↑

Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений над полем \mathbb{R} в матричной записи:

$$A \cdot x = b, \quad (4)$$

где $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $x \in \mathbb{R}_n$, $b \in \mathbb{R}_k$. Определим линейное отображение $\mathcal{A}: \mathbb{R}_n \rightarrow \mathbb{R}_k$, имеющее в стандартных базисах евклидовых пространств \mathbb{R}_n , \mathbb{R}_k матрицу A . Тогда $\mathcal{A}v = A \cdot v$ для любого $v \in \mathbb{R}_n$ и с.л.у. (4) будет совместна $\Leftrightarrow b \in \text{Im}\mathcal{A}$.

Если $b \notin \text{Im}\mathcal{A}$, то с.л.у. (4) несовместна. В этом случае естественно искать вектор $x_0 \in \mathbb{R}_n$, обеспечивающий $\inf |\mathcal{A}x_0 - b|$.

Определение

Вектор $x_0 \in \mathbb{R}_n$, обеспечивающий $\inf |\mathcal{A}x_0 - b|$, называется *псевдорешением* с.л.у. (4).

Оказывается, в качестве $\mathcal{A}x_0$ можно взять ортогональную компоненту z вектора b на подпространство $U = \text{Im}\mathcal{A}$. Пусть $b = z + w$, где w — ортогональная составляющая вектора b относительно U . Тогда для любого $v \in \mathbb{R}_n$ имеем $|v - b|^2 = (v - b, v - b) = (v - (z + w), v - (z + w)) = ((v - z) - w, (v - z) - w) = (v - z)^2 - 2(v - z, w) + w^2 = (v - z)^2 + w^2$. Последняя сумма достигает наименьшего значения w^2 при единственном значении $v = z$.

Таким образом, наименьшее значение $|v - b|$ есть $|w|$ и оно достигается при $v = z$. В качестве псевдорешения x_0 можно взять любой элемент из множества $\mathcal{A}^{-1}(z)$.

Предложение

Пусть U и V — евклидовы или унитарные пространства, $\mathcal{A} : U \rightarrow V$ — линейное отображение, и $b \in V$. Тогда вектор x_0 , обеспечивающий $\inf |\mathcal{A}x_0 - b|$, удовлетворяет условию $\mathcal{A}^* \mathcal{A}x_0 = \mathcal{A}^* b$.

↓ Достаточно показать, что из $\mathcal{A}^* \mathcal{A}x_0 = \mathcal{A}^* b$ следует $\mathcal{A}x_0 - b \in (\text{Im } \mathcal{A})^\perp$.

Для любого $u \in U$ имеем

$$(\mathcal{A}x_0 - b, \mathcal{A}u)_V = (\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_0 - b), u)_U = (\mathcal{A}^* \mathcal{A}x_0 - \mathcal{A}^* b, u)_U = (0_U, u)_U = 0. \uparrow$$

Таким образом, псевдорешение x_0 с.л.у. $A \cdot x = b$ можно искать, решая с.л.у. $(A^\top \cdot A) \cdot x_0 = A^\top \cdot b$. Если матрица $A^\top \cdot A$ является обратимой (что эквивалентно равенству ранга $r(A)$ числу столбцов матрицы A в силу следствия сл.15), то псевдорешение единственно.