Глава VI. Линейные отображения и операторы пространств со скалярным произведением
§ 1. Сопряженное отображение

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Линейная алгебра для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(2 семестр)

Понятие сопряженного отображения

Пусть U, V – евклидовы или унитарные пространства, $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – произвольное отображение из U в V.

Определение

Отображение $\mathcal{B} : V \longrightarrow U$ называется *сопряженным* к отображению $\mathcal{A}$, если выполняется условие

$$\forall x \in U \ \forall y \in V \ (\mathcal{A}x, y)_V = (x, \mathcal{B}y)_U. \qquad (1)$$

Предложение

Если для отображения $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ существует сопряженное отображение, то оно определяется однозначно и является линейным отображением из V в U.

Для доказательства потребуется следующая

Лемма. Слабый закон сокращения для скалярного произведения

Пусть W – евклидово или унитарное пространство. Если $y, z \in W$ и $(x, y) = (x, z)$ для любого $x \in W$, то $y = z$.

$\Downarrow$ Из условия леммы следует, что $y - z \in W^{\perp} = \{0_W\}$.$\Uparrow$

$\Downarrow$ Докажем единственность. Предположим, что $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ – отображения, сопряженные с отображением $\mathcal{A}$ и докажем, что $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$. Из (1) получаем $(x, \mathcal{B}_1 y)_U = (\mathcal{A}x, y)_V = (x, \mathcal{B}_2 y)_U$, т.е. $(x, \mathcal{B}_1 y)_U = (x, \mathcal{B}_2 y)_U$ для всех $x \in U$, $y \in V$. Зафиксируем $y \in V$. Из равенства $(x, \mathcal{B}_1 y)_U = (x, \mathcal{B}_2 y)_U$ для всех $x \in U$ в силу леммы сл.2 получаем $\mathcal{B}_1 y = \mathcal{B}_2 y$. Таким образом, для любого $y \in V$ справедливо $\mathcal{B}_1 y = \mathcal{B}_2 y$, откуда следует, что $\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2$.

Обозначение

Если для отображения $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ существует сопряженное отображение, то оно обозначается через $\mathcal{A}^*$.

Докажем, что $\mathcal{A}^*$ является линейным отображением. Пусть $y_1, y_2 \in V$. Для любого $x \in U$ в силу (1) имеем $(\mathcal{A}x, y_1 + y_2)_V = (x, \mathcal{A}^*(y_1 + y_2))_U$ и $(\mathcal{A}x, y_1 + y_2)_V = (\mathcal{A}x, y_1)_V + (\mathcal{A}x, y_2)_V = (x, \mathcal{A}^* y_1)_U + (x, \mathcal{A}^* y_2)_U = (x, \mathcal{A}^* y_1 + \mathcal{A}^* y_2)_U$. Таким образом, $(x, \mathcal{A}^*(y_1 + y_2))_U = (x, \mathcal{A}^* y_1 + \mathcal{A}^* y_2)_U$ для любого $x \in U$. По лемме сл.2 получаем $\mathcal{A}^*(y_1 + y_2) = \mathcal{A}^* y_1 + \mathcal{A}^* y_2$.
Пусть λ – произвольный скаляр, $y \in V$. Для любого $x \in U$ в силу (1) имеем $(\mathcal{A}x, \lambda y)_V = (x, \mathcal{A}^*(\lambda y))_U$ и $(\mathcal{A}x, \lambda y)_V = \overline{\lambda}(\mathcal{A}x, y_V) = \overline{\lambda}(x, \mathcal{A}^* y)_U = = (x, \lambda(\mathcal{A}^* y))_U$. Таким образом, $(x, \mathcal{A}^*(\lambda y))_U = (x, \lambda(\mathcal{A}^* y))_U$ для любого $x \in U$, откуда в силу леммы сл.2 получаем $\mathcal{A}^*(\lambda y) = \lambda(\mathcal{A}^* y)$.
Предложение доказано.$\Uparrow$

Свойства сопряженных отображений

Предложение

Пусть для отображений $\mathcal{A}, \mathcal{B} : U \longrightarrow V$ евклидовых или унитарных пространств U, V существуют сопряженные отображения. Тогда для любого скаляра λ справедливы утверждения:

1. $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$,
2. $(\lambda\mathcal{A})^* = \overline{\lambda}\mathcal{A}^*$,
3. $(\mathcal{A}^*)^* = \mathcal{A}$.

$\Downarrow$Для доказательства утверждения 1 запишем $((\mathcal{A} + \mathcal{B})x, y)_V = (\mathcal{A}x + \mathcal{B}x, y)_V = (\mathcal{A}x, y)_V + (\mathcal{B}x, y)_V = (x, \mathcal{A}^*y)_U + (x, \mathcal{B}^*y)_U = (x, \mathcal{A}^*y + \mathcal{B}^*y)_U = (x, (\mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*)y)_U$, т.е. $((\mathcal{A} + \mathcal{B})x, y)_V = (x, (\mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*)y)_U$ для всех $x \in U$, $y \in V$. Таким образом, по определению $(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*$.
Для доказательства утверждения 2 запишем $((\lambda\mathcal{A})x, y)_V = (\lambda(\mathcal{A}x), y)_V = \lambda(\mathcal{A}x, y)_V = \lambda(x, \mathcal{A}^*y)_U = (x, \overline{\lambda}\mathcal{A}^*y)_U$, т. е. $((\lambda\mathcal{A})x, y)_V = (x, \overline{\lambda}\mathcal{A}^*y)_U$ для всех $x \in U$, $y \in V$. Таким образом, по определению $(\lambda\mathcal{A})^* = \overline{\lambda}\mathcal{A}^*$.
Докажем утверждение 3. Из равенства (1) $(\mathcal{A}x, y)_V = (x, \mathcal{A}^*y)_U$, откуда следует $(\mathcal{A}^*y, x)_U = (y, \mathcal{A}x)_V$, т.е. $\mathcal{A} = (\mathcal{A}^*)^*$.$\Uparrow$

Свойства сопряженных отображений (1)

Из предложения сл.2 и утверждения 3 предыдущего слайда вытекает

Следствие

Если отображение $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ евклидовых или унитарных пространств U, V обладает сопряженным отображением, то $\mathcal{A}$ является линейным отображением.

Предложение

Пусть для отображений $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ и $\mathcal{B} : V \longrightarrow W$ евклидовых или унитарных пространств U, V, W существуют сопряженные отображения. Тогда $(\mathcal{B}\mathcal{A})^* = \mathcal{A}^*\mathcal{B}^*$.

$\Downarrow$ Для любых $x \in U$, $y \in V$, $z \in W$ имеем $((\mathcal{B}\mathcal{A})x, z)_W = (\mathcal{B}(\mathcal{A}x), z)_W = (\mathcal{A}x, \mathcal{B}^* z)_V = (x, \mathcal{A}^*(\mathcal{B}^* z))_U = (x, (\mathcal{A}^*\mathcal{B}^*)z)_U$, откуда в силу определения сопряженного отображения следует требуемое.$\Uparrow$

Сопряженное к линейному отображению

Теорема

Пусть $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ – линейное отображение конечномерного евклидова или унитарного пространства U на соответственно евклидово или унитарное пространство V. Тогда существует единственное сопряженное отображение $\mathcal{A}^* : V \longrightarrow U$, которое является линейным.

$\Downarrow$В силу предложения сл.2 в доказательстве нуждается лишь существование $\mathcal{A}^*$. Если $U = \{0_U\}$, то $\mathcal{A}^*$ – нулевое отображение. Пусть $U \neq \{0_U\}$. Выберем в U ортонормированный базис $(e_1, \ldots, e_n)$ и положим для любого $y \in V$

$$\mathcal{B}y = (y, \mathcal{A}e_1)_V e_1 + (y, \mathcal{A}e_2)_V e_2 + \ldots + (y, \mathcal{A}e_n)_V e_n. \tag{2}$$

Докажем, что $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$. Пусть $x \in U$. Запишем $x = \lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n$ и вычислим $(\mathcal{A}x, y)_V = (\mathcal{A}(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n), y)_V =$ $(\lambda_1 \mathcal{A}e_1 + \ldots + \lambda_n \mathcal{A}e_n, y)_V = \lambda_1 (\mathcal{A}e_1, y)_V + \ldots + \lambda_n (\mathcal{A}e_n, y)_V$. Затем вычислим $(x, \mathcal{B}y)_U =$ $(\lambda_1 e_1 + \ldots + \lambda_n e_n, (y, \mathcal{A}e_1)_V e_1 + \ldots + (y, \mathcal{A}e_n)_V e_n)_U =$ $\lambda_1 \overline{(y, \mathcal{A}e_1)_V} + \ldots + \lambda_n \overline{(y, \mathcal{A}e_n)_V} = \lambda_1 (\mathcal{A}e_1, y)_V + \ldots + \lambda_n (\mathcal{A}e_n, y)_V$. Таким образом, для любых $x \in U$ и $y \in V$ справедливо равенство $(\mathcal{A}x, y)_V = (x, \mathcal{B}y)_U$, т.е. $\mathcal{B} = \mathcal{A}^*$.$\Uparrow$

Матрица сопряженного отображения

Предложение

Пусть U, V – конечномерные евклидовы или унитарные пространства, $\dim U = n$, B – базис U, $\dim V = k$, C – базис V. Пусть $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(U, V)$ – линейное отображение, $\mathcal{A}^*$ – сопряженное к нему линейное отображение и $\mathcal{A} \leftrightarrow_{B,C} A$, $\mathcal{A}^* \leftrightarrow_{C,B} A_1$. Тогда $\overline{A_1} = (G_B)^{-1} A^\top G_C$.

$\Downarrow$Пусть $x \in U$, $y \in V$. Запишем равенство $(\mathcal{A}x, y)_V = (x, \mathcal{A}^* y)_U$ через координаты векторов в базисах B и C, используя формулу (1) сл.3 §3 гл.IV и формулу для координат образа вектора (сл.17 §1 гл.II). Имеем $(\mathcal{A}x, y)_V = [\mathcal{A}x]_C^\top \cdot G_C \cdot \overline{[y]_C} = (A \cdot [x]_B)^\top \cdot G_C \cdot \overline{[y]_C} = [x]_B^\top \cdot A^\top \cdot G_C \cdot \overline{[y]_C}$ и $(x, \mathcal{A}^* y)_U = [x]_B^\top \cdot G_B \cdot \overline{[\mathcal{A}^* y]_B} = [x]_B^\top \cdot G_B \cdot \overline{A_1 \cdot [y]_C} =$ $[x]_B^\top \cdot G_B \cdot \overline{A_1} \cdot \overline{[y]_C}$. Следовательно, для любых столбцов $[x]_B$ и $[y]_C$ имеет место равенство $[x]_B^\top \cdot A^\top \cdot G_C \cdot \overline{[y]_C} = [x]_B^\top \cdot G_B \cdot \overline{A_1} \cdot \overline{[y]_C}$. Подставляя вместо $[x]_B$ столбцы единичной матрицы порядка n, а вместо $[y]_C$ – столбцы единичной матрицы порядка k, получим равенство $G_B \cdot \overline{A_1} = A^\top \cdot G_C$, откуда следует требуемое.$\Uparrow$

Следствие

Пусть U, V – конечномерные евклидовы или унитарные пространства, $\mathrm{dim}U = n$, B – ортонормированный базис U, $\mathrm{dim}V = k$, C – ортонормированный базис V. Пусть $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(U, V)$ – линейное отображение, $\mathcal{A}^*$ – сопряженное к нему линейное отображение и $\mathcal{A} \leftrightarrow_{B,C} A$, $\mathcal{A}^* \leftrightarrow_{C,B} A_1$. Тогда $A_1 = \overline{A^\top}$.

Это утверждение непосредственно следует из предложения сл.7, так как матрица Грама ортонормированного базиса – единичная.

Определение

Матрица $\overline{A^\top}$ называется *эрмитово сопряженной* к матрице $A \in \mathbb{C}^{k\times n}$. Она обозначается через A^*.

Предложение

Пусть U, V – конечномерные евклидовы или унитарные пространства, $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(U, V)$ – линейное отображение. Тогда $\mathrm{r}(\mathcal{A}) = \mathrm{r}(\mathcal{A}^*)$.

Это утверждение непосредственно следует из предложения сл.4 §2 гл.III, следствия этого слайда и очевидного равенства $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^*)$.

Пример

Известно, что линейное отображение $\mathcal{A}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^2$ в евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ имеет матрицу $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ в базисах $e_1 = (1, 2)$, $e_2 = (2, 3)$ и $f_1 = (1, 2, 1)$, $f_2 = (1, 0, 1)$, $f_3 = (0, 1, 1)$. Найти матрицу A_1 отображения $\mathcal{A}^*$ в базисах f_1, f_2, f_3 и e_1, e_2.

Запишем матрицы Грама базиса e_1, e_2: $G_e = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 13 \end{pmatrix}$ и базиса f_1, f_2, f_3: $G_f = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$. Используем формулу предложения сл.7 с учетом того, что рассматриваемые пространства евклидовы, поэтому комплексное сопряжение можно не учитывать: $A_1 = G_e^{-1} \cdot A^\top \cdot G_f$, т.е.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 13 & -8 \\ -8 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot G_f =$$

$$\begin{pmatrix} 29 & 26 & 39 \\ -18 & -16 & -24 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 327 & 133 & 183 \\ -202 & -82 & -113 \end{pmatrix}.$$

Изоморфизм евклидовых или унитарных пространств

Пусть U, V – евклидовы пространства или унитарные пространства.

Определение

Отображение $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ называется *изоморфизмом евклидовых* (соотв. *унитарных) пространств*, если $\mathcal{A}$ – изоморфизм линейного пространства U на V (определение см. на сл. 11 §3 гл.I) и для любых $x, y \in U$ справедливо равенство $(x, y)_U = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y)_V$.

В качестве примера приведем отображение n-мерного евклидова (соотв. унитарного) пространства U в арифметическое евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ (соотв. унитарное пространство $\mathbb{C}^n$), сопоставляющее каждому вектору строку его координат в фиксированном ортонормированном базисе.

Условия, эквивалентные тому, что линейное отображение есть изоморфизм евклидовых или унитарных пространств

Теорема

Пусть U, V – ненулевые конечномерные евклидовы пространства или унитарные пространства. Следующие условия эквивалентны для линейного отображения $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$:

1. $\mathcal{A}$ – изоморфизм евклидовых или унитарных пространств;
2. отображение $\mathcal{A}$ сюръективно и для любых $x, y \in U$ справедливо равенство $(x, y)_U = (\mathcal{A}x, \mathcal{A}y)_V$;
3. $\mathcal{A}$ переводит любой ортонормированный базис пространства U в ортонормированный базис пространства V;
4. $\mathcal{A}$ переводит некоторый ортонормированный базис пространства U в ортонормированный базис пространства V.

$\Downarrow$ Доказательство проводится по схеме $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 1$ с помощью соответствующих определений и утверждений об изоморфизмах линейных пространств (сл.13 §2 гл.III).$\Uparrow$

Изоморфные евклидовы или унитарные пространства

Пусть U, V – евклидовы пространства или унитарные пространства.

Определение

Говорят, что пространство со скалярным произведением U *изоморфно* пространству V, если существует изоморфизм пространства со скалярным произведением U на V.

Легко проверить, что определенное только что отношение изоморфности пространств со скалярным произведением является отношением эквивалентности на классе всех евклидовых (соответственно унитарных) пространств.
Из теорем сл.13 §2 гл.III и сл.11 вытекает

Теорема

Пусть U, V – конечномерные евклидовы пространства или унитарные пространства. Они изоморфны как пространства со скалярным произведением тогда и только тогда, когда $\dim U = \dim V$.

Сопряженный оператор

Пусть V – конечномерное евклидово или унитарное пространство. Тогда для любого линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$ существует единственный сопряженный оператор $\mathcal{A}^* \in \mathrm{H}(V)$ такой что для

$$\forall x, y \in V \ (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^* y). \tag{3}$$

Для сопряженных операторов сохраняются все свойства сопряженных отображений, указанные на сл.4-5.
Из предложения сл.7 и следствия сл.8 вытекают следующие утверждения.

Предложение

Пусть V – конечномерное евклидово или унитарное пространство, $\dim V = n$, B – базис V. Пусть $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$ – линейный оператор, $\mathcal{A}^*$ – сопряженный к нему линейный оператор и $\mathcal{A} \leftrightarrow_B A$, $\mathcal{A}^* \leftrightarrow_B A_1$. Тогда $\overline{A_1} = (G_B)^{-1} A^\top G_B$.

Следствие

Пусть V – конечномерное евклидово или унитарное пространство, $\dim V = n$, B – ортонормированный базис V. Пусть $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$ – линейный оператор, $\mathcal{A}^*$ – сопряженный к нему линейный оператор и $\mathcal{A} \leftrightarrow_B A$, $\mathcal{A}^* \leftrightarrow_B A_1$. Тогда $A_1 = A^*$.

Предложение

1. Пусть V – конечномерное евклидово или унитарное пространство. Для любого инвариантного относительно линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$ подпространства $U \subseteq V$ его ортогональное дополнение $U^\perp$ инвариантно относительно сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$.
2. Для любого линейного оператора $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(V)$ имеет место равенство $(\mathrm{Ker}\mathcal{A}^*)^\perp = \mathrm{Im}\mathcal{A}$.

$\Downarrow$Докажем утверждение 1. Для любых $x \in U$, $y \in U^\perp$ имеем $\mathcal{A}x \in U$, поэтому в силу (3) $0 = (\mathcal{A}x, y) = (x, \mathcal{A}^*y)$. Следовательно, $\mathcal{A}^*y \perp x$ для любого $x \in U$ и потому $\mathcal{A}^*y \in U^\perp$. Таким образом, $U^\perp$ инвариантно относительно сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$. Утверждение 1 доказано. Докажем утверждение 2. Покажем, что $\mathrm{Im}\mathcal{A} \subseteq (\mathrm{Ker}\mathcal{A}^*)^\perp$. Пусть $x \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}^*$, $y = \mathcal{A}z \in \mathrm{Im}\mathcal{A}$. Тогда $(x, y) = (x, \mathcal{A}z) = (\mathcal{A}^*x, z) = 0$, т.е. $y \in (\mathrm{Ker}\mathcal{A}^*)^\perp$ и $\mathrm{Im}\mathcal{A} \subseteq (\mathrm{Ker}\mathcal{A}^*)^\perp$. Поскольку по теореме сл.12 §2 гл.IV $\dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A}^*)^\perp = \dim V - \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A}^*)$ и по предложению сл.8 и теореме сл.6 §2 гл.III $\dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}) = \dim(\mathrm{Im}\mathcal{A}^*) = \dim V - \dim(\mathrm{Ker}\mathcal{A}^*)$, заключаем, что $(\mathrm{Ker}\mathcal{A}^*)^\perp = \mathrm{Im}\mathcal{A}$ согласно теореме сл.6 §4 гл.I.$\Uparrow$

Предложение

Пусть U, V – конечномерные евклидовы пространства или унитарные пространства, $\mathcal{A} \in \mathrm{H}(U, V)$. Тогда $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*\mathcal{A}) = \mathrm{Ker}\mathcal{A}$ и $\mathrm{r}(\mathcal{A}^*\mathcal{A}) = \mathrm{r}(\mathcal{A})$.

$\Downarrow$Пусть $x \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}$. Имеем $(\mathcal{A}^*\mathcal{A})x = \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x) = \mathcal{A}^*0_V = 0_U$, т.е. $x \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*\mathcal{A})$.
Пусть $x \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*\mathcal{A})$. Тогда
$(\mathcal{A}x, \mathcal{A}x) = (x, \mathcal{A}^*(\mathcal{A}x)) = (x, (\mathcal{A}^*\mathcal{A})x) = (x, 0_U) = 0$. Следовательно, $\mathcal{A}x = 0_U$ и $x \in \mathrm{Ker}\mathcal{A}$.
По теореме сл.6 §2 гл.III
$\mathrm{r}(\mathcal{A}) = \mathrm{dim}U - \mathrm{dim}(\mathrm{Ker}\mathcal{A}) = \mathrm{dim}U - \mathrm{dim}(\mathrm{Ker}(\mathcal{A}^*\mathcal{A})) = \mathrm{r}(\mathcal{A}^*\mathcal{A})$.$\Uparrow$

Следствие

Для любой матрицы $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ (соотв. $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$) имеют место равенства $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^\top \cdot A) = \mathrm{r}(A \cdot A^\top)$ (соотв. $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(B^* \cdot B) = \mathrm{r}(B \cdot B^*)$).

$\Downarrow$Равенства $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A^\top \cdot A)$ и $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(B^* \cdot B)$ непосредственно следуют из предложения. Применяя первое из них к матрице $A^\top$, получаем $\mathrm{r}(A^\top) = \mathrm{r}((A^\top)^\top \cdot A^\top) = \mathrm{r}(A \cdot A^\top)$, откуда $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}(A \cdot A^\top)$.
Аналогично доказывается, что $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(B \cdot B^*)$.$\Uparrow$

Рассмотрим произвольную систему линейных уравнений над полем $\mathbb{R}$ в матричной записи:

$$A \cdot x = b, \tag{4}$$

где $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$, $x \in \mathbb{R}_n$, $b \in \mathbb{R}_k$. Определим линейное отображение $\mathcal{A} : \mathbb{R}_n \longrightarrow \mathbb{R}_k$, имеющее в стандартных базисах евклидовых пространств $\mathbb{R}_n$, $\mathbb{R}_k$ матрицу A. Тогда $\mathcal{A}v = A \cdot v$ для любого $v \in \mathbb{R}_n$ и с.л.у. (4) будет совместна $\Leftrightarrow$ $b \in \mathrm{Im}\mathcal{A}$.
Если $b \notin \mathrm{Im}\mathcal{A}$, то с.л.у (4) несовместна. В этом случае естественно искать вектор $x_0 \in \mathbb{R}_n$, обеспечивающий $\inf |\mathcal{A}x_0 - b|$.

Определение

Вектор $x_0 \in \mathbb{R}_n$, обеспечивающий $\inf |\mathcal{A}x_0 - b|$, называется *псевдорешением* с.л.у. (4).

Оказывается, в качестве $\mathcal{A}x_0$ можно взять ортогональную компоненту z вектора b на подпространство $U = \mathrm{Im}\mathcal{A}$. Пусть $b = z + w$, где w – ортогональная составляющая вектора b относительно U. Тогда для любого $v \in \mathbb{R}_n$ имеем $|v - b|^2 = (v - b, v - b) = (v - (z + w), v - (z + w)) = ((v - z) - w, (v - z) - w) = (v - z)^2 - 2(v - z, w) + w^2 = (v - z)^2 + w^2$.
Последняя сумма достигает наименьшего значения w^2 при единственном значении $v = z$.

Таким образом, наименьшее значение $|v - b|$ есть $|w|$ и оно достигается при $v = z$. В качестве псевдорешения x_0 можно взять любой элемент из множества $\mathcal{A}^{-1}(z)$.

Предложение

Пусть U и V — евклидовы или унитарное пространства, $\mathcal{A} : U \longrightarrow V$ — линейное отображение, и $b \in V$. Тогда вектор x_0, обеспечивающий $\inf |\mathcal{A}x_0 - b|$, удовлетворяет условию $\mathcal{A}^*\mathcal{A}x_0 = \mathcal{A}^*b$.

$\Downarrow$Достаточно показать, что из $\mathcal{A}^*\mathcal{A}x_0 = \mathcal{A}^*b$ следует $\mathcal{A}x_0 - b \in (\mathrm{Im}\mathcal{A})^{\perp}$. Для любого $u \in U$ имеем
$(\mathcal{A}x_0 - b, \mathcal{A}u)_V = (\mathcal{A}^*(\mathcal{A}x_0 - b), u)_U = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}x_0 - \mathcal{A}^*b, u)_U = (0_U, u)_U = 0.$$\Uparrow$

Таким образом, псевдорешение x_0 с.л.у. $A \cdot x = b$ можно искать, решая с.л.у. $(A^\top \cdot A) \cdot x_0 = A^\top \cdot b$. Если матрица $A^\top \cdot A$ является обратимой (что эквивалентно равенству ранга $\mathrm{r}(A)$ числу столбцов матрицы A в силу следствия сл.15), то псевдорешение единственно.